

## 3.2 Matriisien laskutoimitukset

- Yläkolmiomatriisi:  $\alpha_{jk} = 0$ , kun  $j > k$
- Alakolmiomatriisi:  $\alpha_{jk} = 0$ , kun  $j < k$
- $A$  on ortogonaalinen, jos  $A^{-1} = A^T$ .

## Esimerkki 19 (lasketaan luennolla)

Laadi  $3 \times 3$ -esimerkkimatriisit näistä kaikista.

## 3.3 Determinantti

## Laki 1:

$$\det(I_n) = 1.$$

**Tulkinta 1:** Identiteettikuvaus  $x \mapsto I_n(x) = x$  ei muuta  $n$ -tilavuutta tai suuntia.

## Laki 2:

*Matriisin sarake  $t$  – kertaistuu  $\Rightarrow$  determinantti  $t$  – kertaistuu.*

**Tulkinta 2:** "Särmiön  $n$ -tilavuus"  $t$ -kertaistuu yhden särmän  $t$ -kertaistuuessa.

## 3.3 Determinantti

**Idea:** Matriisin  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  determinantti  $\det(A) \in \mathbb{R}$  ilmaisee miten paljon matriisia vastaava lineaarikuvaus "skaalaa&peilaa" avaruutta  $\mathbb{R}^n$ : Kuution

$$[0, 1]^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j : x_j \in [0, 1]\}$$

" $n$ -tilavuus" on 1 (1-til.=pituus, 2-til.=pinta-ala, 3-til.=tavallinen tilavuus, ...) ja  $A$ :n sarakkeiden virittämän "särmion"

$$A[0, 1]^n = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0, 1]^n\}$$

$n$ -tilavuus on  $|\det(A)|$  (determinantin etumerkki kertoo peilautumisista).

Determinantin laskemiseen tarvitaan neljä lakia:

## 3.3 Determinantti

## Esimerkki 20

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\S 2}{=} (-2)(3) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\S 1}{=} -6.$$

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{\S 2}{=} (6)(5)(4) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\S 1}{=} 120.$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \stackrel{\S 2}{=} (0) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

## 3.3 Determinantti

**Laki 3:** Jos matriisissa  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on (ainakin) kaksi samaa saraketta, niin

$$\det(A) = 0.$$

**Tulkinta 3:** Tällöin särmiö  $A[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$  on "litistynyt" ja sen  $n$ -tilavuus on 0.

## Esimerkki 21

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \stackrel{\S 3}{=} 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\S 3}{=} 0, \quad \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\S 3}{=} 0.$$

## 3.3 Determinantti

**Laki 4:** Olkoon  $A_j$  matriisin  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $j$ :s sarake. Kun  $A_k = B_k + C_k$  jollakin  $k \in \{1, \dots, n\}$ , niin

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & B_k + C_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & B_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{bmatrix} \\ &+ \det \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & C_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Tulkinta 4:** Särmiön yhden särmän summaus näkyy  $n$ -tilavuudessa summana.

## 3.3 Determinantti

## Esimerkki 22

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{\S 3}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\S 3, \S 1}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1, \\ \text{joten } \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= -1. \end{aligned}$$

## 3.3 Determinantti

## Esimerkki 23 (lasketaan luennolla)

Laske matriisin  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  determinantti lakien §1-§4 avulla.

**Ratkaisu:**

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\S 2}{=} a \det(I) + ab \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + bc \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + cd \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\S 1 \& \S 3}{=} ad + 0 - bc + 0, \end{aligned}$$

sillä äsken laskettiin  $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$ .

## 3.3 Determinantti

Lait 1, 2, 3, 4 ovat ristiriidattomat ja riittävät determinantin laskemiseen. Käytännössä determinantit kuitenkin lasketaan käsin

- muistamalla, että

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

- ja purkamalla matriisi  $2 \times 2$ -osiin *alideterminanttisäännöllä*

$$\det(A) = (-1)^k \sum_i (-1)^i A_{ki} \det(A^{*ki}),$$

missä  $k$  on jokin rivinnumero ja  $A^{*ki}$  matriisi  $A$ , josta on poistettu rivi  $k$  ja sarake  $i$ .

## 3.3 Determinantti

Determinanttia merkitään myös lyhyesti pystyviivoilla:

$$|M| := \det(M), \text{ kun } M \text{ on matriisi.}$$

## Esimerkki 24

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg). \end{aligned}$$

## 3.3 Determinantti

**Huom.** Myös  $3 \times 3$ -matriisin determinantille on muistisääntö:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

“alamäkeen positiivisina, ylämäkeen negatiivisina”.

## Esimerkki 25 (lasketaan luennolla)

Laske matriisin  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$  determinantti.

**Vastaus:**  $\det(A) = 42$

## 3.3 Determinantti

## Lause 26

Olkoon  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Silloin

$$\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0 \quad \text{ja} \quad \det(A^T) = \det(A).$$

## Lause 27

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Todistukset kirjassa.

## 3.3 Determinantti

### Esimerkki 28 (lasketaan luennolla)

Millä kertoimilla  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  koskevalla ehdolla matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ on käänteismatriisi?}$$

Mikä silloin on käänteismatriisi  $A^{-1}$ ?

Tarkista, että  $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ .