4.2 Laskeminen

Esimerkki 6

Matriisin

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 1 ja -1, sillä sen määräämä lineaarikuvaus on peilaus suoran suhteen.

Esimerkki 7

Matriisilla

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ei ole reaalisia ominaisvektoreita, sillä sen määräämä lineaarikuvaus on 90 asteen pyöritys. Ominaisarvot ovat i ja $-\mathrm{i}$.

4.2 Laskeminen

Kuten edellisessä esimerkissäkin nähtiin, reaaliselle matriisille kompleksiset ominaisarvot esiintyvät konjugaattiparina.

Lause 8

Jos reaalisella matriisilla A on kompleksinen ominaisarvo $\lambda = x + y\mathrm{i}$, jota vastaa ominaisvektori $\mathbf{v}$, niin myös $\overline{\lambda} = x - y\mathrm{i}$ on ominaisarvo ja $\overline{\mathbf{v}}$ on sitä vastaava ominaisvektori.

Todistus.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad A\overline{\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{(A\mathbf{v})} = \overline{(\lambda\mathbf{v})} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}.$$ □

4.2 Laskeminen

Ominaisarvoille pätevät seuraavat tulokset:

- Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.
- Jos $\lambda \neq 0$ on kääntyvän matriisin ominaisarvo, niin $1/\lambda$ on käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvo.
- Kolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot.
- Matriisin determinantti on yhtä kuin sen ominaisarvojen tulo:

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$$

- Matriisin $A = (a_{ij})$ diagonaalialkioiden summa eli *jälki* (engl. trace) on yhtä kuin sen ominaisarvojen summa:

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

4.2 Laskeminen

Sovellus Markovin ketjuihin

Markovin ketjuja käytetään matemaattisina malleina useissa erilaisissa biologian, talouden, kemian, fysiikan jne. tilanteissa. Malli sopii tilanteeseen, jossa samaa koetta tai mittausta toistetaan, tulos on yksi äärellisestä joukosta vaihtoehtoja ja kunkin toiston tulos riippuu vain edellisen toiston tuloksesta:

Systeemin tilaa hetkellä k kuvaa vektori $\mathbf{x}_k$. Tiedetään, että tila seuraavalla hetkellä saadaan laskettua matriisin A avulla, eli

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k.$$

Tyypillisesti matriisin A alkiot kuvaavat siirtymätodennäköisyyksiä, joten kunkin sen sarakkeen alkioiden summa on 1.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 9

Systeemin tilaa hetkellä k kuvaa vektori $\mathbf{x}_k$. Tiedetään, että tila seuraavalla hetkellä saadaan laskettua matriisin $A = \begin{pmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{pmatrix}$ avulla: $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$. Jos alussa $\mathbf{x}_0 = [.6, .4]^T$, niin mihin tilaan systeemi päätyy lopulta?

Ratkaisu: Lasketaan A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.92$, $\mathbf{v}_1 = [3, 5]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1, -1]^T$.
Kirjoitetaan $\mathbf{x}_0$ ominaisvektoreiden kombinaationa:
$\mathbf{x}_0 = 0.125\mathbf{v}_1 + 0.225\mathbf{v}_2$.
Tällöin $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = 0.125 \cdot 1^k\mathbf{v}_1 + 0.225 \cdot 0.92^k\mathbf{v}_2 \to 0.125\mathbf{v}_1$, kun $k \to \infty$. Systeemi päätyy siis tilaan $0.125\mathbf{v}_1 = [0.375, 0.625]^T$.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 10 (lasketaan luennolla)

Erään kaupungin säätilaa voidaan kuvata yksinkertaistetusti siten, että sadepäivän jälkeen seuraavanakin päivänä sataa todennäköisyydellä 0.5 ja poutapäivän jälkeen on seuraavanakin päivänä poutaa todennäköisyydellä 0.9. Olkoon vektori

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \text{sateettoman sään todennäköisyys päivänä } k \\ \text{sateisen sään todennäköisyys päivänä } k \end{bmatrix}.$$

Muodosta matriisi A, jonka avulla saat laskettua säävektorin seuraavalle päivälle, eli $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.
Miten suurella todennäköisyydellä satunnaisena päivänä sataa?

