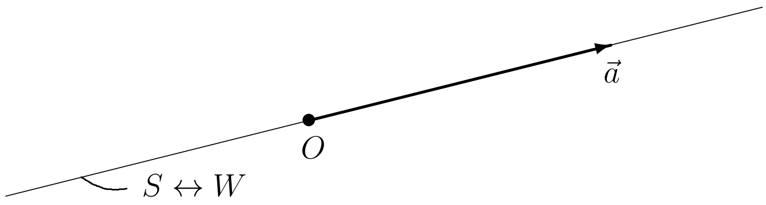
Koska ilmeisesti pätee

$$\begin{aligned} \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W \quad &\Rightarrow \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W, \\ \vec{v} \in W \quad &\Rightarrow \quad \lambda\vec{v} \in W \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

on W itsekin vektoriavaruus. Sen kantaan tarvitaan vain yksi vektori, esim $\vec{a}$, joten dim $W = 1$. Koska myös $W \subset V$, sanotaan, että W on V:n (aito) *aliavaruus* (engl. subspace) ja että $\vec{a}$ *virittää* (engl. span) W:n. Aliavaruuden W geometrinen vastine on origon kautta kulkeva suora $S \subset E^2$. Tämä on 1-*ulotteinen pisteavaruus*.



Vastaavuus

$$P \in S \;\leftrightarrow\; \overrightarrow{OP} = x\vec{a} \in W \;\leftrightarrow\; x \in \mathbb{R}$$

synnyttää kääntäen yksikäsitteisen vastaavuuden $\mathbb{R}$:n ja pisteavaruuden S välille. Lukujen geometrisointi lukusuoran pisteiksi (vrt. Luku II.1) perustui juuri tähän vastaavuuteen.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. a) Perustele vektorialgebran säännöt (V4)–(V6) geometrisesti.

   b) Vektoreille pätee kolmioepäyhtälö $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Päättele geometriaan enempää turvautumatta, että pätee myös $|\vec{a}| - |\vec{b}| \le |\vec{a} + \vec{b}|$.

2. Tason vektoreista $\vec{a}, \vec{b}$ oletetaan, että $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ja että $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ eivät ole yhdensuuntaiset. Millä vektorin $\vec{c}$ arvoilla voidaan vektoreita $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$ ja $\vec{b}+2\vec{c}$ 'siirtelemällä' muodostaa kolmio?

3. Todista Harjoitustehtävän II.1:2b väittämä vektorialgebran avulla.

4. Nelikulmiossa $ABCD$ on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ja $\overrightarrow{BC} = (1/2)(\vec{a} + \vec{b}\,)$. Laske vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ avulla vektori $\overrightarrow{AE}$, missä E on nelikulmion lävistäjien leikkauspiste.

5. Suunnikkaassa ABCD kärki A yhdistetään sivun CD keskipisteeseen P ja kärki B sivun AD keskipisteeseen R. Yhdysjanat leikatkoot pisteessä X. Lausu vektori $\overrightarrow{AX}$ vektoreiden $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ja $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ avulla.

6. Kolmiossa ABC merkitään $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. a) Päättele geometrisesti, että vektori $\vec{c} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ puolittaa kulman BAC. b) Piste D on janalla BC ja jana AD puolittaa kulman BAC. Todista vektorilaskulla *kulmanpuolittajalause*: Janojen BD ja DC pituuksien suhde $= |\vec{a}|/|\vec{b}|$.

7. Olkoot pisteet M ja N kolmioiden ABC ja DEF keskiöt. Näytä, että $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{MN}$.

8. Kolmion ABC sivut BC, CA ja AB jakautuvat pisteissä A^*, B^* ja C^* suhteessa $m : n$. Todista, että kolmioiden ABC ja $A^*B^*C^*$ keskiöt yhtyvät.

9. Olkoon $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ tason vektoriavaruuden kanta ja olkoon $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{v} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ ja $\vec{w} = -\vec{a} - 2\vec{b}$. Määritä vektorin $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ koordinaatit kannassa $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Piirrä kuva!

