5.3 SVD

Huom.

- Vain matriisi Σ on yksikäsitteinen (kun singulaariarvot asetetaan diagonaalille suurimmasta pienimpään), muita voi löytyä useita.
- Luku $\sigma > 0$ on matriisin A singulaariarvo, jos on olemassa vektorit u ja v siten, että $Av = \sigma u$ ja $A^T u = \sigma v$.
- Jos σ on matriisin A singulaariarvo, niin σ^2 on matriisin $A^T A$ ominaisarvo.
- SVD on olemassa myös kompleksisille matriiseille, silloin transpoosin V^T sijaan tarvitaan adjungaatti V^* (kompleksikonjugaatin transpoosi) ja U ja V ovat unitaarisia, eli $V^{-1} = V^*$, $U^{-1} = U^*$.

5.3 SVD

SVD voidaan laskea seuraavien tietojen perusteella:

- Matriisin Σ diagonaalialkiot σ_j ovat matriisin $A^T A$ ominaisarvojen positiiviset neliöjuuret.
- Matriisin V sarakevektorit v_j (eli V^T:n rivit) ovat matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Matriisin U sarakevektorit u_j ovat matriisin AA^T yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Jos $\sigma_j \neq 0$, niin sarakevektori $u_j = Av_j/\sigma_j$.

Huom. Matriisit $AA^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ja $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ovat aina symmetrisiä, joten niillä on täysi määrä ortogonaalisia ominaisvektoreita. Koko SVD:n idea perustuu tähän.

5.3 SVD

Esimerkki 11 (Luentoharjoitus)

Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Ratkaisu: Matriisin $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ovat 50 ja 0, joten singulaariarvot ovat $\sigma_1 = \sqrt{50}$, $\sigma_2 = 0$. Matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit ovat $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ja $v_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

5.3 SVD

Nyt $u_1 = Av_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{5} \\ 15/\sqrt{5} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. Koska $\sigma_2 = 0$, vektoria u_2 ei saada samalla tavalla, vaan se täytyy laskea matriisin AA^T yksikköpituisena ominaisvektorina: $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 45 \end{pmatrix}$, ja sen ominaisarvoa 0 vastaava yksikköpituinen ominaisvektori on $u_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. Näin ollen hajotelma on

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Tarkista kertolaskulla!)

5.3 SVD

Alkuperäistä $n \times n$ matriisia voidaan approksimoida SVD:n avulla ottamalla k ensimmäistä saraketta matriisista U, $k \times k$ osa diagonaalimatriisin Σ vasemmasta yläkulmasta ja k ensimmäistä riviä matriisista V^T, eli ensimmäistä k:ta singulaariarvoa vastaava osuus.

Huom: Singulaariarvot oli valittu suuruusjärjestykseen, suurimmasta pienimpään.

Näin saadaan alkuperäistä matriisia approksimoiva matriisi, "jonka rangi on k".

5.3 SVD

Esimerkki 12

Äskeisen esimerkin matriisille saadaan approksimaatio

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
\approx &\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

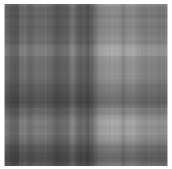
5.3 SVD

Esimerkki 13

Testikuvassa on 512×512 pikseliä, eli se voidaan esittää 512×512-matriisilla, pikselin väri antaa arvon ko. alkiolle matriisissa. Tälle matriisille voidaan tehdä singulaariarvohajotelma, ja approksimoida sitten kuvaa ottamalla hajotelmasta k:ta ensimmäistä singulaariarvoa vastaava osuus. Huomataan, että vähempikin määrä dataa riittää kuvan esittämiseen tunnistattavasti ja jopa silmämääräisesti riittävän tarkasti.

Seuraavalla sivulla kuvat, kun $k = 1, 10, 20, 50, 100$ ja 200 sekä alkuperäinen kuva.

5.3 SVD


(a) $k = 1$


(b) $k = 10$


(c) $k = 20$


(d) $k = 50$


(e) $k = 100$


(f) $k = 200$


(g) $k = 512$

5.3 SVD

Kun alkuperäisen $m \times n$-matriisin sijaan käytetään SVD:stä k ensimmäistä singulaariarvoa, tarvittavien lukujen määrä on

$$k + km + kn,$$

eli k singulaariarvoa, niistä vastaavat k ensimmäistä sarakevektoria (putuus m) matriisista U ja k ensimmäistä rivivektoria (pituus n) matriisista V^T.

Neliömatriisille $n \times n$ tämä tarkoittaa, että jos $k < n^2/(1+2n)$, niin datan määrä pieneni. Edellä käytetylle kuvalle $n = 512$, joten $k < 255$ vähentää datamäärää.

5.3 SVD

Esimerkki 14 (Luentoharjoitus)

On saatu seuraava singulaariarvohajotelma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Approksimoi kyseessä olevaa matriisia kahden ja sitten kolmen singulaariarvon avulla. Mitä saat? Miksi? Laske myös alkuperäinen matriisi.

5.3 SVD

Esimerkki 15

Käydään läpi SVD:hen perustuva hahmontunnistusdemo Matlabilla. Demon ohjeet ovat jaossa Noppa-sivulla, voit kokeilla sitä myöhemmin itsekin.

Huomattiin siis, että SVD:n avulla voidaan poimia datasta olennainen ja päästä turhasta “kohinasta” eroon, pienentäen samalla käsiteltävää datamäärää merkittävästi.

SVD:n muut sovellukset jätämme myöhempiin kursseihin, tämä kurssi päättyy tähän!