5.3 SVD

(a) Alkuperäinen kuva, 210 KB

(b) SVD:llä pakattu kuva, 82 KB

5.3 SVD

Kuten edellä huomattiin, vain neliömatriisin voi diagonalisoida — olettaen, että sillä on täysi määrä riippumattomia ominaisvektoreita. Kaikille matriiseille voidaan kuitenkin tehdä singulaariarvohajotelma (Singular Value Decomposition).

SVD:n ideana on purkaa lineaarikuvaus kolmeen osaan: unitaariseen kuvaukseen, venytykseen ja toiseen unitaariseen kuvaukseen. (Unitaariset kuvaukset voi usein tulkita kierroiksi.)

SVD:tä käytetään mm. signaalinkäsittelyssä ja statistiikassa. Siihen perustuvat esimerkiksi jotkin kuvanpakkausmenetelmä ja Googlen hakukoneen toiminta. SVD liittyy läheisesti ns. pääkomponenttianalyysiin, jossa tavoitteena on löytää monidimensioisesta datasta ne komponentit, joilla sen keskeisimmät piirteet voidaan esittää menettämättä oleellista informaatiota.

5.3 SVD

Lause 10 (SVD)

Matriisille $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ on olemassa hajotelma

$$A = U \Sigma V^T,$$

missä U on $m \times m$-ulotteinen ortogonaalinen matriisi, V on $n \times n$-ulotteinen ortogonaalinen matriisi ja Σ on $m \times n$-ulotteinen diagonaalimatriisi, joka sisältää matriisin A singulaariarvot.

Muistutus: Matriisin on ortogonaalinen, jos käänteismatriisi on sen transpoosi: $U^{-1} = U^T$. Tällöin sen sarakevektorit ovat ortonormaaleja. (Huomaa, että reaaliselle matriisille ortogonaalisuus ja unitaarisuus ovat sama asia.)

5.3 SVD

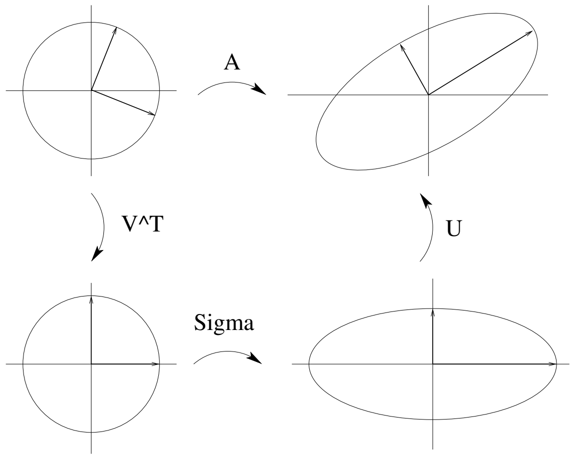

Figure: A = kierto + venytys + kierto

5.3 SVD

Huom.

- Vain matriisi Σ on yksikäsitteinen (kun singulaariarvot asetetaan diagonaalille suurimmasta pienimpään), muita voi löytyä useita.
- Luku $\sigma > 0$ on matriisin A singulaariarvo, jos on olemassa vektorit u ja v siten, että $Av = \sigma u$ ja $A^T u = \sigma v$.
- Jos σ on matriisin A singulaariarvo, niin σ^2 on matriisin $A^T A$ ominaisarvo.
- SVD on olemassa myös kompleksisille matriiseille, silloin transpoosin V^T sijaan tarvitaan adjungaatti V^* (kompleksikonjugaatin transpoosi) ja U ja V ovat unitaarisia, eli $V^{-1} = V^*$, $U^{-1} = U^*$.

5.3 SVD

SVD voidaan laskea seuraavien tietojen perusteella:

- Matriisin Σ diagonaalialkiot σ_j ovat matriisin $A^T A$ ominaisarvojen positiiviset neliöjuuret.
- Matriisin V sarakevektorit v_j (eli V^T:n rivit) ovat matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Matriisin U sarakevektorit u_j ovat matriisin AA^T yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Jos $\sigma_j \neq 0$, niin sarakevektori $u_j = Av_j/\sigma_j$.

Huom. Matriisit $AA^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ja $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ovat aina symmetrisiä, joten niillä on täysi määrä ortogonaalisia ominaisvektoreita. Koko SVD:n idea perustuu tähän.

5.3 SVD

Esimerkki 11 (Luentoharjoitus)

Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Ratkaisu: Matriisin $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ovat 50 ja 0, joten singulaariarvot ovat $\sigma_1 = \sqrt{50}$, $\sigma_2 = 0$. Matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit ovat $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ja $v_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

5.3 SVD

Nyt $u_1 = Av_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{5} \\ 15/\sqrt{5} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. Koska $\sigma_2 = 0$, vektoria u_2 ei saada samalla tavalla, vaan se täytyy laskea matriisin AA^T yksikköpituisena ominaisvektorina: $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 45 \end{pmatrix}$, ja sen ominaisarvoa 0 vastaava yksikköpituinen ominaisvektori on $u_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. Näin ollen hajotelma on

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Tarkista kertolaskulla!)