10. Vektorit $\vec{a}, \vec{b}$ muodostavat tason vektoriavaruuden V kannan. Näytä, että myös vektorit $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$ muodostavat kannan. Laske vektorin $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$ koordinaatit tässä kannassa.

11. Kolmiossa ABC piste O puolittaa sivun AB, piste E_1 jakaa sivun BC suhteessa $1 : 2$ ja piste E_2 sivun CA suhteessa $1 : 3$. Määritä kolmion kärkipisteiden koordinaatit siinä koordinaatistossa, jonka origo on piste O ja kantavektorit ovat $\overrightarrow{OE_1}$ ja $\overrightarrow{OE_2}$.

12. Jos $\vec{a}, \vec{b}$ ovat lineaarisesti riippumattomat tason vektorit, niin millä t:n arvoilla ($t \in \mathbb{R}$) vektorit $\vec{a} - t\vec{b}$ ja $t\vec{a} - 2\vec{b}$ ovat myös lineaarisesti riippumattomat?

13. Pisteen P koordinaatit ovat (x, y) koordinaatistossa $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ ja (x', y') koordinaatistossa $\{O', \vec{c}, \vec{d}\}$. Johda koordinaattimuunnoksen laskukaavat molempiin suuntiin, kun
a) $O' = O$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
b) $\overrightarrow{O'O} = \vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ja $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

14. Olkoon $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Johda kordinaattimuunnoksen laskukaavat koordinaatistosta $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ koordinaatistoon $\{O', \vec{c}, \vec{d}\}$, kun $O' =$ kolmion OAB keskiö ja $\vec{c} = \overrightarrow{O'A}$, $\vec{d} = \overrightarrow{O'B}$. Mitkä ovat kolmion kärkipisteiden ja sivujen keskipisteiden koordinaatit jälkimmäisessä koordinaatistossa?

Koska tässä on $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1$ ja $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, niin laskukaavaksi tulee

$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.} \tag{9}$$

Tämän mukaan skalaaritulo määräytyy ortonormeeratussa kannassa laskukaaviolla (vrt. vektorien yhteenlaskun vastaava kaavio edellisessä luvussa)

$$\begin{array}{ccccc}
\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & & \\
\downarrow & \downarrow & & & \\
(x_1, y_1) & (x_2, y_2) & \mapsto & (x_1x_2 + y_1y_2) & = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2
\end{array}$$

Myös vektorin itseisarvon laskeminen käy ortonormeeratussa kannassa helposti, sillä laskukaavojen (3) ja (9) mukaan

$$\boxed{|\vec{v}\,|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = x^2 + y^2, \quad \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.} \tag{10}$$

Esimerkki 2 Laske $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, kun $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{-}3\vec{j}$.

<u>Ratkaisu</u> Määritelmän II.3.1 ja kaavojen (9)–(10) perusteella

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\,||\vec{b}\,|} = \frac{4\cdot 2 + 3\cdot(-3)}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{2^2+3^2}} = -\frac{1}{5\sqrt{13}}. \quad \square$$

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Laske
   a) $|4\vec{a} - 5\vec{b}|$, kun $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ ja $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{3}|\vec{a}||\vec{b}|$
   b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, kun $|\vec{a} + 3\vec{b}| = 16$ ja $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 2\sqrt{58}$

2. a) Kolmiossa ABC ovat sivujen AB, AC ja BC pituudet a, b ja c. Näytä skalaaritulon avulla, että pätee $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\measuredangle BAC$.
   b) Nelikulmiossa $ABCD$ on $\cos\measuredangle BAD = \gamma$ ja sivujen AB, AD, BC ja CD pituudet ovat a, b, c ja d. Laske $\cos\measuredangle BCD$.

