Matriisilaskenta

0 Piste tasossa ja avaruudessa

0.1 Merkintätapoja ja määritelmiä

Piste tasossa : Kaksi komponenttia

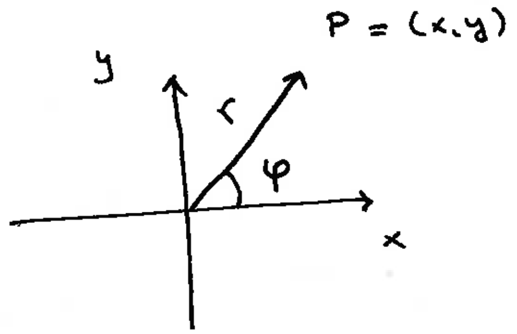
Piste avaruudessa : Kolme komponenttia

Tason esitystapoja : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

Koordinaatisto : $\{ 0, \underline{i}, \underline{j} \}$; origo ja kantavektorit

Huomaa! Origon valinta on mielivaltainen.

$\mathbb{R}^2$:



Käyräviivainen koordinaatisto: napakoordinaatisto

Piste $P = (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, missä jälkimmäinen esitys on napakoordinaattiesitys. Voidaan siis merkitä :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) = \{ (r,\varphi) \mid r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi) \}$$

$\mathbb{R}^2$:ssa origo on yksikäsitteinen, piste $(0,0)$.

Jos kertolasku ja yhteenlasku on määritelty sopivasti, xy-taso eli $\mathbb{R}^2$ voidaankin tulkita kompleksitasoksi $\mathbb{C}$.

Avaruudessa : $\mathbb{R}^3$, lukuisia käyräviivaisia koordinaatistoja, lieriö- ja pallokoordinaatistot tekniikassa.

Matriisilaskenta

1 Vektorit

1.1. Vektorit ja lineaariyhdistelyt

Määritelmä 1.1.1

Pysty- eli sarakevektori v: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

missä v_1, v_2 ovat v:n komponentit.

Määritelmä 1.1.2 Yhteenlasku

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$: $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$

Vektoreiden erotus edellyttää skalaarilla kertomista:

Määritelmä 1.1.3 $2v = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$, $-w = \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix}$

Huomaa, että $v - v = v + (-1)v = 0$,
missä 0 on vektori, jonka kaikki komponentit ovat nollia.

Määritelmä 1.1.4 Lineaariyhdistely

Vektoreiden v ja w lineaariyhdistely on lauseke muotoa $cv + dw$, missä c ja d ovat skalaareja.

Olkoon joukko $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (vektoreita) ja vastaavasti $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ (skalaareja).
Eräs lineaariyhdistely on tällöin

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i .$$

Mies kadulta kysyy: "Tämä ei ole koulun vektori, otaksun?"

Matriisilaskun vektorit eroavat ns. fysikaalisista vektoreista s.e. origo on aina kiinnitetty ja sitä esittää jo edellä nähty nollavektori.

Havainnollinen geometria: Vektorin komponenttien lukumäärä on sen dimensio.
Havainnollinen geometria käsittelee vektoreita, joiden komponenttien lukumäärä = 1, 2, 3, mutta osoittautuu, että on mielekästä tarkastella mielivaltaisia dimensioita.

Olkoot u, v, w avaruuden vektoreita. Lineaariyhdistelyillä

a) cu

b) $cu + dv$

c) $cu + dv + ew$

on geometriset tulkinnat, kun tarkastellaan kaikkien lineaariyhdistelyiden joukkoa.

Saadaan a) suora, b) taso, c) avaruus (3D).

1.2 Vektorin pituus ja sisätulo

Määritelmä 1.2.1 Piste- eli sisätulo (eli skalaaritulo)

Vektoreiden $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ja $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ sisätulo on luku

$v_1 w_1 + v_2 w_2$.

Jos sovitaan, että vektori $\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
niin samaistus $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \hat{=} v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j}$ on houkutteleva.
Tällöin sisätulo voidaan merkitä tutusti

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Dimensiossa n : $v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$.

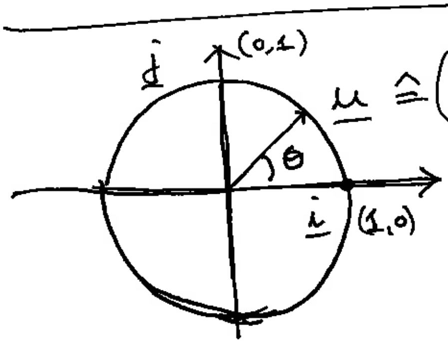
Määritelmä 1.2.2 Vektorin pituus eli normi

Mielivaltaisen vektorin v pituus $\|v\|$ määritellään sisätulon avulla: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$.

