MS-A0007 Matriisilaskenta

4. Ominaisarvot ja -vektorit

Nuutti Hyvönen, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

18.11.2015

4.1 Määritelmät

Tarkastellaan neliömatriiseja. Kun matriisilla kerrotaan vektoria, vektorin suunta ja pituus yleensä muuttuvat. Jotkin vektorit kuitenkin säilyttävät suuntansa. Näitä sanotaan matriisin ominaisvektoreiksi.

Määritelmä 1

Jos $n \times n$-matriisille A pätee

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

jollakin vektorilla $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ja skalaarilla $\lambda \in \mathbb{C}$, niin λ on matriisin A *ominaisarvo* ja $\mathbf{x}$ sitä vastaava *ominaisvektori*.

4.1 Määritelmät

Esimerkki 2 (lasketaan luennolla)

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ovatko $\mathbf{u}$ ja$\mathbf{v}$ matriisin A ominaisvektoreita?

Vastaus: $\mathbf{u}$ on, sillä $A\mathbf{u} = -4\mathbf{u}$. $\mathbf{v}$ ei ole, sillä $A\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}\ \forall\lambda \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 3 (lasketaan luennolla)

Osoita, että 7 on matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvo.

Ratkaisu: $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.1 Määritelmät

Lause 4

Erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Muistetaan, että vektorit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ovat lineaarisesti riippumattomat, jos mitään niistä ei voida lausua lineaarikombinaationa toisista, eli yhtälön

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

ainoa ratkaisu on $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Todistus.

Taululla, vastaoletuksesta johdetaan ristiriita. □

4.1 Määritelmät

Huomioita

- reaalisia ominaisvektoreita ei aina ole olemassa
- ominaisvektori on määritelmän mukaan nollasta eroava
- ominaisarvo voi olla nolla
- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A(t\mathbf{x}) = \lambda(t\mathbf{x})$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten ominaisvektorin $\mathbf{x}$ sijaan voidaan puhua $\mathbf{x}$:n suuntaisesta *ominaissuorasta* $\{t\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\}$. (Kulkee origon kautta.)
- Jos matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvo $\lambda \neq 0$, niin vastaava ominaissuora kuvautuu itselleen ja ominaisarvo λ ilmoittaa ominaissuoran suuntaisen venytyksen.
- Jos $\lambda < 0$, niin suunnistus ominaissuoralla kääntyy, ts. venytyksen lisäksi lineaarikuvaus peilaa ominaissuoran normaalin suhteen.
- Jos $\lambda = 0$, niin kuvaus litistää ominaissuoran origoksi.

4.2 Laskeminen

Ominaisyhtälö $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ on yhtäpitävästi $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, missä I on identtinen matriisi.
Tälle löytyy nollasta eroava ratkaisu $\mathbf{x}$ täsmälleen silloin, kun $\det(A - \lambda I) = 0$ jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tarkastellaan esimerkkinä lineaarikuvausta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Muodostetaan lineaarikuvauksen *karakteristinen polynomi* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

4.2 Laskeminen

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4.$$

Haluttiin $\det(A - \lambda I) = 0$ eli $p(\lambda) = 0$:

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1-\lambda)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (1-\lambda) = \pm 2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = -1 \text{ tai } \lambda = 3. \end{aligned}$$

Nämä ovat A:n ominaisarvot. Etsitään niitä vastaavat ominaisvektorit ratkaisemalla $\mathbf{x}$ yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.2 Laskeminen

Kun $\lambda = -1$, niin yhtälö on $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ts.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ts.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eli saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

(Lineaarisesti riippuvat yhtälöt juuri kuten pitääkin, sillä halutaan ratkaisuksi ominaissuora.)