3. Kun $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat tason vektoreita ja $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, saa skalaaritulo $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ yksinkertaisen muodon. Millaisen? Mitä tulos tarkoittaa geometrisesti, jos $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, missä a) OA ja OB ovat suunnikkaan kaksi sivua, b) O on ympyrän keskipiste ja A, B sen kehän pisteitä? Kuva!

4. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on suoran kulman kärjestä lähtevä korkeusjana AD. Sivujen AB ja AC pituudet ovat 5 ja 12. Laske skalaaritulot $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$ ja $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

5. Tason vektoreista $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ tiedetään, että $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{7}$. Lisäksi tiedetään vektorista $\vec{v}$, että $\vec{a} \cdot \vec{v} = 3$ ja $\vec{b} \cdot \vec{v} = -1$. Määritä $\vec{v}$:n koordinaatit kannassa $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

6. Tason koordinaatistossa $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ ovat pisteen P koordinaatit $(2, 1)$ ja pisteen O' koordinaatit $(-1, 3)$. Määritä pisteen P koordinaatit koordinaatistossa $\{O', \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}\}$, kun tiedetään, että $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{3}$.

7. Laske $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ ja $\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, kun
   a) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \ \ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$
   b) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}, \ \ \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$
   c) $\vec{a} = -68\vec{i} + 51\vec{j}, \ \ \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
   d) $\vec{a} = 76\vec{i} - 57\vec{j}, \ \ \vec{b} = 92\vec{i} + 69\vec{j}$
   e) $\vec{a} = (3\sqrt{2} + 5)\vec{i} + (5\sqrt{2} - 3)\vec{j}, \quad \vec{b} = (5\sqrt{2} + 3)\vec{i} + (3\sqrt{2} - 5)\vec{j}$

8. Tason vektoreista $\vec{a}, \vec{b} \in V$ tiedetään, että $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$. Millä kertoimien λ, μ arvoilla $\{\vec{a}, \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\}$ on V:n ortonormeerattu kanta ?

9. (*) Näytä skalaarituloa käyttäen, että kolmion korkeusjanat ovat kolmella saman pisteen kautta kulkevalla suoralla, ts. korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat samassa pisteessä.

10. (*) Joukko $S \subset E^2$ koostuu pisteistä P, joiden karteesiset koordinaatit toteuttavat ehdon
$$(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 1.$$
Olkoot (ξ, η) pisteen P koordinaatit toisessa ortonormeeratussa koordinaatistossa, jonka origo on pisteessä $(x, y) = (1, -2)$ ja kantavektorit
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}).$$
Jos pisteen $P = (x, y)$ koordinaatit tässä koordinaatistossa ovat (x', y'), niin millä koordinaateille x', y' asetettavalla ehdolla on $P = (x', y') \in S$? Piirrä kuva, jossa näkyvät molemmat koordinaatistot, ja hahmottele kuvaan joukko S.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ovat (x,y,z). Mitkä ovat $\vec{u}$:n koordinaatit kannassa $\{\vec{i}+\vec{j},\ \vec{j}+\vec{k},\ \vec{i}+\vec{k}\}$?

2. Laske seuraavien avaruusvektorien muodostamat kulmat $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ asteina:
a) $\vec{a}=\vec{i},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ b) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$

3. a) Avaruusvektoreista $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tiedetään, että $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$ ja $\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\measuredangle(\vec{b},\vec{c})=60°$. Mikä on vektorin $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ pituus ?

   b) Määritä yksikkövektorit, jotka muodostavat yhtä suuret kulmat vektoreiden $\vec{k}$, $\vec{j}+\vec{k}$ ja $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ kanssa.

   c) Janasta OP (O = origo) tiedetään, että janan pituus on 5 ja että jana muodostaa positiivisen x-akselin kanssa kulman $\alpha=32°$ ja positiivisen y-akselin kanssa kulman $\beta=73°$. Laske P:n koordinaatit.