Määritelmä 1.2.3 Yksikkövektori

Yksikkövektorin pituus on $= 1$, tällöin $u \cdot u = 1$.
Vektorin v suuntainen yksikkövektori on $v/\|v\|$.

Esimerkki 1.2.4 Yksikköympyrä tasossa



$$\underline{u} \hat{=} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{i} = \cos\theta$$

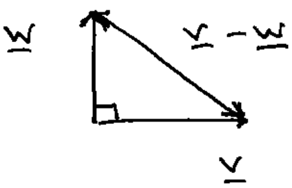
$$\underline{u} \cdot \underline{j} = \sin\theta$$

Vektoreiden välinen kulma

Määritelmä 1.2.5 Vektoreiden kohtisuoruus

Kaksi vektoria v ja w ovat keskenään kohtisuorassa, jos niiden sisätulo on nolla eli $v \cdot w = 0$.

Onko määritelmä mielekäs? Olkoot v ja w kohtisuoria, jolloin Pythagoraan lauseesta $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v - w\|^2$



eli $(v_1^2 + v_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2$

$$\iff 0 = -2v_1w_1 - 2v_2w_2$$

$$\iff 0 = v_1w_1 + v_2w_2 = v \cdot w$$

Esimerkin 1.2.4 avulla havaitaan, että yksikkövektoreille pätee aina: $\underline{u} \cdot \underline{U} = \cos\theta$, mistä $|\underline{u} \cdot \underline{U}| \leq 1$.

Kosinikaava: $$\frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|} = \cos\theta.$$

Kosinikaavan avulla saadaan kaksi merkittävää epäyhtälöä:

- **Schwarzin epäyhtälö**: $|\underline{v} \cdot \underline{w}| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$
- **Kolmioepäyhtälö**: $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$

Esimerkki 1.2.6

$$\begin{aligned}(\underline{v} + \underline{w}) \cdot (\underline{v} + \underline{w}) &= \underline{v} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{w} \cdot \underline{v} + \underline{w} \cdot \underline{w} \\ &= \underline{v} \cdot \underline{v} + 2\underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{w} \cdot \underline{w} \\ &= \|\underline{v}\|^2 + 2\underline{v} \cdot \underline{w} + \|\underline{w}\|^2 \\ &\leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 \\ &= (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2\end{aligned}$$

SIVUASKEL: Kompleksiluvut

Tiedetään, että reaalikertoimisen polynomin juuret voivat olla kompleksisia. Ominaisarvoteoria antaa luonnollisen geometrisen perustelun juurien kompleksisuudelle.

Formaalisti kompleksilukujen joukko $\mathbb{C} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, jonka alkioille määritellään yhteenlasku ja kertolasku kaavoilla:

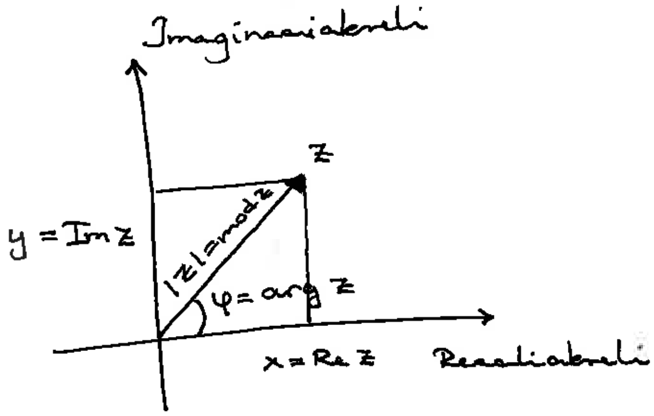
$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (x_1, y_1) \\ z_2 = (x_2, y_2) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{array}$$

Kertolaskun määritelmästä seuraa:

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0)$$

Sovitaan merkintä $i = (0,1)$, jolloin $z = (x,y) = (x,0) + (0,y)$
$= (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = \cancel{z} + iy = x + iy$, jolloin edellä ollut lasku voidaan kirjoittaa muodossa $i^2 = -1$.

Määritelmästä seuraa, että kompleksiluvut voidaan esittää myös napakoordinaattien avulla.



	$z = x + iy$
Reaaliosa:	$\mathrm{Re}\, z = x$
Imaginaariosa:	$\mathrm{Im}\, z = y$
Liittoluku eli konjugaatti:	$\bar{z} = x - iy$
Itseisarvo eli moduli:	$\lvert z \rvert = \mathrm{mod}\, z = \sqrt{x^2 + y^2}$
Napakulma eli argumentti:	$\arg z = \varphi$

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}, \text{ valitsemalla oikea neljännes}$$

Huomaa! $z_1 z_2 \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$

Potenssit ja juuret

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Siis: $\begin{cases} \mathrm{mod}(z_1 z_2) = \mathrm{mod}\, z_1 \, \mathrm{mod}\, z_2 \\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}$

Ja välittömästi käänteisluvulle $(z \neq 0 \in \mathbb{C})$

$$\begin{cases} \mathrm{mod}\, \frac{1}{z} = \frac{1}{\mathrm{mod}\, z} \\ \arg \frac{1}{z} = -\arg z \end{cases}$$

$\frac{1}{z}$ on kompleksiluku, joten sillä on muoto $\frac{1}{z} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} + i\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{z}$.

Kertolaskun määritelmästä seuraa: $z\bar{z} = |z|^2$, siispä

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} \quad \text{eli } z = x + iy \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Juhlittu tulos on de Moivren kaava: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$
$= \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Olkoon $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Määritetään $w = \sqrt[n]{z}$.

Merkitään $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, missä ρ ja ψ ovat tuntemattomat.

Yhtälö: $w^n = z$ eli $\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin n\varphi)$

eli $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ mistä $\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \quad (\geq 0) \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \end{cases}$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Juuria on siis n kpl: $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, jotka sijaitsevat tasavälisesti ympyrällä, jonka keskipiste on origossa ja säde on $\sqrt[n]{r}$.

Toisin: $w_k = w_0 \varepsilon_n^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \quad \varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

1.3 Matriisi

Edellä on jo havaittu, että avaruus tulee viritettyä kolmella vektorilla eli kolmen vektorin kaikki lineaariyhdistelyt tuottavat kaikki avaruuden pisteet eli vektorit.

Huomaa, että ilmeisesti jotain on vaadittava valituilta vektoreilta.

Olkoon $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, jolloin

lineaariyhdistelyt ovat muotoa $cu + dv + ew$:

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{pmatrix}$$

Kirjoitetaan laskutoimitus matriisimuotoon: Ax, tulo, missä A on vektoreiden u, v, w muodostama matriisi ja x on vektori, jonka komponentit ovat skalaarit c, d, e.

Matriisi-vektoritulo: $Ax = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = cu + dv + ew$

Edellinen esimerkki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{pmatrix}$$

Vaihtoehtoinen laskutoimitus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,0)\cdot(c,d,e) \\ (-1,1,0)\cdot(c,d,e) \\ (0,-1,1)\cdot(c,d,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{pmatrix}$$

– rivien ja vektorin sisätulot

Yhtälöryhmä

Abstrakti esitys : $Ax = b$

a) Jos A ja x tunnetaan, b on A:n sarakkeiden lineaariyhdistely

b) Jos A ja b tunnetaan, x on yhtälöryhmän ratkaisu.

$$Ax = b : \begin{cases} x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_1 + b_2 \\ x_3 &= b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned},$$

mutta ratkaisuvektori x on selvästikin muotoa $x = Sb$,

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad S \text{ on } A\text{:n käänteismatriisi.}$$

<u>Yleisesti:</u> Yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisu $x = A^{-1}b = Sb$, jos A^{-1} on olemassa.

Lineaarinen riippumattomuus ja riippuvuus

<u>Määritelmä 1.3.1</u> Lineaarinen riippumattomuus

Olkoot $a_1, \ldots, a_n$ vektoreita ja $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tuntemattomia skalaarija. Vektorit a_i ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälön

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i = 0$$

ainoa ratkaisu on $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$. Jos muita ratkaisuja on olemassa, ovat vektorit lineaarisesti riippuvia.

Tulkinta:

Jos A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. A on säännöllinen.

Muutoin A on singulaarinen.

"Ei vaan A", sanoi Ihaa ankarasti. "Etkö kuule, vai luuletko olevasi oppineempi kuin Risto Reipas?"

"Aivan niin", sanoi Nasu. "En", sanoi hän hyvin nopeasti. Ja hän tuli vielä lähemmäksi.

"Risto Reipas sanoi että se on A ja silloin se on A — ellei joku tallo sen päälle", lisäsi Ihaa tuimasti.

Nasu hypähti nopeasti taaksepäin ja haisteli orvokkejaan.

"Tiedätkö mitä A tarkoittaa, pikku Nasu?"

"En tiedä, Ihaa."

"Se tarkoittaa Tietoa, se tarkoittaa Oppia, se tarkoittaa kaikkea sitä mitä sinulla ja Puhilla ei ole. Sitä A tarkoittaa."

"Oo", sanoi Nasu taas. "Sitäkö se tarkoittaa?" hän selitti nopeasti.

"Kuten sanoin. Tässä Metsässä kuljetaan eestaas ja sanotaan: 'Ihaa se vain on, mitäpä hänestä'. Kulkevat sinne tänne ja sanovat 'Hahhaa!' Mutta tietävätkö he mitään A:sta? Eivät tiedä. *Heille* se on vain kolme keppiä. Mutta Oppineille — huomaa tämä, pikku Nasu — Oppineille, joka ei tarkoita Puheja eikä Nasuja, se on ihana ja ihmeellinen A. Ei jotakin", hän lisäsi, "jonka päälle kuka tahansa voi tulla *hönkimään*."

