Esimerkki 4 Jos

$$\mathbf{x} = [\,i,\,1+i,\,2-i\,]^T \in \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{y} = [\,1-2i,\,2i,\,-1-i\,]^T \in \mathbb{C}^3,$$

niin

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}|^2 = 1 + (1+1) + (4+1) = 8, \quad \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle = (1+4) + 4 + (1+1) = 11,$$
$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = i(1+2i) + (1+i)(-2i) + (2-i)(-1+i) = -1+3i. \qquad \square$$

Matriisia $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T$ sanotaan $\mathbf{A}$:n *liittomatriisiksi* (engl. adjoint). Jos $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ ja $\mathbf{A}$ on kompleksinen matriisi kokoa $m \times n$, niin liittomatriisin ja $\mathbb{C}^m$:n skalaaritulon määritelmistä seuraa helposti (vrt. reaalinen tapaus edellä)

$$\boxed{\langle \mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{y}\rangle.}$$

Jos $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ on neliömatriisi ja $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, ts. $a_{ji} = \bar{a}_{ij}\ \forall i,j$, niin sanotaan, että $\mathbf{A}$ on *hermiittinen* (engl. Hermitean):

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \ \text{hermiittinen.}$$

Jokainen reaalinen ja symmetrinen matriisi on määritelmän mukaan myös hermiittinen.

Esimerkki 5 Yleinen hermiittinen matriisi kokoa 2×2 on muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix},$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{C}$. $\square$

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Laske $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}^T$, $\mathbf{AB}$ ja $\mathbf{BA}$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Laske $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CA}$ ja $\mathbf{BA}^T$.

3. Millä matriisien tyyppiä koskevilla oletuksilla tulot $\mathbf{AB}$ ja $\mathbf{BA}$ ovat a) molemmat määriteltyjä, b) samaa tyyppiä?

4. Olkoon
$$\mathbf{a} = [1,3,5,2], \quad \mathbf{b} = [-1,3,2,4]^T, \quad \mathbf{A} = ((-1)^{i+j},\, i = 1,2,\, j = 1,2,3,4).$$
Laske vektorien/matriisien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ keskinäisistä (kaksittaisista) tuloista kaikki, jotka ovat määriteltyjä.

5. Matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat kokoa 10×10 ja niiden alkiot ovat $a_{ij} = i + j$ ja $b_{ij} = i - j$. Laske tulomatriisin $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ alkio c_{ij}.

6. Olkoon
$$\mathbf{A} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & -c & -c \\ -c & d & d \\ -c & d & d \end{bmatrix}.$$
Määritä luvut a, b, c, d siten, että $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ ja $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$.

7. Määritä matriisi $\mathbf{A}$, kun tiedetään, että
$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Hae kaikki matriisit $\mathbf{B}$, jotka kommutoivat matriisin
$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
kanssa.

9. Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ samaa kokoa olevia neliömatriiseja. Todista:
a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ kommutoivat
b) $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ symmetriset $\;\not\Rightarrow\; \mathbf{AB}$ symmetrinen
c) $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ symmetriset ja kommutoivat $\;\Rightarrow\; \mathbf{AB}$ symmetrinen

10. Laske a) $\mathbf{A}^k\ \forall k \in \mathbb{N}$, b) $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{100}$, kun
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. a) Todista matriisitulon transponointisääntö $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

    b) Näytä, että jokainen neliömatriisi on esitettävissä yksikäsitteisesti muodossa $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, missä $\mathbf{B}$ on symmetrinen ja $\mathbf{C}$ on *vinosymmetrinen*: $\mathbf{C} + \mathbf{C}^T = \mathbf{0}$.

12. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

    Sievennä lauseke $f(x,y,z) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ toisen asteen polynomiksi.