4. a) Säännöllisen tetraedrin kärjestä lähtevät särmävektorit ovat $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Laske $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})$ ja $\cos\measuredangle(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c},\ 2\vec{a}-\vec{b})$.

   b) Pöydällä oleva A4-kokoinen paperiarkki on suorakulmio $ABCD$, jonka sivun pituuksien suhde on $|AB|/|BC|=\sqrt{2}$. Arkki taitetaan pitkin lävistäjää AC siten, että kolmio-osa ABC jää pöydälle ja osa ACD kääntyy kolmioksi ACD' pöydän pintaa vastaan vastaan kohtisuoralle tasolle. Laske $\cos\measuredangle D'AB$.

5. a) Määritä kaikki avaruusvektorit $\vec{u}$, jotka täyttävät ehdot (1) $|\vec{u}|=1$, (2) $\vec{u}=\lambda(\vec{i}+\vec{j})+\mu(\vec{j}+\vec{k})$ jollakin $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ ja (3) $\vec{u}\perp\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$.

   b) Jaa vektori $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ kolmeen komponenttiin, joista yksi on vektorin $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ suuntainen, toinen vektorin $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$ suuntainen ja kolmas kohtisuorassa vektoreita $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vastaan. Mikä on luvun $\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ pienin arvo, kun $\vec{v}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ $(\vec{v}\neq\vec{0})$?

   c) Muodosta ortonormeerattu, oikeakätinen avaruusvektorien kanta $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ siten, että $\vec{a}$ on vektorin $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ suuntainen ja $\vec{b}$ on xy-tason suuntainen. Määräytyykö kanta yksikäsitteisesti näistä ehdoista?

6. Sijoita säännöllinen oktaedri (= kahdeksansivuinen monitahokas, jonka sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita) mukavaan asentoon koordinatistoon siten, että yksi kärki on origossa. Laske tästä kärjestä alkavien särmien vektoriesitykset ja näiden avulla sivutahkojen normaalivektorit. Laske edelleen näiden avulla vierekkäisten sivutahkojen välinen *diedrikulma*, eli kulma, jonka sivutahkot muodostavat yhteisen särmän suunnasta katsottuna.

7. Osoita: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}\,.$

8. a) Pisteet $(-1,-2,4)$, $(5,-1,0)$, $(2,-3,6)$ ja $(1,-1,1)$ ovat sekä tetraedrin että suuntiassärmiön kärkiä. Laske kummankin tilavuus ja pinnan ala.

   b) Tason kolmion kaksi kärkeä ovat pisteissä $(1,-2)$ ja $(3,3)$. Millaisessa E^2:n pistejoukossa on kolmannen kärjen täsmälleen oltava, jotta kolmion pinta-ala $=10$? Kuva!

9. Päättele, että avaruusvektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ovat lineaarisesti riippuvat täsmälleen kun vektoreiden virittämän suuntaissärmiön tilavuus $=0$. Tutki tällä kriteerillä ovatko seuraavat vektorisysteemit lineaarisesti riippumattomat:
   a) $\{\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\ 3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\ \vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}\}$ b) $\{\vec{i}-2\vec{k},\ 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\ 5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\}$

10. Olkoon $\vec{n}$ avaruuden yksikkövektori. Halutaan esittää avaruusvektori $\vec{F}$ muodossa $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, missä $\vec{F}_1||\vec{n}$ ja $\vec{F}_2\perp\vec{n}$. Näytä, että $\vec{F}_1=(\vec{F}\cdot\vec{n})\vec{n}$ ja $\vec{F}_2=-\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{F})$.

11. Todista:
    a) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)^2$.
    b) $|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}\,)|^2=|\vec{a}|^2\big[|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)^2\big]$.
    c) $(\vec{a}\times\vec{b}\,)\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)\cdot(\vec{c}\times\vec{a}\,)\;=\;(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}\,)^2$.

12. a) Vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Sievennä lauseke $[(\vec{a}\times\vec{b}\,)\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)]\times(\vec{c}\times\vec{a}\,)$. Millä ehdolla lauseke on $=\vec{0}$?

    b) Määritä vektorin $(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}\,))))))$ pituus, kun $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$ ja $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$.

    c) Määritä vektorit $\vec{u}$, jotka toteuttavat $\vec{u}\cdot\vec{j}=0$ ja $\vec{u}\times(\vec{k}\times\vec{u})=\vec{k}$.