Nasu hypähti hermostuneesti taaksepäin ja katsoi ympärilleen apua etsien.

"Siinä onkin Kani", hän sanoi iloisena. "Terve Kani."

Kani käveli tärkeänä heidän luokseen, nyökkäsi Nasulle ja sanoi "Kas Ihaa", sellaisella äänellä jota seuraa "Näkemiin" muutaman minuutin kuluttua.

"Minun piti vain kysyä sinulta erästä asiaa, Ihaa. Mitä Risto Reipas tekee aamupäivällä?"

"Mitä näet tässä edessäni?" kysyi Ihaa keppien takaa.

"Kolme keppiä", sanoi Kani heti.

"Siinä näet", sanoi Ihaa Nasulle. Hän kääntyi Kanin puoleen. "Nyt vastaan kysymykseesi", hän sanoi juhlallisesti.

"Kiitos", sanoi Kani.

"Mitä Risto Reipas tekee aamupäivällä? Hän oppii. Hän opiskelee. Hän

2 YHTÄLÖRYHMÄN RATKAISUSTA

2.1 Vektorit ja yhtälöryhmät

Havainnollisena geometriassa:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$; kahden suoran leikkaus yhdessä pisteessä

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$; kolmen tason leikkaus yhdessä pisteessä

Yhtälöryhmille on siis mitä ilmeisimmin joko 0, 1 tai äärettömän monta ratkaisua.

Matriisimuodossa $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Toinen tulkinta ratkaisulle: kerroinmatriisin sarakkeiden lineaariyhdistely, missä skalaarit on etsittävä

Huomaa, että ratkaisujen mahdolliset lukumäärät ovat samat!

Maailman helpoin tehtävä: $Ix = b$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Matriisi I on identiteettikuvaus, pätee $Ix = x$ kaikille x.

Maailman toiseksi helpoin tehtävä: Kolmiomatriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.1 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Havaintoja:

a) yhtälöiden järjestyksellä ei ole väliä

b) yhtälön kertominen puolittain tai niiden yhteenlasku ei muuta ratkaisua

<u>Tavoite:</u> Gaussin eliminaatio

Laaditaan algoritmi, joka saattaa alkuperäisen tehtävän yläkolmiomuotoon.

<u>Rivioperaatio</u>: Kerrotaan eliminoitavan tuntemattoman riviä skalaarilla ja lasketaan kaksi yhtälöä yhteen. Skalaari valitaan s.e. summautuvassa yhtälössä eliminoitavan tuntemattoman kerroin $= 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \begin{matrix} \rfloor^{-3} \\ \swarrow \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

Merkintä $\rfloor^{-3}$ tarkoittaa: $-3(x-2y) + 3x + 2y = -3 \cdot 1 + 11$

$$\iff \quad 8y = 8$$

1. tuntematon eli x ei ole enää mukana yhtälössä eli se on eliminoitu.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

Luku 1 on ns. tukialkio (engl. pivot). Haluamme korvata luvun 3 nollalla, joten skalaariksi valitaan $-\left(\frac{3}{1}\right)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right. \quad -2 \quad 1 \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \end{array} \quad -1$$

$$\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{4} & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Huomaa, että tukialkiot voi lukea yläkolmiomatriisin lävistäjältä!

Alkuperäinen tehtävä $Ax = b$ on saatettu Gaussin algoritmilla muotoon $Ux = c$.

<u>Yleinen tapaus</u>

(i) Yhdensuuntaiset suorat

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 11 \end{array} \quad -3 \qquad \begin{array}{ccc} \underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & \underline{0} & 8 \end{array}$$

Huom! 0 ei voi olla tukialkio.

Viimeinen yhtälö on epätosi, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

(ii) Päällekkäiset suorat

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{array} \quad -3 \qquad \begin{array}{ccc} \underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Viimeinen yhtälö on tosi, y:n voi valita vapaasti.

(iii) Järjestyksen vaihto

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} \underline{3} & -2 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 4 \end{array}$$

2.2. Eliminaatio matriiseilla

Sovitaan seuraavasta notaatiosta:

$\underset{m\times n}{A} = (\alpha_{ij})$, missä m on rivien ja n sarakkeiden lukumäärä, alkio α_{ij} on rivillä i, sarakkeessa j.

Lisäksi $\underset{m\times n}{A} = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n)$, missä a_i ovat sarakkeet, ja kaikille $\underset{m\times 1}{a_i}$.