13. Laske $\mathbf{Ax}$, $\mathbf{Bx}$, $\mathbf{AB}$, $(\mathbf{AB})^*$ ja $\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2+i \\ 1-i & -2i & 3+2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2-i & i & -i \\ -i & 2 & 1+i \\ 3i & 2+2i & 1-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3-i \\ 2+i \end{bmatrix}.$$

14. (*) Jos reaalinen matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kokoa $m \times n$ tulkitaan avaruuden $\mathbb{R}^{mn}$ alkiona, niin ko. avaruuden euklidista normia vastaa *matriisinormi*

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

    Näytä, että pätee $|\mathbf{Ax}| \le \|\mathbf{A}\| |\mathbf{x}| \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

15. (*) Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja määritellään

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k.$$

    Laske matriisin $\exp(\mathbf{A})$ alkiot x:n funktiona.

16. (*) (Naudat laitumella) Nautalaumassa on on 83 täysin ruskeata eläintä, 77 sarvipäätä, 36 sukupuoleltaan sonnia, 22 ruskeata sarvipäätä, 15 ruskeata sonnia, 25 sarvipäistä sonnia ja 7 ruskeata sarvipäistä sonnia. Kaikki lauman eläimet kuuluvat johonkin mainituista ryhmistä. Montako eläintä laumassa on? *Vihje*: Jaa eläimet pistevieraisiin ryhmiin, esim. ruskeita sarvipäisiä sonneja x_1 kpl ... ei-ruskeita sarvettomia lehmiä x_8 kpl. Kirjoita lineaarinen yhtälöryhmä ja ratkaise!

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Olkoon $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ samaa kokoa olevia neliömatriiseja. Todista:
   a) $\mathbf{A}$ säännöllinen ja symmetrinen $\Rightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$ symmetrinen.
   b) $\mathbf{CA} = \mathbf{CB}$ ja $\mathbf{C}$ säännöllinen $\Rightarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
   c) $\mathbf{AB}$ singulaarinen $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ tai $\mathbf{B}$ singulaarinen.
   d) $\mathbf{A}$ singulaarinen ja $\mathbf{B}$ säännöllinen $\Rightarrow$ $\mathbf{AB}$ ja $\mathbf{BA}$ singulaariset.
   e) $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ortogonaaliset $\Rightarrow$ $\mathbf{AB}$ ortogonaalinen.

2. Tarkista kokoa 2×2 olevan matriisin käänteismatriisin laskusääntö

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad D = ad - bc \neq 0.$$

3. a) Näytä, että jokainen ortogonaalinen 2×2-matriisi voidaan kirjoittaa jollakin $\theta \in \mathbb{R}$ jompaan kumpaan seuraavista muodoista:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

   b) Olkoon $\mathbf{A}$ kokoa 3×3 oleva ortogonaalimatriisi, jonka alkioista tiedetään: $a_{11} = \frac{3}{7},\ a_{12} = -\frac{2}{7},\ a_{22} = \frac{6}{7},\ a_{21} < 0,\ a_{31} > 0,\ a_{13} < 0$. Laske $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A}^{-1}$.
   c) Totea, että yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,x_3 & = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_3 & = 2 \\ -\frac{1}{2}\,x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,x_3 & = 3 \end{cases}$$

   kerroinmatriisi on ortogonaalinen. Ratkaise tätä tietoa käyttäen!
   d) Matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   on ominaisuus: $\lambda\mathbf{A}$ on ortogonaalinen eräällä $\lambda \in \mathbb{R}$. Määritä tätä tietoa hyväksi käyttäen vaakavektori $\mathbf{x}^T$ siten, että $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = [7, 13, -3, -9]$.

4. a) Olkoon $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$, missä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ja $|\mathbf{x}| \neq 1$. Näytä, että eräällä $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I} + \lambda\mathbf{x}\mathbf{x}^T$.
   b) Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ja $r = 2|\mathbf{x}|^{-2}$. Näytä, että $\mathbf{H} = \mathbf{I} - r\,\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ on symmetrinen ja ortogonaalinen matriisi.
   c) Näytä, että jos matriisille $\mathbf{A}$ pätee $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ on säännöllinen matriisi, niin $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ on ortogonaalinen.

