3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoot

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} .$$

Nyt $A + B$, AB ja BB eivät ole mielekkäitä (vastaavilla lineaarikuvauksilla menisivät dimensiot solmuun tällaisista yhdistelmistä). Kuitenkin voidaan laskea

$$BA = \begin{bmatrix} 9(-1)+8(-3) & 9(-2)+8(-4) \\ 7(-1)+6(-3) & 7(-2)+6(-4) \\ 5(-1)+4(-3) & 5(-2)+4(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & -50 \\ -25 & -38 \\ -17 & -26 \end{bmatrix}$$

ja

3.2 Matriisien laskutoimitukset

$$\begin{aligned} A^2 := AA &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)(-1)+(-2)(-3) & (-1)(-2)+(-2)(-4) \\ (-3)(-1)+(-4)(-3) & (-3)(-2)+(-4)(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 10 (lasketaan luennolla)

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Laske AB, AC, BC ja CB.

Vastaus: $AB = B$, $AC = C$ (vrt. $1 \cdot x = x$),

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad CB = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} .$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 11

Olkoon $\mathbf{x} = (-1, -2, -3) \in \mathbb{R}^3$ ja lineaarikuvauksen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ matriisi

$$A_F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} .$$

Silloin

$$\begin{aligned} A_F\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)+3(-2)+4(-3) \\ 5(-1)+6(-2)+7(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -38 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

joten $F(-1, -2, -3) = A_F\mathbf{x} = (-20, -38)$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 12

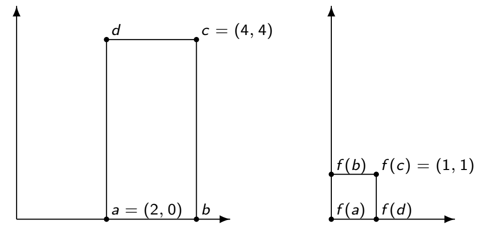
Tason suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja sen kulmat ovat vastapäivään lueteltuina $a = (2, 0)$, b, $c = (4, 4)$ ja d. Suorakulmiolle suoritetaan muunnos f, joka kuvaa sen peilatuksi neliöksi toiseen paikkaan tasossa. Suorakulmion kulmat kuvautuvat muunnoksessa siten, että $f(a) = (0, 0)$ ja $f(c) = (1, 1)$, sivut koordinaattiakelien suuntaiset ja kulmat ovat vastapäivään lueteltaessa $f(a)$, $f(d)$, $f(c)$ ja $f(b)$.

Etsi matriisi, jolla voit esittää muunnoksen, ja selvitä mikä on pisteen $(3, 1)$ kuva muunnoksessa.

Huom: Kyseessä ei ole lineaarikuvaus, mutta käyttämällä ns. homogeenisia koordinaatteja eli kirjoittamalla piste (x, y) muodossa $(x, y, 1)$ se voidaan esittää matriiseilla!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Ratkaisu: Piirretään ensin kuvat:



Muunnoksen voi toteuttaa siirtämällä kuvio ensin siten, että sen piste $(2, 0)$ tulee origoon (matriisi M_1), pienentämällä kuvio puolittamalla x-koordinaattiarvot ja jakamalla y-koordinaattiarvot luvulla 4 (matriisi M_2) ja lopulta peilaamalla suoran $x = y$ suhteen (koordinaattiarvojen vaihto keskenään, matriisi M_3).

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Jotta saisimme myös siirron (joka ei ole lineaarikuvaus tasossa!) esitettyä matriisilla, tarkastellaan pisteen (x, y) sijaan pistettä $(x, y, 1)$. Viimeinen koordinaatti on vain apuna mukana, kaksi ensimmäistä esittävät todellisuudessa tarkasteltavaa tason pistettä.

Nyt siirto $(x, y, 1) \mapsto (x - 2, y, 1)$ voidaan esittää matriisilla seuraavasti:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriisi, joka kutistaa puoleen x-suunnassa ja neljännekseen y-suunnassa, eli tekee operaation $(x, y, 1) \mapsto (x/2, y/4, 1)$ on

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/2 \\ y/4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi vielä peilaus $(x, y, 1) \mapsto (y, x, 1)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Koko operaation suorittava matriisi saadaan tekemällä nämä peräjälkeen:

$$\begin{aligned} M &= M_3 M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Piste (x, y) kuvautuu siis pisteeksi $(y/4, x/2 - 1)$ ja erityisesti pisteen $(3, 1)$ kuva on $(1/4, 1/2)$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriiseille voidaan lisäksi määritellä laskutoimitus, joka tekee $n \times m$-matriisista $m \times n$-matriisin vaihtamalla rivit ja sarakkeet.