Matriisivektoritulo saa kaksi muotoa:

$$Ax = c \;, \quad \underset{m\times 1}{c} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \quad \text{(sarakkeiden lineaariyhdistely)}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (\text{rivin}_i \text{ ja vektorin sisätulo})$$

<u>2×2</u>:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

<u>Eliminaatioaskel</u>:

$$Ax = b \;; \quad \begin{matrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$$

Tarkastellaan saraketta $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$: Eliminaatioaskeleen toteuttava matriisi on $E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

; Jos lisäksi $E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ eli ensimmäisen sarakkeen eliminointi on suoritettu.

Yhdistettynä: $E_{31}(E_{21}a_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Määritellään matriisien tulo:

<u>Määritelmä 2.2.1</u> $\underset{m\times n}{A} \underset{n\times p}{B} = (Ab_1 \; Ab_2 \; \dots \; Ab_p) = \underset{m\times p}{C}$

Vaihtoehtoisesti: $\underset{m\times k}{C} = (\gamma_{ij})$, $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$

Edellä saatu yhdistetty laskutoimitus on siis $E_{31}E_{21}a_1$.

$$\tilde{E} = E_{31}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{E}a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Lause 2.2.2</u> Matriisien tulo on assosiatiivinen $A(BC) = (AB)C$ mutta ei vaihdannainen $AB \neq BA$ (yleisesti).

Huomaa! $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ (yleisesti)

<u>Permutaatiomatriisi</u>:

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_{23}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

P_{23} vaihtaa oikean puoleisen matriisin rivit 2 ja 3 tulossa $P_{23}A$.

2.4 Laskulait

Yhteenlasku:

$$A + B = B + A \qquad \text{(vaihdannaisuus)}$$

$$c(A + B) = cA + cB \qquad \text{(osittelulaki)}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \text{(liitännäisyys)}$$

Tulo: ei yleensä vaihdannainen

$$C(A+B) = CA + CB \qquad \text{(vasen osittelulaki)}$$

$$(A+B)C = AC + BC \qquad \text{(oikea osittelulaki)}$$

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(liitännäisyys)}$$

Neliömatriiseille $\underset{m \times m}{A}$ on voimassa matriisien tulon eksponenttilait:

$$A^p = \underbrace{AA\ldots A}_{p \text{ kpl}}$$

$$A^p A^q = A^{p+q}$$

$$(A^p)^q = A^{pq}$$

Ositetut matriisit (eli lohkomatriisit)

Idea: Laskulait ovat voimassa, jos matriisien laskutoimitukset suoritetaan lohkojen (alimatriisien) avulla.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} ; \quad = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} I\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + I\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ I\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + I\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

Vastaavasti matriisien tulolle:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots \\ B_{21} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & \dots \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & \dots \end{pmatrix}$$

Kaksi tärkeää esimerkkiä:

a)
$$AB = \underbrace{(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)}_{\text{ositus sarakkeittain}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{\text{ositus riveittäin}} = (a_1 b_{1j} + a_2 b_{2j} + \dots + a_n b_{nj})$$

b) Lohkoeliminaatio:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

2.5 Käänteismatriisi

Määritelmä 2.5.1 Matriisi $\underset{n \times n}{A}$ on säännöllinen, jos on olemassa matriisi A^{-1} s.e. $A^{-1}A = I$ ja $AA^{-1} = I$.

Havaintoja:

(i) A^{-1} on olemassa, jos ja vain jos eliminaatiossa löytyy n tukialkiota

(ii) A^{-1} on yksikäsitteinen

(iii) Jos A on säännöllinen, yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisu on yksikäsitteinen $x = A^{-1}b$

(iv) Jos on olemassa $x \neq 0$ s.e. $Ax = 0$, niin A ei ole säännöllinen

(v) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Huomaa! $ad - bc \neq 0$

(vi) lävistäjä- eli diagonaalimatriisin käänteismatriisi on olemassa, jos lävistäjäalkiot ovat eri suuria kuin nolla.

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & O \\ & d_2 & \\ O & \ddots & d_n \end{pmatrix} \; ; \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & O \\ & 1/d_2 & \\ O & \ddots & 1/d_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Tulon käänteismatriisi: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)(AB)^{-1} = \underbrace{A\underbrace{BB^{-1}}_{=I}A^{-1}}_{=I} = I$$

Gaussin-Jordanin menettely käänteismatriisin määrittämiseksi

Idea: Etsi $\underset{n\times n}{\overline{X}}$ s.e. $\underset{n\times n}{A}\overline{X} = \underset{n\times n}{I}$.

Sarakkeittain $A(x_1 \ldots x_n) = (e_1 \ldots e_n)$, missä e_i:t ovat luonnolliset kantavektorit.