13. (*) a) Näytä, että tetraedrin keskijanat, eli kärjen ja vastakkaisen sivun keskiön yhdysjanat, leikkaavat toisensa samassa pisteessä (= tetraedrin keskiö). Missä suhteessa keskijanat jakautuvat leikkauspisteessä?
    c) Anna kaksi esimerkkiä tetraedrista, jonka kaikilla neljällä korkeusjanalla on yhteinen piste.

14. (*) Pisteet $A=(1,1,4)$, $B=(1,-1,3)$, $C=(-1,-1,2)$ ja $D=(0,-2,2)$ ovat eräällä avaruustasolla T. Tutki, millainen ko. tason kuvio syntyy, kun pisteet yhdistetään mainitussa järjestyksessä janoilla suljetuksi murtoviivaksi. Onko kyseessä nelikulmio? Valitse haluamasi kuvakulma (koordinaatisto) tasossa T ja piirrä kuva!

15. (*) Pisteet $(-3,-1,4)$, $(0,-1,-2)$, $(2,5,1)$, $(3,2,7)$ ja $(5,1,-2)$ ovat 5-tahokkaan K kärkipisteet. Laske K:n tilavuus ja pinnan ala.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. a) Näytä, että yhtälöt esittävät samaa suoraa:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -11 - 6t \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

b) Määritä suorien leikkauspiste:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 2(1 + t) \end{cases}$$

c) Määritä suoran $x = 3 + t,\ y = -2 - t,\ z = 4 - 2t$ ja koordinaattitasojen leikkauspisteet.

2. Määritä α siten, että vektori $\vec{i} + 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$ sekä avaruussuorat

$$2(x-1) = 1 - y = 2z - 3 \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = 17, \\ y = 7 + 3t, \\ z = 2t \end{cases}$$

ovat saman tason suuntaiset.

3. Määritä pisteet $P_1 \in S_1$ ja $P_2 \in S_2$ suorilla $S_1 :\ x = -y = z$ ja $S_2 :$ $x + y - 1 = 0,\ z = 0$ siten, että vektori $\overrightarrow{P_1P_2}$ on yhdensuuntainen vektorin $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ kanssa.

4. Suora S kulkee pisteen $(-1, 1, 3)$ ja sen janan keskipisteen kautta, jonka xy- ja xz-tasot leikkaavat suorasta $x - 1 = 2(y + 1) = z + 3$. Määritä S:n suuntavektori.

5. Määritä α siten, että suorat $2(x-1) = y+1 = 2\alpha(z-1)$ ja $x+1 = y-1 = z$ leikkaavat. Mikä on suorien lyhin etäisyys, jos $\alpha = 1$?

6. Määritä suorien

$$\vec{r} = 2\vec{i} + 5\vec{k} + t(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + 2z = 6 \end{cases}$$

lyhin etäisyys ja lähinnä toisiaan olevat pisteet.

7. Määritä sen suoran parametrimuotoinen yhtälö, joka leikkaa kohtisuorasti suorat
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = t \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 2s, \\ z = 1 - 2s. \end{cases}$$

8. Laske pisteen $(2, 3, -1)$ etäisyys suorasta
$$\text{a)}\ \vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

9. a) Esitä tason T yhtälö perusmuodossa $ax + by + cz + d = 0$, kun parametrimuotoiset yhtälöt ovat
$$T : \begin{cases} x = 2 + 2t_1 + t_2, \\ y = -1 + 3t_1 + 2t_2, \\ z = 3 - t_1 + t_2. \end{cases}$$
b) Taso kulkee pisteen $P = (1, -13, -5)$ kautta ja sen suuntavektorit ovat $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ ja $\vec{v}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Onko piste $Q = (3, -1, 2)$ tasossa?

