MS-A0007 Matriisilaskenta

2. Lineaarinen yhtälöryhmä matriiseilla

Nuutti Hyvönen, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

2.11.2015

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tarkastellaan esimerkkinä lineaarista yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Matriisimuodossa tämä kirjoitetaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, eli

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tulkinta 1: kumpikin yhtälöparin yhtälö kuvaa suoraa tasossa $\mathbb{R}^2$, ja mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ on suorien leikkauspiste.

Tulkinta 2: matriisi A määrittelee *kuvauksen* (= funktion) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Halutaan löytää piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, jolle $A\mathbf{x} = (1, 5)$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Yleisesti: Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä annettuina ovat $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ja halutaan ratkaista $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tulkinta 1: kukin rivi $a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$ $(1 \le k \le m)$ on yhtälö *hypertasolle* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. (Suora, kun $n = 2$; taso, kun $n = 3$.) Mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on kaikille hypertasoille (m kpl) yhteinen piste.

Tulkinta 2: Matriisi A määrittelee kuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Etsitään pistettä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, joka kuvautuu pisteeksi $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Esimerkki 1 (lasketaan luennolla)

Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ säännöllä $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ts.

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Etsi pisteen $\mathbf{u} = (2, -1)$ kuva $T(\mathbf{u})$.
b) Etsi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että $T(\mathbf{x}) = (3, 2, -5)$.
c) Löytyykö b-kohdassa useampia ratkaisuja?
d) Löytyykö pistettä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että $T(\mathbf{x}) = (3, 2, 5)$?

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tarkastellaan hieman laajempaa esimerkkiä. On annettu kolme $\mathbb{R}^3$:n vektoria:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Etsitään vektorin $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ esitys vektoreiden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ avulla.

Tarkasteltavana on siis yhtälö

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b},$$

missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ovat tuntemattomia, jotka on tarkoitus ratkaista, jos mahdollista.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Kirjoitetaan tämä yhtälöryhmäksi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases}$$

Etsitään siis toisaalta kolmen tason leikkauspisteitä.

Sama matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Mitä tiedämme ratkaisujen lukumäärästä?

Ratkaisuja voi olla

1. 0 kpl: Tasot eivät leikkaa, eli A ei kuvaa mitään vektoria b:lle.
2. 1 kpl: Tasot leikkaavat yhdessä pisteessä, eli $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ on kanta.
3. ∞ kpl: Tasot leikkaavat pitkin suoraa/tasoa, eli "A:n ydin on ei-triviaali".

Hyödyllinen käsite on A:n kuva-avaruus $\mathcal{R}(A)$, jonka alkiot ovat kaikki vektoreiden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatiot. Jos ratkaisua ei ole olemassa, tulkitaan, että $b \notin \mathcal{R}(A)$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Perinteisesti yhtälöryhmät ratkaistaan lisäämällä ja vähentämällä yhtälöitä toisistaan, jollakin kertoimilla painotettuina.

Matriisimuodossa vastaavat operaatiot voidaan tehdä yksinkertaisemmin merkinnöin.

Kirjoitetaan matriisiyhtälö *liittomatriisiksi*

$$[A \mid b] \qquad \text{eli} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Suoritetaan sitten ratkaisu *Gaussin algoritmilla*:

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases} \quad \textit{eli} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2 \quad -3 \\ + \\ \quad\;\; + \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 8x_2 + 14x_3 = 8 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \textit{eli} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 14 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \qquad\quad + \\ \;\; + \\ \mid :2 \;\; -14 \;\; -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -5 \\ 8x_2 = -20 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad \textit{eli} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 8 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \quad + \\ \mid :8 \;\; -2 \\ \end{array}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -5/2 \\ x_3 &= 2 \end{cases} \qquad \textit{eli} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ratkaisu on siis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, -5/2, 2)$.
(**Tarkista sijoittamalla!**)

Tämä piste on alkuperäisten tasojen ainoa leikkauspiste.
Se on myös piste/vektori, jonka matriisi A kuvaa pisteeksi/vektoriksi $\mathbf{b}$.
Toisaalta, nämä kertoimet ovat vektorin $\mathbf{b}$ koordinaatit, kun se ilmoitetaan kannassa $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, eli $0 \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{5}{2}\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 2 (lasketaan luennolla)

Etsi Gaussin eliminaatiomenetelmällä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

ratkaisu.

Vastaus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Gaussin eliminaatiomenetelmässä lineaarinen matriisiyhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kirjoitetaan liittomatriisina $[A \mid b]$, jota muokataan *rivioperaatioin*:

1. lisämällä (painotettu) rivi toiseen riviin
   — vastaa (painotetun) yhtälön lisäämistä toiseen
2. vaihtamalla kahden rivin paikkaa keskenään
   — vastaa yhtälöiden paikan vaihtoa
3. kertomalla yksittäinen rivi vakiolla $c \neq 0$
   — vastaa yhden yhtälön kertomista vakiolla $c \neq 0$

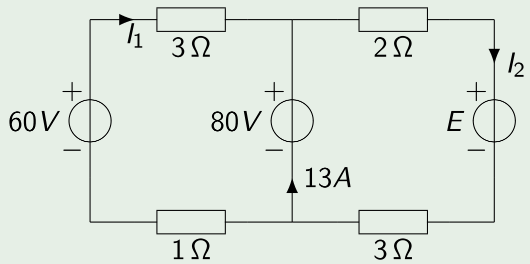
Jos lineaarisesta yhtälöstä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saadaan rivioperaatioin $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, merkitään

$$[A \mid b] \quad \sim \quad [C \mid d].$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 3 (lasketaan luennolla)

Etsi virrat I_1, I_2 ja jännite E.



2.2 Gaussin eliminaatio

Ratkaisu: Kirchhoffin virtalain mukaan virtapiirissä tiettyyn pisteeseen tulevien ja siitä lähtevien virtojen summa on sama, joten piirin yläreunan keskellä olevassa risteyksessä täytyy päteä $I_1 + 13 = I_2$ (A). Kirchhoffin jännitelain mukaan potentiaalierojen summan virtapiirin ympäri täytyy olla nolla, joten vasemman puoleisesta piiristä saadaan $60 = 3I_1 + 80 + I_1$ (V) ja oikeasta $E = -2I_2 - 3I_2 + 80$ (V), kun muistetaan, että vastuksen aiheuttama potentiaalin muutos on $U = RI$. Saadaan siis yhtälöryhmä

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = -13 \\ 4I_1 = -20 \\ 5I_2 + E = 80 \end{cases} .$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -20 \\ 80 \end{pmatrix} .$$

Gaussin eliminaatioaskeleilla tämä saadaan muotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

(Huomaa, että kahden ylimmän rivin järjestystä on vaihdettu!). Vastaus on siis $I_1 = -5A$, $I_2 = 8A$ ja $E = 40V$. Olisikin näemmä kannattanut valita virran I_1 suunta toisin päin.

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 4

Etsi yhtälöryhmän kaikki ratkaisut, kun

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 14x_4 = 7 \end{cases} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ratkaisu: Kirjoitetaan yhtälö matriisimuotoon $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Ennen kuin sijoitamme liittomatriisiin oikealle puolelle vektorin $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, suoritetaan eliminaatioaskeleet yleisellä $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & b_2 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right]$$