MS-A0004/A0006 Matriisilaskenta

5. Matriisihajotelmat

Nuutti Hyvönen, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

8.10.2015

Matriisihajotelmat

Laskentaongelmissa käsiteltävät matriisit ovat tyypillisesti valtavia. Jotta laskut menisivät läpi edes jossain määrin järjellisessä ajassa, käytetään hyväksi mm. matriisihajotelmia. Ideana niissä on purkaa matriisi useamman, yksinkertaisemman matriisin tuloksi. Matriisihajotelmia on koko joukko, ne soveltuvat eri käyttötarkoituksiin ja erityyppisille matriiseille. Tällä kurssilla tarkastelemme varsinaisesti näistä kahta: diagonalisointia ja singulaariarvohajotelmaa (SVD). Lisäksi harjoituksessa 4 esiintyi LU-hajotelma.

5.1 Diagonalisointi

$\mathbb{R}^{n\times n}$ neliömatriisi A, joilla on n riippumatonta ominaisvektoria, voidaan diagonalisoida. Tämä tarkoittaa, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

missä matriisin S sarakkeet ovat matriisin A ominaisvektorit, ja matriisi Λ on diagonaalimatriisi, jossa kussakin sarakkeessa on matriisissa S samassa sarakkeessa olevaan ominaisvektoriin liittyvä ominaisarvo.

5.1 Diagonalisointi

Esimerkki 1 (Luentoharjoitus)

Aiemmin laskimme matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit, ja saimme ominaisarvoa -1 vastaavaksi ominaisvektoriksi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja ominaisarvoa 3 vastaavaksi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diagonalisoi A.

Vastaus:

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5.1 Diagonalisointi

Huom $n \times n$-matriisi diagonalisoituu, jos sillä on n lin. riippumatonta ominaisvektoria. Erityisesti tämä tapahtuu silloin, kun matriisilla on n erisuurta ominaisarvoa, mutta voi siis tapahtua muulloinkin!

Esimerkki 2

Matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ei diagonalisoidu. Sen ainoa ominaisarvo on nimittäin 0, eli $m_a(0) = 2$. Ominaisvektoreita laskettaessa kuitenkin havaitaan, että löytyy vain yksi ominaisvektori, eli $m_g(0) = 1$, eikä A diagonalisoidu.

5.1 Diagonalisointi

Esimerkki 3

Matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisoituu: Sen ominaisarvot ovat 3 ja -1, $m_a(3) = 2$ ja $m_a(-1) = 1$, mutta onneksi (kuten aiemmin laskettiin) ominaisarvoa 3 vastaten löytyy ominaistaso, eli saadaan kaksi lin. riippumatonta ominaisvektoria om. arvolle 3. Saadaan hajotelma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

5.1 Diagonalisointi

Huom. Jos matriisi on diagonalisoituva, sen potensseja on hyvin näppärä laskea:

$$\begin{aligned} A^2 &= S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{=I} \Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1} \\ A^3 &= S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{=I} \Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{=I} \Lambda S^{-1} = S\Lambda^3 S^{-1} \\ A^k &= S\Lambda^k S^{-1} \end{aligned}$$

Diagonaalimatriisin potenssithan ovat helppoja:

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

5.1 Diagonalisointi

Esimerkki 4 (Luentoharjoitus)

Laske A^{2014}, kun

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vastaus:

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^{2014} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{2014} & 0 \\ 0 & 4^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^{2014} & 5^{2014} - 4^{2014} \\ 0 & 4^{2014} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.1 Diagonalisointi

Huom. Käänteismatriisin löytäminenkin on diagonalisoidulle matriisille helppoa:

$$A^{-1} = (S\Lambda S^{-1})^{-1} = S\Lambda^{-1}S^{-1}.$$

Diagonaalimatriisillehan

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Joissakin tapauksissa diagonalisointi onnistuu erityisen mukavasti: tästä on kyse normaalin matriisin unitaarisessa diagonalisoinnissa.

Ensin hieman terminologiaa:

- Matriisi $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ on matriisin $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *konjugaattitranspoosi*, jos $(A^*)_{kj} = \overline{A_{jk}}$.
- Matriisi $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on *symmetrinen*, jos $A^* = A$.
- Matriisi $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on *normaali*, jos $A^*A = AA^*$.
- Matriisi $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on *unitaarinen*, jos $U^* = U^{-1}$.

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Lause 5 (Normaalin matriisin unitaaridiagonalisointi)

Matriisille $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. *A on normaali.*
2. *$A = U\Lambda U^*$, missä $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on unitaarinen ja $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonaalinen.*

Esimerkki 6

Jos A on symmetrinen, eli $A^* = A$, niin A on normaali:

$$A^*A = A^2 = AA^*.$$

Symmetrinen matriisi on siis aina unitaarisesti diagonalisoituva.

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Esimerkki 7 (lasketaan luennolla)

Osoita, että matriisi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ei ole normaali.

Lause 8 (Erikoistapaus unitaaridiagonalisoinnista)

Jos $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on symmetrinen ja sen ominaisarvot ovat erisuuret, niin $A = U\Lambda U^*$, missä $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on unitaarinen ja $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonaalinen.

Todistus.

Taululla, jos ehditään. □

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Huom. Kompleksisille vektoreille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ pistetulo on

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \overline{\mathbf{v}_i}.$$

Kompleksiset vektorit ovat ortogonaaliset, kun pistetulo on 0.

Huom. Normaalin matriisin eri ominaisarvoja vastaavat normeeratut ominaisvektorit ovat ortonormaaleja. Samaa ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit voidaan valita siten, että ne ovat ortonormaaleita.

Matriisi U saadaan siis normeeratuista, ortonormaaleista ominaisvektoreista.

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Esimerkki 9 (lasketaan luennolla)

Osoita, että matriisi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ on normaali ja diagonalisoi se unitaarisesti.

Ratkaisu: Lasketaan

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joten A on normaali ja se voidaan diagonalisoida unitaarisesti.

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Etsitään ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$.
Etsitään ominaisvektorit: yhtälöstä $(A - \mathrm{i}I)\mathbf{x} = 0$ saadaan

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eli ehto $-\mathrm{i}x_1 + x_2 = 0$. Valitaan ominaisvektoriksi $v_1 = (1/\sqrt{2}, \mathrm{i}/\sqrt{2})^T$. (Tällöin sen pituus on 1!)
Vastaavasti ominaisarvolle $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ saadaan ominaisvektori $v_2 = (1/\sqrt{2}, -\mathrm{i}/\sqrt{2})^T$.

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Matriisille A saadaan siis unitaarinen diagonalisointi

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \mathrm{i}/\sqrt{2} & -\mathrm{i}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\mathrm{i}/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= U\Lambda U^*. \end{aligned}$$

(Tarkista kertolaskulla!)