5. Onko joukon $(1, 2, \ldots, 10)$ permutaatio $(4, 6, 2, 7, 9, 1, 3, 10, 5, 8)$ parillinen vai pariton?

6. Matriiseista $\mathbf{V}_1$ ja $\mathbf{V}_2$ kokoa 3×3 tiedetään, että kertoessaan vasemmalta matriisin $\mathbf{A}$ matriisi $\mathbf{V}_1$ vaihtaa $\mathbf{A}$:n rivien 1 ja 2 järjestyksen ja $\mathbf{V}_2$ rivien 2 ja 3 järjestyksen. Millaisen rivien permutoinnin silloin tuottavat $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ ja $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$? Määritä myös $\mathbf{V}_1$ ja $\mathbf{V}_2$ sekä mainitut tulot.

7. a) Olkoon $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kokoa $n \times n$ ja $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{d_i,\ i = 1 \ldots n\}$. Määritä matriisien $\mathbf{AD}$ ja $\mathbf{DA}$ alkiot.
   b) Olkoon $n, k \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ k \leq n,\ \mathbf{A} = (a_{ij})$ kokoa $n \times n$, $a_{ii} = a \neq 0$ kun $i \neq k$, $a_{kk} = b \neq 0$, $a_{ik} = c \neq 0$ kun $i > k$ ja $a_{ij} = 0$ muulloin. Määritä käänteismatriisin $\mathbf{A}^{-1}$ alkiot.

8. Määritä seuraavien kolmiomatriisien käänteismatriisit ratkaisemalla yleinen lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisina on ko. matriisi.

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{f)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. (*) Näytä Lauseeseen X.2.6 vedoten, että neliömatriiseille pätee:
   a) $\mathbf{AB}$ säännöllinen $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ säännölliset.
   b) $\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ säännöllinen.

10. (*) Näytä, että on olemassa permutaatiomatriisit $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ siten, että pätee

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}.$$

   Laske käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ tämän tiedon avulla. Tarkista, että $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

11. (*) Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $b \neq 0$. Näytä matriisialgebran avulla, että pätee: Differentiaaliyhtälöllä $y'' + ay' + by = x^{100}$ on yksittäisratkaisuna polynomi astetta 100.

kuormitus ristikkorakenteessa, vrt. Luku X.8), niin Gaussin algoritmin eliminaatiovaiheen toistaminen pystytään välttämään pelkän LU-hajotelman avulla: Kun hajotelman matriisit $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{U}$ tallennetaan, niin yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ voidaan purkaa kahdeksi peräkkäiseksi yhtälöryhmäksi:

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}.$$

Nämä ratkeavat eteen- ja takaisinsijoituksilla, jolloin yhtälöryhmän ratkaisemisen työmääräksi tulee $W \sim n^2$ (ks. Harj.teht. 5b). Jos $\mathbf{A}^{-1}$ olisi tallennettu, olisi työmäärä sama, joten käänteismatriisin laskemisella ei voiteta mitään (!).

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Kirjoita seuraavat yhtälöryhmät taulukkomuotoon ja ratkaise Gaussin algoritmilla. Laske myös kerroinmatriisien LU-hajotelmat.

a) $\begin{cases} x + y = 33 \\ 2x + 4y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2 \end{cases} \quad (a \neq \pm 1)$

c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 6x_3 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ratkaise Gaussin algoritmilla yhtälöryhmät $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ ja laske matriisin $\mathbf{A}$ LU-hajotelma.

3. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laske käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ Gaussin algoritmilla

a) ratkaisemalla yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ yleisellä $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ (symbolinen lasku),

b) ratkaisemalla taulukkomuodossa yhtälöryhmät $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i, \ i = 1 \ldots 4$

4. Näytä, että jos lineaarisen yhtälöryhmän kerroimatriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen, niin Gaussin algoritmi säilyttää symmetrisenä sen matriisin osan, johon eliminaatio ei ole vielä edennyt, ts. $(k-1)$:n eliminaatioaskeleen jälkeen pätee

$$a_{ji}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k-1)} \quad \forall\, i, j \geq k.$$

Päättele, että Gaussin algoritmin vaatima laskutyö on symmetrisen kerroinmatriisin tapauksessa $W = \frac{1}{6}\, n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

5. Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matriiseja kokoa $n \times n$, $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ ala- ja yläkolmiomatriiseja samaa kokoa ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Näytä oikeaksi seuraavat laskuoperaatioiden työmääriä koskevat arviot (työyksikkö = kertolasku + yhteenlasku).

a)	$\mathbf{A}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{Ab}$	$n^2 + \mathcal{O}(n)$
b)	$\mathbf{L}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$	$\frac{1}{2}\, n^2 + \mathcal{O}(n)$
c)	$\mathbf{A}, \mathbf{B} \mapsto \mathbf{AB}$	$n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
d)	$\mathbf{L}, \mathbf{U} \mapsto \mathbf{LU}$	$\frac{1}{3}\, n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

6. (*) Näytä, että laskuoperaation $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^{-1}$ työmäärä Gaussin algoritmin eri vaihtoehdoissa on ($\mathbf{A}$ kokoa $n \times n$, työyksikkö = kertolasku + yhteenlasku)

a)	$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] \mapsto [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,]$	$n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
b)	$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$	$n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. a) Näytä, että tuetun Gaussin algoritmin kuluessa suoritetut tukioperaatiot (rivien ja sarkkeiden vaihdot) voidaan suorittaa ennen eliminaatioita lopputuloksen muuttumatta.

   b) Olkoon $\mathbf{A}$ matriisi kokoa $n \times n$ ja olkoon $\mathbf{A}_k$ matriisi kokoa $k \times k$, joka koostuu $\mathbf{A}$:n alkioista $a_{ij},\ i,j = 1 \dots k$. Näytä, että yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ratkeaa Gaussin algoritmilla ilman tukioperaatioita täsmälleen kun $\mathbf{A}_k$ on säännöllinen matriisi jokaisella $k = 1 \dots n$.

2. Muunna singulaariseen perusmuotoon tuetulla Gaussin algoritmilla, määritä ratkaisut tai totea ratkeamattomuus:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Määritä $\mathbf{A}$:n säännöllisyysaste, kaikki yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ratkaisut sekä tulohajotelma $\mathbf{A} = \mathbf{V}^T\mathbf{LUW}^T$, kun $\mathbf{A} =$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

4. Saata seuraavat yhtälöryhmät tuetulla Gaussin algoritmilla singulaariseen perusmuotoon. Määritä ratkeavuusehdot ja yleinen ratkaisu sekä edelleen kerroinmatriisin tulohajotelma $\mathbf{A} = \mathbf{V}^T\mathbf{LUW}^T$.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & -4 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$

5. Muunna singulaariseen perusmuotoon ja ratkaise, mikäli mahdollista:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 11 & 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

6. Olkoon a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Määritä Gaussin algoritmilla ratkeavuusehdot ja yleinen ratkaisu yhtälöryhmille $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$) ja $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$).

Cramerin sääntö

Determinantin muista käyttömuodoista on syytä vielä mainita (ilman todistusta, ks. Harj.teht. 11) seuraavat kaksi laskusääntöä.

Lause X.5.7 (**Cramerin**[†] **sääntö**) Jos $\mathbf{A}$ on säännöllinen neliömatriisi kokoa $n \times n$, niin yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ratkaisu on

$$\mathbf{x} = (x_i), \quad x_i = \frac{\det \mathbf{A}^{(i)}}{\det \mathbf{A}}, \quad i = 1 \dots n,$$

missä $\mathbf{A}^{(i)}$ saadaan $\mathbf{A}$:sta korvaamalla i:s sarake $\mathbf{b}$:llä.

Lause X.5.8 Säännöllisen matriisin $\mathbf{A}$ käänteismatriisi on

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^T, \quad [\mathbf{B}]_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det \mathbf{A}^{(ij)}}{\det \mathbf{A}}.$$

Cramerin säännöllä on pienikokoisia yhtälöryhmiä ratkaistaessa edelleen jonkin verran käyttöä käsinlaskussa. Etenkin jos kerroinmatriisin alkiot ovat kokonaislukuja, voidaan säännöllä minimoida (käsinlaskussa vaivalloiset) jakolaskut. Myös symbolisessa (käsin)laskennassa Cramerin säännöllä on käyttöä samaan tapaan kuin determinantilla yleensä. — Numeerisessa matriisilaskennassa sen sijaan Cramerin säännöllä on kyseenalainen kunnia esiintyä 'maailman huonoimpana' lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisualgoritmina.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Näytä, että ortogonaalisen matriisin determinantilla on vain kaksi mahdollista arvoa: Joko $\det \mathbf{A} = 1$ tai $\det \mathbf{A} = -1$.

