MS-A0007 Matriisilaskenta

1. Vektorit ja kompleksiluvut

Nuutti Hyvönen, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

26.10.2015

1.1 Vektorit

Reaalinen n-ulotteinen avaruus on joukko
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
Sen pisteet voidaan mieltää myös (paikka)vektoreiksi, merkitään niitä pystyvektoreina:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

1.1 Vektorit

Määritellään kaksi laskutoimitusta avaruudessa $\mathbb{R}^n$:

i) yhteenlasku, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

ii) skalaarilla kertominen, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Alkioittain, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

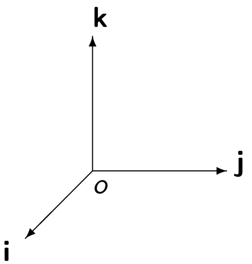
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \alpha\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Vektori, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on *nollavektori*.
Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$.

1.1 Vektorit

Koordinaatisto muodostetaan kiinnittämällä origo ja kantavektorit.

Kolmiulotteisessa avaruudessa siis esim. karteesinen koordinaatisto $\{o, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, missä yksikkövektorit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ muodostavat ortonormeeratun positiivisesti suunnistetun kannan.



1.1 Vektorit

Huom!
Tasossa: Jos **a** kiertyy **b**:n päälle vastapäivään lyhintä reittiä, on pari $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ suunnistettu positiivisesti.

Avaruudessa: Jos kolmikko $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ toimii oikean käden säännön $\{P, E, K\}$ mukaisesti, se on positiivisesti suunnistettu.

1.1 Vektorit

Tasossa kantavektorit **i** ja **j**,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} \widehat{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Avaruudessa kantavektorit **i**, **j** ja **k**,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \widehat{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Olkoon $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ avaruuden ortonormeerattu kanta ja

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \widehat{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k} \widehat{=} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 1

Vektoreiden **a** ja **b** *skalaaritulo* (eli sisätulo eli pistetulo) on

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Vektorit ovat kohtisuorassa, jos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, merkitään $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 2

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \textit{jos } \mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0 \\ 0, & \textit{jos } \mathbf{a} = 0 \textit{ tai } \mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 3 (lasketaan luennolla)

Olkoon $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Laske

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
2. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
3. $3\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{c} - 3\mathbf{b})$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Vektoritulo voidaan muodostaa vain (kolmiulotteisessa) avaruudessa.

Määritelmä 4

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ kolmiulotteisia vektoreita. *Vektori- eli ristitulo* on vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jolle pätee:

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
3. vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin

Jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, on $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Esimerkki 5

Vektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ vektoritulo $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, sillä

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}||\mathbf{j}| \sin \measuredangle(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 1,$$

$\mathbf{k}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria vastaan, ja $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

Vektoritulo **ei** ole

- vaihdannainen: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- liitännäinen: $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Sille kuitenkin pätee

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Kannassa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ vetoritulo saa nasevan muodon:
Olkoon

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Tällöin voidaan suoralla laskulla osoittaa, että

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}.$$

Myöhemmin tällä kurssilla opimme determinantin käsitteen ja näemme, että yo. voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Esimerkki 6 (lasketaan luennolla)

Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Laske

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Ratkaisu:

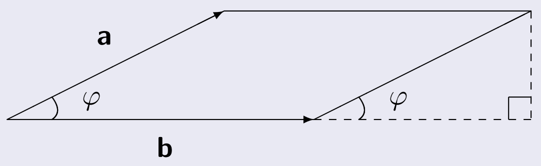
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{j} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + 2\mathbf{k} - (-\mathbf{k}) + \mathbf{0} = 3\mathbf{k}$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 4\mathbf{j} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -2\mathbf{k} + \mathbf{j} + 2\mathbf{i}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 2\mathbf{k} - \mathbf{j} + \mathbf{i}$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 7

Vektoreiden **a** *ja* **b** *virittämän suunnikkaan ala on* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

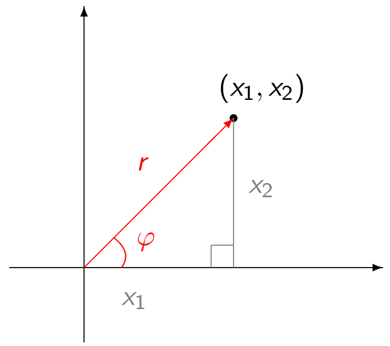
Todistus.



$h = |\mathbf{a}| \sin \varphi$

Ala $=$ kanta $\cdot$ korkeus $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. □

1.3 Napakoordinaatit



$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\tan \varphi = \frac{x_2}{x_1}$

$x_1 = r \cos \varphi$

$x_2 = r \sin \varphi$

1.3 Napakoordinaatit

Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\mathbf{x} = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\,(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\,,$$

missä $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on pisteen etäisyys origosta ja $\varphi = \arg(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on $\mathbf{x}$:*n argumentti* eli kulma $\mathbf{x}$:n paikkavektorin ja vaaka-akselin välillä.

Luvut

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| & \in [0, \infty[, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ovat $\mathbf{x}$:*n napakoordinaatit*.

1.3 Napakoordinaatit

Huom.

- $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi)$ ja $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi)$, joten argumentti on monikäsitteinen (kulmaan voi lisätä 2π-monikertoja)!
  Usein halutaan, että $\arg(\mathbf{x}) \in [0, 2\pi[$ tai $\arg(\mathbf{x}) \in]-\pi, \pi]$.
- Jos $x_1 \neq 0$, niin

  $$\tan(\arg(\mathbf{x})) = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{"eli"} \quad \arg(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

  Huomaa, että funktion arctan "päähaara" saa arvoja vain välillä $]-\pi/2, \pi/2[$, joten sen antamaan kulmaan joutuu joskus lisäämään/vähentämään luvun π (piirrä kuva!).
- Origon vaihekulma $\arg(0)$ on "epämääräinen".

1.3 Napakoordinaatit

Esimerkki 8 (lasketaan luennolla)

Mitkä ovat karteesisissa koordinaateissa ilmoitetun pisteen $\mathbf{x} = (\sqrt{3}, 1)$ napakoordinaatit?

Ratkaisu:

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6. \end{cases}$$

Napakoordinaateissa siis $x = (2, \pi/6)$.
(Tarkistus: $2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$, $2\sin(\pi/6) = 1$.)

1.4 Kompleksiluvut

Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ovat luonnollinen joukko aloittaa laskeminen.

Jos halutaan ratkaista muotoa $x + n = m$, $n, m \in \mathbb{N}$, olevat yhtälöt, kaipaa lukujen joukko kuitenkin laajennusta kokonaislukujen joukoksi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Tämäkään ei riitä muotoa $nx = m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, olevien yhtälöiden ratkaisemiseen, vaan tarvitaan laajennus rationaalilukuihin:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

1.4 Kompleksiluvut

Rationaalilukujenkaan joukosta ei löydy ratkaisua yhtälölle $x^2 = 2$. Tätä varten tehdään vielä laajennus, otetaan mukaan myös irrationaaliluvut, jolloin saadaan reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Onko kaikki nyt hyvin?

Mikä on yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisu?

1.4 Kompleksiluvut

Määritellään *imaginääriyksikkö* i olemaan luku, jolle pätee

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Imaginääriyksikköä i voitaisiin siis tavallaan kutsua myös -1:n neliöjuureksi.

Määritelmä 9

Kompleksiluku on muotoa

$$a + \mathrm{i}b$$

oleva esitys, jossa a ja b ovat reaalilukuja ja i imaginääriyksikkö.

$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on kompleksilukujen joukko.