Havainto: Eliminaatio ratkaisee n yhtälöryhmää yhtäaikaa!
Edellisen nojalla $\overline{X} = A^{-1}$, jos olemassa.

$$\begin{matrix} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \downarrow \tfrac{1}{2} \qquad \begin{matrix} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3/2} & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \downarrow \tfrac{2}{3}$$

$$\begin{matrix} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3/2} & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{4/3} & 1/3 & 2/3 & 1 \end{matrix}$$

Jordan: Vaihdetaan eliminaation suuntaa!

Siinä missä eliminaatio alaspäin eliminoi tuntemattomia, eliminaatio ylöspäin sijoittaa tuntemattomien arvoja edellisiin yhtälöihin.

Kaksi vaihtoehtoa : a) jaetaan vasemmalla lävistäjälle identiteetti, ja sen jälkeen eliminoidaan ylöspäin

b) ensin ylöspäin eliminointi, sitten normeeraus

Kirjassa valittu b) : Jatketaan esimerkkiä

$$\begin{array}{cccccc} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3/2} & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{4/3} & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \quad \uparrow 3/4 \quad \uparrow 2/3$$

$$\begin{array}{cccccc|l} \underline{2} & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 & : 2 \\ 0 & \underline{3/2} & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 & : 3/2 \\ 0 & 0 & \underline{4/3} & 1/3 & 2/3 & 1 & : 4/3 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \; \underbrace{\begin{array}{ccc} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}}_{A^{-1}}$$

Gauss - Jordan :

$$A^{-1}[A \; I] = [I \; A^{-1}]$$

Terminologiaa :

(i) A on symmetrinen : $A = (\alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$; A^{-1} on symm.

(ii) A on tridiagonaalimatriisi (kolme lävistäjää)

Huomaa! A^{-1} ei ole tridiagonaalimatriisi.

(iii) Tukialkioiden tulo $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 \neq 0$.

Luku 4 on A:n determinantti.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.6 LU-Hajotelma

Alakolmiomatriisin käänteismatriisi on alakolmiomatriisi. Välittömästi kaikkien eliminaatiomatriisien E_{ij} käänteismatriisit ovat myös alakolmiomatriiseja.

Olkoon e_i luonnollinen kantavektori ja samalla pystyvektori. Kirjoitetaan rivi, jonka i:s alkio on 1, notaatiolle e_i^T.

Voimme siis kirjoittaa $E_{ij} = I + l_{ij} e_i e_j^T$, $i > j$.

Ällistyttävästi $E_{ij}^{-1} = I - l_{ij} e_i e_j^T$, $i > j$.

Onhan

$$(I + l_{ij} e_i e_j^T)(I - l_{ij} e_i e_j^T)$$

$$= I + \underbrace{l_{ij} e_i e_j^T - l_{ij} e_i e_j^T}_{=0} - \underbrace{l_{ij}^2 e_i \underbrace{e_j^T e_i}_{=0} e_j^T}_{=0} = I \quad (!)$$

Pätee siis: $\underset{3\times3}{A}$

$$(E_{32} E_{31} E_{21})^{+1} A = U \iff A = (E_{32} E_{31} E_{21})^{-1} U$$

$$= E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1} U$$

$$= LU$$

Mutta, ei tässä vielä kaikki!

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \;\; \downarrow -\tfrac{1}{2} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \;\; \downarrow -\tfrac{2}{3} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{matrix}}_{=U}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminaatiomatriisien käänteismatriisien tulo sijoittaa eliminaation kertoimet "oikeille" paikoille, vain merkki vaihtuu.

U voidaan kirjoittaa tulona:

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \cdots \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= D\hat{U}$$

A:lle voidaan siis laskea myös hajotelma: $A = LDU$.
Tässä muodossa on implisiittisesti oletettu, että U:n lävistäjällä on pelkkiä ykkösiä.

Yhtälöryhmän ratkaisu hajotelmalla: $Ax = b$

1 Hajotelman muodostaminen: $A = LU$

2 Ratkaisu: $LUx = b$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b & \text{"eteenpäin"} \\ Ux = y & \text{"taaksepäin"} \end{cases}$$

Laskennallinen vaativuus: $A_{n\times n}$:n hajotelman laskeminen

1. askel vaatii n^2 tuloa ja n^2 vähennyslaskua
2. " " $(n-1)^2$ " " $(n-1)^2$ "

Kertolaskuja on siis $n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Kun n kasvaa, suurin termi on $\frac{1}{3}n^3$.

Kolmiomatriisin yhtälöryhmän ratkaisu vaatii n^2 kertolaskua.

Opetus: Kaikki aika kuluu hajotelmaan!

Erikoistapaus: Nauhamatriisit

Oletetaan, että matriisilla on w nollasta eroavaa lävistäjää päälävistäjän ylä- ja alapuolella.

Hajotelmalle: $\frac{1}{3}n^3 \longrightarrow nw^2$

Kolmioille: $n^2 \longrightarrow 2nw$

Opetus: Matriisin rakenne on syytä tuntea!

