MS-A0004/A0006 Matriisilaskenta

3. Matriisialgebra

Nuutti Hyvönen, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

22.9.2015

3.1 Lineaarikuvaukset

Lineaariset yhtälöt ovat "vektoreille luonnollisia" yhtälöitä, joita ratkotaan mm. sähkömagnetiikassa, mekaniikassa, tietotekniikassa, taloustieteissä, ekologiassa jne.

Määritelmä 1

Funktio $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on *lineaarinen* (eli lineaarikuvaus), jos

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ kaikille $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ kaikille $c \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Huomioita

- Ehdot (i) ja (ii) voidaan lausua myös yhdessä: $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$ kaikille $c, d \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
  Edelleen (induktiolla) $T(c_1\mathbf{u_1} + \ldots + c_k\mathbf{u_k}) = c_1T(\mathbf{u_1}) + \ldots + c_kT(\mathbf{u_k})$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, kaikille $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$.
  Lineaarikuvaus säilyttää lineaarikombinaatiot.
- Mielivaltaiselle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ pätee $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
  Lineaarikuvaus pitää origon paikallaan.
- Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ määräämä kuvaus $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ on lineaarinen (määritelmä toteutuu).
- Lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ voidaan aina esittää matriisikuvauksena (nähdään esimerkin jälkeen).

3.1 Lineaarikuvaukset

Esimerkki 2 (lasketaan luennolla)

Määritellään lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä pisteiden $\mathbf{u} = (4,1)$, $\mathbf{v} = (2,3)$ ja $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (6,4)$ kuvapisteet. Totea, että $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Standardikantavektorit avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1,0,\dots,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,\dots,0,0),\\ &\vdots\\ \mathbf{e}_n &= (0,0,\dots,0,1).\end{aligned}$$

Identtinen matriisi I_n on matriisi, jonka j:s sarake (yhtä lailla rivi) on j:s standardikantavektori:

$$I_n = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Lineaarikuvaukset

Lause 3

Jokainen lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ voidaan esittää matriisikuvauksena $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, missä matriisin A sarakkeet ovat kantavektorien $\mathbf{e}_j$ kuvat:

$$A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)\end{pmatrix}.$$

Esimerkki 4

Olkoon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle $T(\mathbf{e}_1) = (5,-7,2)$ ja $T(\mathbf{e}_2) = (-3,8,0)$. Etsitään matriisi $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ siten, että $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Esimerkki 5 (jatkuu)

Koska mielivaltainen $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ voidaan esittää muodossa $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ ja koska T on lineaarinen, niin

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2)\\ &= x_1(5,-7,2) + x_2(-3,8,0) = (5x_1 - 3x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1 + 0x_2)\end{aligned}$$

eli sarakemuodossa

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Matriisi A on lineaarikuvauksen T *esitys standardikannassa*.

3.1 Lineaarikuvaukset

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

missä $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ on eräs suoran piste ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on suoran suuntavektori.

Lause 6

Lineaarikuvaus kuvaa suoran suoraksi.

Todistus.

Luentoharjoitus. □

3.1 Lineaarikuvaukset

Kaikki tason lineaarikuvaukset (eli kuvaukset $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ovat)

- venytyksiä
- peilauksia
- kiertoja
- projektioita

tai näiden yhdisteitä.

3.1 Lineaarikuvaukset

Projektiomatriiseja

Projektio x-akselille: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Projektio y-akselille: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Venytysmatriiseja

Venytys x-suunnassa kertoimella k: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Venytys y-suunnassa kertoimella k: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

3.1 Lineaarikuvaukset

Peilausten matriiseja

Peilaus x-akselin suhteen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Peilaus y-akselin suhteen: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Peilaus suoran $y = x$ suhteen: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Peilaus suoran $y = -x$ suhteen: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Peilaus origon suhteen: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3.1 Lineaarikuvaukset

Pyöritysmatriisi

Matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

pyörittää xy-tason pistettä kulman φ verran origon ympäri vastapäivään.

Esimerkki 7

Matlab-esimerkki: “Talon” lineaarikuvaukset.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Idea: Lineaarikuvausten laskutoimitusten avulla määritellään vastaavat matriisien laskutoimitukset.

Vakiolla kertominen ja summa. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Silloin $tA, A+B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ja määritellään

$$tA = \begin{bmatrix} tA_{11} & tA_{12} & \dots & tA_{1m} \\ tA_{21} & tA_{22} & \dots & tA_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ tA_{n1} & tA_{n2} & \dots & tA_{nm} \end{bmatrix},$$

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1m}+B_{1m} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2m}+B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1}+B_{n1} & A_{n2}+B_{n2} & \dots & A_{nm}+B_{nm} \end{bmatrix}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 8

$$(-2)\begin{bmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -4 & +5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & +4 & -6 \\ +8 & -10 & +12 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \\ 21 & 26 \end{bmatrix}.$$

Huom. Jotta $A+B$ olisi määritelty, on matriisien A ja B oltava samankokoiset!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoon $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Yhdistetty kuvaus on mielekäs vain muodossa $G \circ F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.
Jos F ja G ovat lineaarikuvauksia, niin $G \circ F$:kin on.

Olkoon B kuvauksen F matriisi ja A kuvauksen G matriisi. Tällöin $G \circ F$ on

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = A(B(x)) = ABx.$$

AB on *matriisitulo*.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 9

Olkoot $\underbrace{A}_{p\times n} = (\alpha_{ij})$ ja $\underbrace{B}_{n\times m} = (\beta_{ij})$. Tällöin $\underbrace{C}_{p\times m} = AB = (\gamma_{ij})$, missä

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$$

Muistisääntö: $\underbrace{C}_{p\times m} = \underbrace{A}_{p\times n}\underbrace{B}_{n\times m}$.

Huom! Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli se ei kommutoi: yleisesti $AB \neq BA$!
Huom! Tulo voi olla nolla, vaikka kumpikaan matriisi ei olisi nollamatriisi!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoot

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nyt $A + B$, AB ja BB eivät ole mielekkäitä (vastaavilla lineaarikuvauksilla menisivät dimensiot solmuun tällaisista yhdistelmistä). Kuitenkin voidaan laskea

$$BA = \begin{bmatrix} 9(-1)+8(-3) & 9(-2)+8(-4) \\ 7(-1)+6(-3) & 7(-2)+6(-4) \\ 5(-1)+4(-3) & 5(-2)+4(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & -50 \\ -25 & -38 \\ -17 & -26 \end{bmatrix}$$

ja

3.2 Matriisien laskutoimitukset

$$\begin{aligned} A^2 := AA &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)(-1)+(-2)(-3) & (-1)(-2)+(-2)(-4) \\ (-3)(-1)+(-4)(-3) & (-3)(-2)+(-4)(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 10 (lasketaan luennolla)

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Laske AB, AC, BC ja CB.

Vastaus: $AB = B$, $AC = C$ (vrt. $1 \cdot x = x$),

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad CB = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 11

Olkoon $\mathbf{x} = (-1, -2, -3) \in \mathbb{R}^3$ ja lineaarikuvauksen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ matriisi

$$A_F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} A_F\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)+3(-2)+4(-3) \\ 5(-1)+6(-2)+7(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -38 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

joten $F(-1, -2, -3) = A_F\mathbf{x} = (-20, -38)$.