2. Laske Sarrus'n säännöllä:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -5 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Olkoon $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Laske

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha+2\beta & \alpha+3\beta \\ \alpha+3\beta & \alpha+\beta & \alpha+2\beta \\ \alpha+2\beta & \alpha+3\beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^3 & 1 \end{vmatrix}$$

[†]Sveitsiläinen matematiikko **Gabriel Cramer** (1704–1752) oli determinanttiteorian uranuurtajia teoksellaan "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrigues" (1750).

4. Laske a) alideterminanttikehitelmällä, b) ja c) Gaussin algortimilla, d) molemmilla:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Laske $\det \mathbf{B}$, kun $\mathbf{B} = (-5\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^7$ ja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 6 \\ -13 & -8 & -4 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Määritä kaikki reaaliset tai kompleksiset λ:n arvot, joilla seuraavat matriisit ovat singulaarisia.

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} \lambda-2 & 3 & 1 \\ \lambda-4 & 3 & 2 \\ \lambda-6 & \lambda & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3-\lambda & 4 \\ 4-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-6 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{d)} \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -13 \\ -2 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

7. Olkoon $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$, ja määritellään

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j + \beta_j \mathbf{a}_k, \quad j = 1 \ldots n, \ j \neq k,$$

missä $1 \leq k \leq n$ ja $\beta_j \in \mathbb{R}$. Näytä determinanttifunktion V ominaisuuksien perusteella, että pätee $V(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Miten tämä tulos liittyy Gaussin algoritmiin sovellettuna matriisiin $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]^T$?

8. Neliömatriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ olkoon kokoa $n \times n$ ja *tridiagonaalinen*, ts. $a_{ij} = 0$, kun $|i-j| \geq 2$. Edelleen olkoon $a_{ii} = 1$, $i = 1 \ldots n$, ja $a_{ij} = \lambda$, kun $|i-j| = 1$. a) Näytä, että determinantille $D_n = \det \mathbf{A}$ pätee palautuskaava $D_n = D_{n-1} - \lambda^2 D_{n-2}$. b) Laske D_n, $n = 2 \ldots 10$, kun $\lambda = 2$. c) Jos $\lambda = 1$, niin millä n:n arvoilla $\mathbf{A}$ on singulaarinen?

9. (*) Näytä, että jos determinantti kokoa $n \geq 3$ lasketaan alideterminanttisäännöllä, niin tarvittava kertolaskujen lukumäärä on

$$W_n = n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\,.$$

10. (*) Määritellään determinanttifunktio $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$ palautuvasti käyttäen Lauseen X.5.5 ensimmäistä purkusääntöä ($k = 1$) sekä sääntöä $\det a = a$ determinantille kokoa $n = 1$.

    a) Näytä induktiolla, että mainitulla tavalla määritellyllä funktiolla on determinanttifunktion ominaisuudet (i)–(iii).

    b) Näytä, että jos $p = (i_1, \ldots, i_n)$ on joukon $(1, \ldots, n)$ permutaatio ja $\mathbf{I}_p = [\mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_n}]$, niin a-kohdan määritelmän mukaisesti on joko $\det \mathbf{I}_p = 1$ tai $\det \mathbf{I}_p = -1$. Päättele, että edellisessä tapauksessa permutaatio p on parillinen (eli saavutettavissa parillisella määrällä parivaihtoja) ja jälkimmäisessä pariton — siis jokainen permutaatio on jompaa kumpaa tyyppiä.

11. (*) Valitsemalla $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j,\ j = 1 \ldots n$ johda Cramerin sääntö alideterminanttisäännöstä. Todista edelleen Lause X.5.8 lähtien Cramerin säännöstä.