2.7 Transpoosi

Olemme jo tottuneesti luoneet rivejä sarakkeista: $\underset{n\times 1}{u}$, $\underset{1\times n}{u^T}$

<u>Määritelmä 2.7.1</u> Transpoosi

Transpoosi vaihtaa matriisin rivit ja sarakkeet keskenään.

Nasevasti $$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Laskulait:
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Huomaa! A:n transpoosi on säännöllinen, jos ja vain jos A on säännöllinen.

<u>Sisätulo</u>: Vihdoin voimme kirjoittaa: $v \cdot w = v^T w$

Sovitaan $\underset{1\times n\; n\times 1}{v^T w} = \underset{1\times 1}{c}$ (skalaari).

<u>Symmetria</u> saa sekin nasevan esityksen: $A^T = A$

eli $a_{ij} = a_{ji}$.

Mielenkiintoista: $A = LDU$ ja siis
$$A^T = U^T D^T L^T.$$

Jos A on symmetrinen, saadaan identiteetit

$L = U^T$, $D = D^T$, $U = L^T$ eli $A = LDL^T$.

Symmetrisen matriisin hajotelma on symmetrinen!

Määritelmä 2.7.2 Permutaatiot

Permutaatiomatriisin rivit ovat I:n rivit toisessa järjestyksessä.

Käänteispermutaatio on permutaatio eli P^{-1} on permutaatio.
Lisäksi: $P^{-1} = P^T$.

Matriisit, joiden käänteismatriisit ovat niiden itsensä transpooseja, ovat ortogonaalisia.

$PA = LU$: LU-hajotelman yhteydessä vaikenimme tilanteesta, jossa rivien vaihto on tarpeen.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{matrix} \; -2 \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{matrix} \; -3$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = PA, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hajotelma $PA = LU$ on olemassa kaikille säännöllisille matriiseille.

3 Determinantti

<u>Määritelmä 3.1</u> Determinantti on pinta-ala, tilavuus tai yleistetty tilavuus.

Determinantti on reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty vain neliömatriiseille.

Formaaleja määritelmiä on lukuisia, joista yksi on jo tuttu:

<u>Määritelmä 3.2</u> $\text{Det}(A) = |A| =$ tukialkioiden tulo $= \det A$

Tarkastellaan seuraavana determinantin ominaisuuksia:

1) $\det I = 1$

2) Rivinvaihto vaihtaa determinantin merkin.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

3) Determinantti on lineaarinen rivin suhteen:

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Riittää formaaliin määritelmään

4) Jos kaksi riveistä on yhtäsuuria, on $\det A = 0$.

5) Rivioperaatio ei muuta determinantin arvoa.

6) Rivi nollia nollaa determinantin.

7) Kolmiomatriisin determinantti on lävistäjien tulo.

8) Singulaarisen matriisin determinantti on nolla.

9) $|AB| = |A||B|$

10) $\det A^T = \det A$

Ominaisuus 9) ei ole ilmeinen.

Lause 3.3 $\quad |AB| = |A||B|$

Todistus

(i) Oletetaan, että $|B| \neq 0$. Tutkitaan lukua

$D(A) = \dfrac{|AB|}{|B|}$. Jos $D(A)$:lle on determinantin ominaisuudet 1, 2 ja 3, on $D(A) = \det A$.

1) $A = I \quad \Rightarrow \quad D(A) = \dfrac{|B|}{|B|} = 1$

2) Jos A:n kaksi riviä vaihdetaan keskenään, samat rivit vaihtuvat tulossa AB.
$D(A)$ vaihtaa merkkiä aina, kun $|A|$ vaihtaa.

3) A:n 1. rivin skaalaus skaalaa AB:n 1. rivin samalla luvulla.
Jos A:n 1. rivi on kahden rivin summa, niin tulo AB voidaan kirjoittaa s.e. sen 1. rivi on kahden rivin summa (sisätulovariantti).
$|AB|$ hajoaa kahteen osaan, jotka jaetaan $|B|$:llä.

Kaikki ehdot täyttyvät, joten $D(A) = |A|$.

(ii) $|B| = 0$; $\quad$ AB on singulaarinen, jos B on.
Tällöin siis $|AB| = |A||B| = 0$. $\square$

Kohdasta 3) todistuksessa: $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$; $\quad B = (\beta_{ij})$

Jos $\alpha_{1j} = \tilde{\alpha}_{1j} + \hat{\alpha}_{1j}$, niin $\alpha_{1j}\beta_{j1} = \tilde{\alpha}_{1j}\beta_{j1} + \hat{\alpha}_{1j}\beta_{j1}$.

Käytetään ominaisuutta 3) ja osaväite seuraa.

