Siis $\{d_i,\ i = 1 \ldots n\} \subset \sigma(\mathbf{A})$ ja $\mathbf{A}$:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria vastaten näitä ominaisarvoja. Tällöin on myös oltava $\{d_i,\ i = 1 \ldots n\} = \sigma(\mathbf{A})$, sillä muu johtaisi ristiriitaan Lauseen XII.1.2 kanssa. $\square$

Esimerkki 6 Matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on vain yksi ominaisvektori (Esimerkki 4), joten $\mathbf{A}$ ei ole diagonalisoituva (Lause XII.1.6). $\square$

Esimerkki 7 Määrittele diagonalisoiva muunnos $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu saadaan suoraan edellisen luvun Esimerkeistä 1 ja 5:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Tässä on valittu ortogonaalinen muunnos. Mahdollista on myös valita $\mathbf{C}$:n sarakkeiksi esim. vektorit $\mathbf{c}_1 = [1,1,1]^T$, $\mathbf{c}_2 = [1,0,-1]^T$ ja $\mathbf{c}_3 = [0,1,0]^T$, sillä nämäkin ovat $\mathbf{A}$:n lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita (vastaten ominaisarvoja $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$ ja $\lambda_3 = 6$, ks. edellisen luvun Esimerkki 1). Kysytyksi muunnokseksi saadaan tällä valinnalla

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Todista:
   a) Jos $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, niin $\lambda^p \in \sigma(\mathbf{A}^p)\ \forall p \in \mathbb{N}$.
   b) Jos $\mathbf{A}$ on säännöllinen ja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, niin $\lambda^{-1} \in \sigma(\mathbf{A}^{-1})$.
   c) Jos $\mathbf{A}$ on reaalinen, niin $\sigma(\mathbf{A}^T) = \sigma(\mathbf{A})$.
   d) Jos $1 \in \sigma(\mathbf{A})$ tai $2 \in \sigma(\mathbf{A})$, niin $\mathbf{B} = 2\mathbf{I} - 3\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$ on singulaarinen.

2. Määritä seuraavien matriisien ominaisarvot ja -vektorit sekä ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 4 & \alpha & \beta & 2 \\ 4 & \beta & \alpha & 2 \\ \beta & 3 & 3 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Matriisin $\mathbf{A}$ ominaisvektoreita ovat $[1,1,1]^T$, $[1,0,1]^T$ ja $[0,0,1]^T$. Laske tätä tietoa hyväksi käyttäen $\mathbf{A}^{11}\mathbf{x}$, kun $\mathbf{x} = [2,1,1]^T$.

b) Matriisin $\mathbf{B}$ ominaisarvot ovat reaalifunktioita $t \mapsto \lambda_i(t)$. Hahmottele näiden kuvaajat!

c) Matriisilla $\mathbf{C}$ on ominaisarvo λ ja vastaava ominaisvektori $[0,1,-1,0]^T$. Millainen ehto tästä seuraa luvuille α, β ja λ?

4. a) Näytä, että jos neliömatriisille pätee $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, niin $\sigma(\mathbf{A}) \subset \{0,1\}$. Näytä esimerkillä, että vaihtoehdot $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$, $\sigma(\mathbf{A}) = \{1\}$ ja $\sigma(\mathbf{A}) = \{0,1\}$ ovat kaikki mahdollisia.

b) Lineaarikuvaus $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, missä $\mathbf{A}$ on kokoa 3×3, vastaa projektiota tasolle $T : x + 3y - 2z = 0$ suoran $S : x = y = z$ sunnassa. Näytä, että $\sigma(\mathbf{A}) = \{0,1\}$ ja että $\mathbf{A}$:lla on kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Mitkä ovat ominaisarvojen kertaluvut? Päteekö myös $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$?

c) Olkoon $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$, missä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ja $|\mathbf{a}| = 1$. Näytä, että $\sigma(\mathbf{A}) = \{0,1\}$. Mitkä ovat ominaisarvojen geometriset kertaluvut?

5. Matriisilla kokoa 3×3 on ominaisuus: Matriisin ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ ja vastaavat ominaisvektorit ovat $[1,1,1]^T$, $[1,1,-1]^T$ ja $[0,1,2]^T$. Montako erilaista nämä ehdot täyttävää matriisia on olemassa? Määritä yksi!

6. Tutki, ovatko seuraavat matriisit $\mathbf{A}$ diagonalisoituvia. Myönteisessä tapauksessa laske matriisille jokin (reaalinen tai kompleksinen) tulohajotelma muotoa $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$, missä $\mathbf{D}$ on diagonaalinen.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   h) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. a) Näytä, että similaarisuus on samaa kokoa olevien neliömatriisien välinen ekvivalenssirelaatio. Millainen on ekvivalenssiluokka, joka sisältää yksikkömatriisin $\mathbf{I}$?

   b) Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ lineaarikuvauksen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matriisit avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahdessa eri kannassa. Näytä, että $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat similaariset.

8. Määritä seuraavien matriisien ominaisarvot ja muodosta ominaisvektoreista $\mathbb{R}^2$:n, $\mathbb{R}^3$:n tai $\mathbb{R}^4$:n ortonormeerattu, positiivisesti suunnistettu kanta.

   a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   h) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. (*) *Cayleyn–Hamiltonin lauseen* mukaan neliömatriisi toteuttaa oman karakteristisen yhtälönsä, ts. jos $p(\lambda)$ on matriisin karakteristinen polynomi, niin $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. a) Todista lause siinä tapauksessa, että $\mathbf{A}$ on diagonalisoituva. b) Näytä, että lause on tosi myös Esimerkin 4 ei-diagonalisoituvalle matriisille