4.2 Laskeminen

Ratkaisu:

Sateen ja aurinkoisen sään todennäköisyys päivänä $k+1$ saadaan siis päivän k todennäköisyyksistä seuraavasti:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

Rajakäyttäytymisen $k \to \infty$ selvittämiseksi lasketaan A:n ominaisarvot ja -vektorit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mathrm{Tr}(A) = 1.4 \\ \lambda_1\lambda_2 &= \det(A) = 0.4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.4$$

4.2 Laskeminen

$\lambda_1 = 1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 0.4$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ominaisvektorit ovat riippumattomat, joten kirjoitetaan $\mathbf{x}_0$ muodossa $\mathbf{x}_0 = w_1\mathbf{v}_1 + w_2\mathbf{v}_2$, jolloin saadaan

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = w_1 \cdot 1^k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + w_2 \cdot 0.4^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to w_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kun } k \to \infty.$$

4.2 Laskeminen

Vielä pitää selvittää w_1. Koska alkutilan $\mathbf{x}_0$ alkioiden täytyy summautua ykköseen (tn:llä 1 joka sataa tai paistaa), alkutilasta riippumatta saadaan

$$w_1\mathbf{v}_1 + w_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0 = [x_{0,1}, x_{0,2}]^T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 6w_1 = x_{0,1} + x_{0,2} = 1 \quad \Rightarrow w_1 = \frac{1}{6}.$$

Näin ollen

$$\mathbf{x}_k \to \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \text{kun} \quad k \to \infty,$$

joten satunnaisena päivänä paistaa todennäköisyydellä $\frac{5}{6}$ ja sadetta on luvassa todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 11 (lasketaan luennolla)

Etsi seuraavien dynaamisia systeemejä kuvaavien matriisien A ja A^∞ ominaisarvot ja ominaisvektorit. Mistä tiedetään, että matriisin A^{100} esittämä lineaarikuvaus on jo hyvin lähellä matriisin A^∞ lineaarikuvausta?

$$A = \begin{pmatrix} .6 & .2 \\ .4 & .8 \end{pmatrix}, \quad A^\infty = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

4.3 Kertaluvut

Määritelmä 12

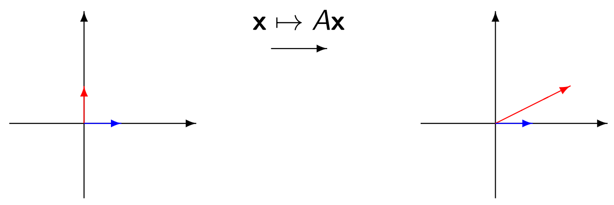
Polynomin $\det(A - \lambda I)$ juuren kertaluku on kyseisen ominaisarvon λ *algebrallinen kertaluku* $m_a(\lambda)$. Ominaisarvon λ *geometrinen kertaluku* $m_g(\lambda)$ on sitä vastaavan ominaisavaruuden dimensio, eli lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien lukumäärä.

Esimerkki 13

Matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ karakteristinen polynomi on $(1-\lambda)^2$, joten ominaisarvon $\lambda = 1$ algebrallinen kertaluku on $m_a(1) = 2$. Sitä vastaavat ominaisvektorit toteuttavat $x_2 = 0$, joten on vain yksi ominaissuora $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ja geometrinen kertaluku on siis $m_g(1) = 1$.

4.3 Kertaluvut

Piirretään kuva esimerkin tilanteesta:



Vain x_1-akseli pysyy siis paikallaan, toista muuttumatonta suoraa ei ole. Tässä tapauksessa ominaisarvot ja -vektorit **eivät** kerro kaikkea kuvauksesta!

4.3 Kertaluvut

Esimerkki 14 (lasketaan luennolla)

Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut.

Ratkaisu: Lasketaan ominaisarvot karakteristisen polynomin nollakohtina: $\det(A - \lambda I) = ... = (3-\lambda)^2(\lambda+1) = 0$, joten ominaisarvon $\lambda = 3$ algebrallinen kertaluku on 2 ja ominaisarvon $\lambda = -1$ on 1.

Lasketaan sitten ominaisvektorit:

4.3 Kertaluvut

Kun $\lambda = -1$, yhtälö on $(A + 1I)\mathbf{x} = 0$, ja saadaan $x_2 = 0$ ja $x_3 = -x_1$, eli ominaissuora $\{t(1,0,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Näin ollen geometrinen kertaluku on $m_g(-1) = m_a(-1) = 1$.

Arvolle $\lambda = 3$ saadaan yhtälöstä $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$ ehdot $x_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_3 = x_1$, joten tätä ominaisarvoa vastaten saadaankin ominaistaso

$$\{s(1,0,1) + t(0,1,0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(Lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit esim. $(1,0,1)$ ja $(0,1,0)$). Geometrinen kertaluku on siis $m_g(3) = 2$.

4.3 Kertaluvut

Huom 1. Geometrinen kertaluku ei koskaan voi olla suurempi kuin algebrallinen kertaluku, $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Huom 2. Matriisit A ja B ovat *similaariset*, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi S, että $S^{-1}AS = B$. Similaaristen matriisien A ja B karakteristiset polynomit ovat samat, ja niillä on siis samat ominaisarvot.