10. Määritä tason yhtälö (perusmuoto!), kun tiedetään, että taso sisältää suoran $x = 3 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = -2 + t$ ja a) kulkee pisteen (0,2,1) kautta, b) on vektorin $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ suuntainen

11. Määritä seuraavien tasojen yhteiset pisteet:
a) $x + y - z + 2 = 0,\ 2x + y + 2z - 4 = 0,\ x - y + 3z - 2 = 0$
b) $x + y + z - 6 = 0,\ x + 2y - z - 2 = 0,\ x + 4y - 5z + 5 = 0$
c) $x + 2y - 2z - 1 = 0,\ x - y + z - 2 = 0,\ x + 5y - 5z = 0$

12. Taso sisältää suoran $S_1 :\ \vec{r} = (1 + t)\vec{i} + (1 + 2t)\vec{j} + (1 + 3t)\vec{k}$ ja on suoran $S_2 :\ \vec{r} = (1 + t)\vec{i} + (-1 + t)\vec{j} + \vec{k}$ suuntainen. Johda tason yhtälö perusmuodossa. Johda samoin sen tason yhtälö, joka sisältää suoran S_2 ja on S_1:n suuntainen.

13. Johda sen tason yhtälö, joka puolittaa pisteen $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja tason $T :\ ax + by + cz + d = 0$ väliset janat.

14. Määritä pisteen $(3, 4, -2)$ kohtisuora projektio tasolla, jonka normaalivektori on $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ja joka kulkee pisteen $(1, 1, 1)$ kautta.

15. Määritä pisteen $(3, 2, -4)$ peilikuvapiste tason $x + y - 2z + 5 = 0$ suhteen.

16. Määritä origon suurin mahdollinen etäisyys pisteiden $(0,1,0)$ ja $(2,2,-1)$ kautta kulkevasta tasosta. Mikä taso antaa maksimietäisyyden?

17. Määritä tasojen $x+y+z=3$ ja $3x-2y-z=1$ leikkaussuoran kautta kulkevat tasot, jotka puolittavat tasojen välisen kulman.

18. Kheopsin pyramidin (alkuperäinen) korkeus on 147 m ja neliön muotoisen pohjan sivun pituus 230 m. Sijoita pyramidi koordinaatistoon niin, että se tuntee olonsa mahdollisimman mukavaksi, ja määritä tässä koordinaatistossa pyramidin sivutasojen yhtälöt, mittayksikkönä 100 m. Laske myös vierekkäisten sivujen välinen diedrikulma (vrt. Harj.teht II.6:6).

19. Vektorin $2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ suuntaan kulkeva valonsäde heijastuu tasosta T pisteessä $(1,2,-1)$. Heijastunut säde kulkee pisteen $(2,5,-3)$ kautta. Mikä on tason yhtälö?

20. Positiivisen z-akselin suunnasta tuleva valonsäde osuu pisteessä $(1,2,3)$ tasolla $3x+2y+z=10$ olevaan peiliin. Määritä heijastuneen säteen suunta. Missä pisteessä heijastunut säde leikkaa (jos leikkaa) xy-tason?

21. Painovoima vaikuttaa negatiivisen z-akselin suuntaan. Pisara putoaa pisteestä $(1,1,3)$ tasolle $3x-4y+12z=12$ ja alkaa valua tasoa pitkin alaspäin. Missä pisteessä pisara kohtaa xy-tason?

22. Tasangolta $z=0$ kohoaa vuorenrinne pitkin tasoa $x+2y+4z=0$. Rinteen pisteestä P, joka on korkeudella $h=10$, lähtee liikkeelle pistemäinen lumivyöry. Se etenee suoraviivaisesti rinnettä alas painovoimalakien mukaisesti. Tasangolle saavuttuaan se jatkaa suoraviivaista liikettään vaakasuoraan, kunnes osuu mökkiin, joka on pisteessä $Q=(10,40,0)$. Mikä oli piste P?