Määritelmä 13 (Transpoosi)

Olkoon $\underbrace{A}_{n\times m} = (\alpha_{ij})$. Tällöin matriisin A transpoosi on matriisi

$$A^T = (\gamma_{ij}), \quad \text{missä } \gamma_{ij} = \alpha_{ji}$$

Yhdistetylle kuvaukselle $C = AB$ pätee $C^T = B^T A^T$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 14

Matriisi B on matriisin A *käänteismatriisi*, jos

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

missä I on sopivan kokoinen identiteettimatriisi. Käänteismatriisia merkitään A^{-1}.

Lause 15

Jos käänteismatriisi on olemassa, niin se on yksikäsitteinen.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Huom.

- Jos matriisi A on kääntyvä, niin myös matriisi A^{-1} on kääntyvä, ja
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
- Jos A ja B ovat kääntyviä matriiseja, niin myös AB on kääntyvä, ja
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
- Jos A on kääntyvä, niin myös A^T on kääntyvä, ja
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Käänteismatriisin laskeminen: Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kääntyvä. Miten lasketaan $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$? Nyt $AA^{-1} = I_n$ eli jos $\mathbf{x}_j$ on matriisin A^{-1} j:s sarake,niin saadaan n kpl lineaarisia yhtälöitä

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e_j} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Ratkotaan nämä n yhtälöä yhtä aikaa Gauss-eliminaatiolla: liittomatriisi

$$\begin{bmatrix} A & | & I_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

muunnetaan liittomatriisiksi $\begin{bmatrix} I_n & | & A^{-1} \end{bmatrix}$. Siis

$$\begin{bmatrix} A & | & I_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_n & | & A^{-1} \end{bmatrix}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 16

Lasketaan matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & | & I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 5 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 6 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -1 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & | & A^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Siten $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. (Tarkista kertolaskulla!)

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 17 (lasketaan luennolla)

Mikä on matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

transpoosi?

Esimerkki 18 (lasketaan luennolla)

Etsi matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisit.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Terminologiaa:

- $\underbrace{A}_{n\times n}$ on neliömatriisi; symmetrinen, jos $A = A^T$.
- A on säännöllinen (sanotaan myös kääntyvä), jos käänteismatriisi on olemassa, muutoin singulaarinen.
- $A = \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nn})$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{12} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

on lävistäjä- eli diagonaalimatriisi.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

- Yläkolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j > k$
- Alakolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j < k$
- A on ortogonaalinen, jos $A^{-1} = A^T$.

Esimerkki 19 (lasketaan luennolla)

Laadi 3×3-esimerkkimatriisit näistä kaikista.

3.3 Determinantti

Idea: Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determinantti $\det(A) \in \mathbb{R}$ ilmaisee miten paljon matriisia vastaava lineaarikuvaus "skaalaa&peilaa" avaruutta $\mathbb{R}^n$: Kuution

$$[0,1]^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \ \forall j: \ x_j \in [0,1]\}$$

"*n-tilavuus*" on 1 (1-til.=pituus, 2-til.=pinta-ala, 3-til.=tavallinen tilavuus, ...) ja A:n sarakkeiden virittämän "särmiön"

$$A[0,1]^n = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0,1]^n\}$$

n-tilavuus on $|\det(A)|$ (determinantin etumerkki kertoo peilautumisista).
Determinantin laskemiseen tarvitaan neljä lakia:

3.3 Determinantti

Laki 1:

$$\det(I_n) = 1.$$

Tulkinta 1: Identiteettikuvaus $x \mapsto I_n(x) = x$ ei muuta n-tilavuutta tai suuntia.

Laki 2:

$$\textit{Matriisin sarake } t-\textit{kertaistuu} \quad \Rightarrow \quad \textit{determinantti } t-\textit{kertaistuu}.$$

Tulkinta 2: "Särmiön n-tilavuus" t-kertaistuu yhden särmän t-kertaistuessa.

3.3 Determinantti

Esimerkki 20

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\S 2}{=} (-2)(3) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\S 1}{=} -6.$$

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{\S 2}{=} (6)(5)(4) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\S 1}{=} 120.$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \overset{\S 2}{=} (0) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$