4.2 Laskeminen

Yhtälöparin ratkaisujoukko on $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1\}$. (Suora.) Vastaavasti kun $\lambda = 3$, niin ominaisyhtälö on $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja saadaan yhtälöpari

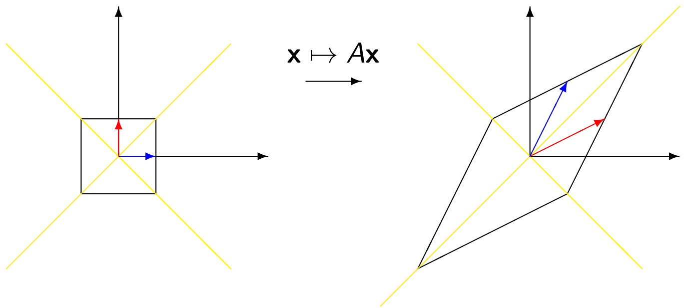
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Jälleen lineaarisesti riippuvat yhtälöt; ratkaisujoukko on suora $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1\}$.

Yhteenveto: ominaisarvoa -1 vastaava ominaissuora on $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1\}$ ja ominaisarvoa 3 vastaava ominaissuora on $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1\}$. Ominaisvektoreita ovat näillä suorilla olevat vektorit, esim. $\begin{pmatrix} 1, \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2 Laskeminen

Nämä tiedot kertovat lineaarikuvauksesta kaiken!



Kuvassa skaalataan ominaissuorien suuntaisesti kertoimilla 3 ja -1.

4.2 Laskeminen

Ominaisarvot ja -vektorit lasketaan siis seuraavasti:

- Muodosta karakteristinen polynomi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Etsi karakteristisen polynomin nollakohdat $p(\lambda) = 0$, nämä ovat ominaisarvot.
- Ratkaise kullakin ominaisarvolla λ_i sitä vastaava ominaisvektori/suora yhtälöstä $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 5 (lasketaan luennolla)

Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ 14 & -8 & 4 \\ 10 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja vastaavat ominaissuorat. Piirrä kuva.

Vastaus: ominaisarvot ovat 1, 2, ja 3, ja vastaavat ominaissuorat ovat $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$, $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ ja $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 6

Matriisin

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 1 ja -1, sillä sen määräämä lineaarikuvaus on peilaus suoran suhteen.

Esimerkki 7

Matriisilla

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ei ole reaalisia ominaisvektoreita, sillä sen määräämä lineaarikuvaus on 90 asteen pyöritys. Ominaisarvot ovat i ja $-\mathrm{i}$.

4.2 Laskeminen

Kuten edellisessä esimerkissäkin nähtiin, reaaliselle matriisille kompleksiset ominaisarvot esiintyvät konjugaattiparina.

Lause 8

Jos reaalisella matriisilla A on kompleksinen ominaisarvo $\lambda = x + y\mathrm{i}$, jota vastaa ominaisvektori $\mathbf{v}$, niin myös $\overline{\lambda} = x - y\mathrm{i}$ on ominaisarvo ja $\overline{\mathbf{v}}$ on sitä vastaava ominaisvektori.

Todistus.

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad A\overline{\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{(A\mathbf{v})} = \overline{(\lambda\mathbf{v})} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}.$ □

4.2 Laskeminen

Ominaisarvoille pätevät seuraavat tulokset:

- Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.
- Jos $\lambda \neq 0$ on kääntyvän matriisin ominaisarvo, niin $1/\lambda$ on käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvo.
- Kolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot.
- Matriisin determinantti on yhtä kuin sen ominaisarvojen tulo:

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

- Matriisin $A = (a_{ij})$ diagonaalialkioiden summa eli *jälki* (engl. trace) on yhtä kuin sen ominaisarvojen summa:

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

4.2 Laskeminen

Sovellus Markovin ketjuihin

Markovin ketjuja käytetään matemaattisina malleina useissa erilaisissa biologian, talouden, kemian, fysiikan jne. tilanteissa. Malli sopii tilanteeseen, jossa samaa koetta tai mittausta toistetaan, tulos on yksi äärellisestä joukosta vaihtoehtoja ja kunkin toiston tulos riippuu vain edellisen toiston tuloksesta:

Systeemin tilaa hetkellä k kuvaa vektori $\mathbf{x}_k$. Tiedetään, että tila seuraavalla hetkellä saadaan laskettua matriisin A avulla, eli

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k.$$

Tyypillisesti matriisin A alkiot kuvaavat siirtymätodennäköisyyksiä, joten kunkin sen sarakkeen alkioiden summa on 1.