23. (Haukka ja kaksi kanaa) Universaalikoordinaatistossa maan pinta on taso $x+2y-3z=0$. Maan pinnalla käyskentelee kaksi pistemäistä kanaa A ja B. Kanoja vaanii pistemäinen haukka, joka lentää maan pinnan suuntaisella tasolla korkeudella $h=5$. Pistemäinen aurinko loistaa suunnassa $-4\vec{i}+\vec{k}$. Hetkellä H tapahtuu seuraavaa: Kanalta A pääsee säikähtynyt 'kot' sen huomatessa haukan varjon päällään. Kotkotuksen kuulee kana B, joka vilkaisee samassa taivaalle ja näkee haukan suunnassa $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Määritä vektori $\overrightarrow{AB}$ kyseisellä hetkellä H.

24. Missä kulmassa tason suora $y=4x$ leikkaa ympyräviivan $x^2+y^2-2x-4y+4=0$?

25. Avaruuskolmion kärjet ovat $(0,0,0)$, $(3,2,1)$ ja $(2,-1,3)$. Laske kolmion sisään piirretyn (eli kaikkia sivuja sivuavan) ympyrän keskipiste ja säde.

26. Avaruuden E^3 kolmen pisteen paikkavektorit ovat $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Esitä menettely, jolla voidaan määrittää pisteiden kautta kulkevan ympyrän keskipisteen paikkavektori. Sovella menettelyä, kun pisteet ovat $(1, 2, 3)$, $(2, -5, 3)$ ja $(-1, 3, -6)$. Määritä myös ympyrän säde ja ympyrän tason normaalivektori.

27. Määritä avaruusympyrän

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x + 2y - z = 10 \end{cases}$$

tangentti pisteessä $(-2, 3, -6)$.

28. Lieriön säde on $R = 2$ ja akseli on pisteen $P_0 = (1, 1, 1)$ kautta kulkeva suora, jonka suuntavektori on $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Määritä lieriön yhtälö toisen asteen pinnan yhtälön perusmuodossa. Mitkä ovat lieriön ja suoran $x = y = z$ leikkauspisteet, ja mikä lieriön piste on lähinnä origoa?

29. Lieriöllä ja kartiolla on yhteisenä akselina suora $S: \ x = 2y = -2z$ ja kumpikin kulkee pisteen $(1, 0, 0)$ kautta. Kartion kärkenä on piste $(-2, -1, 1)$. Laske lieriön säde ja kartion (sivuprofiilin) aukeamiskulma sekä saata kummankin pinnan yhtälöt toisen asteen pinnan yhtälön perusmuotoon. Määritä edelleen molempien pintojen ja xy-tason leikkauskäyrien yhtälöt ja hahmottele näiden käyrien muoto.

30. (*) Kuution, jonka sivun pituus $= 4$, yksi kärki on origossa ja kolme muuta positiivisilla koordinaattiakseleilla. Kuutiota katsotaan kaukaa vektorin $\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ osoittamasta suunnasta kuvakulmassa, jossa z-akseli näkyy pystysuorana. Laske, millaisena kuutio näkyy tästä kuvakulmasta. Kuva!

31. (*) Millä tavoin saadaan selville avaruustasot, jotka sivuavat kolmea annettua palloa? Montako tällaista tasoa on, jos pallot eivät leikkaa tai sivua toisiaan eikä mikään palloista ole toisen sisällä?

32. (*) Näytä, että yhtälö $K: \ xy+yz+xz = 0$ määrittelee kartion, ja määritä se K:n piste, joka on lähinnä pistettä $(-1, 2, 3)$.

33. (*) Kartion kärki on origossa, symmetria-akseli on vektorin $\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ suuntainen ja y-akseli on kartiopinnalla. Taso T kulkee pisteen $(1, 1, 1)$ kautta ja sivuaa kartiota pitkin avaruussuoraa. Määritä T:n yhtälö (kaksi ratkaisua!).