Sarrus'n sääntö:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Yleinen kaava:

<u>Määritelmä 3.2</u>

$$\det A = \sum_{\substack{P \in n\times n \text{ permutaatio-} \\ \text{matriisi}}} \det(P)\, \alpha_{1\alpha}\alpha_{2\beta}\cdots\alpha_{n\omega}$$

$$P = (\alpha, \beta, \dots, \omega).$$

Toisaalta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$$

<u>Määritelmä 3.3</u> $\det A = \alpha_{i1}C_{i1} + \alpha_{i2}C_{i2} + \dots + \alpha_{in}C_{in}$,

missä liittotekijä $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;

M_{ij} on $(n-1)\times(n-1)$-matriisi, joka muodostetaan poistamalla A:n i:s rivi ja j:s sarake.

Vektorialgebraa

RISTITULO ELI VEKTORITULO

Määritelmä 3.4 Olkoot $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ kaksi avaruuden vektoria. Niiden vektoritulo eli ristitulo on vektori $\underline{a} \times \underline{b}$, joka määritellään seuraavilla ehdoilla:

(i) $\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| \sin \measuredangle(\underline{a}, \underline{b})$,

(ii) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$,

(iii) vektorit $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

Jos $\underline{a} = \underline{0}$ tai $\underline{b} = \underline{0}$, asetetaan $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$.

Lause 3.5 $\underline{a} = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k}$, $\underline{b} = \beta_1 \underline{i} + \beta_2 \underline{j} + \beta_3 \underline{k}$;

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Edellinen lause suorastaan kutsuu seuraavaan:

Määritelmä 3.6 Skalaarikolmitulo

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Pätee: $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = [\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}] = [\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}]$.

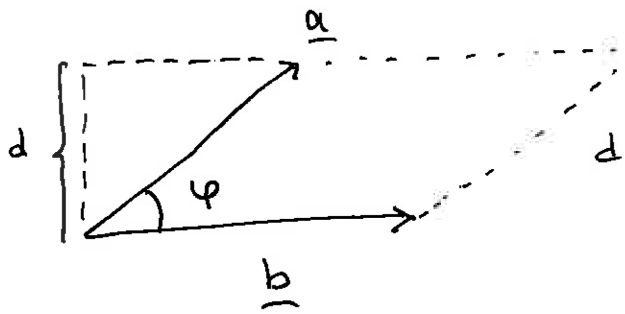
Lause 3.7 Pinta-ala ja Tilavuus

Vektoreiden $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ virittämän suunnikkaan ala on $\|\underline{a} \times \underline{b}\|$. Vektoreiden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus on $|[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]|$.

Todistus

Suunnikkaan ala : kanta × korkeus, siis $\|\underline{b}\|\|\underline{a}\| \sin\varphi$

$$= \|\underline{a} \times \underline{b}\|.$$



$d = \|\underline{a}\| \sin\varphi$

Suuntaissärmiön tilavuus : pohja × korkeus

$$\|\underline{a} \times \underline{b}\|\|\underline{c}\| \cos\psi = \|\underline{a} \times \underline{b}\| \, |\underline{n}^\circ \cdot \underline{c}|$$

$$= \|\underline{a} \times \underline{b}\| \left| \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{\|\underline{a} \times \underline{b}\|} \cdot \underline{c} \right|$$

$$= |\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c}| = |[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]|.$$

□

4 MATRIISIN OMINAISARVOT JA -VEKTORIT

4.1 Käsitteitä

<u>Määritelmä 4.1.1</u> Reaali- tai kompleksiluku λ on neliömatriisin $\underset{n\times n}{A}$ ominaisarvo, jos on olemassa pystyvektori $\underset{n\times 1}{x} \neq 0$ siten, että

$$Ax = \lambda x .$$

Ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit ovat yhtälön $Ax = \lambda x$ ratkaisut.

<u>Esimerkki 4.1.2</u> $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $Rx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = 1$

$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $Rx_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$

<u>Esimerkki 4.1.3</u> $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Ax = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; kierto origon suhteen $\pi/4$

Havainnollisessa geometriassa tehtävä ei ole analoginen edellisen esimerkin kanssa.

Matriisin ominaisarvot voi laskea monella eri tavalla, nyt riittää

<u>Lause 4.1.4</u> Luku λ on ominaisarvo, jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$.

Todistus $Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I)x = 0$

Yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
Tällöin $\det(A - \lambda I) = 0$ tarkoittaa, että yhtälöryhmällä on jokin ratkaisu $x \neq 0$. Määritelmän mukaan λ on tällöin ominaisarvo. □

Ominaisarvotehtävä

Kolme vaihetta:

1) Laske $\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = 0$.
2) Laske karakteristisen polynomin $p(\lambda)$ juuret.
3) Etsi jokaista ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit x.

Valitettavasti oikotietä onneen ei ole: Rivioperaatiot eivät säilytä λ:ja.

Kaksi hyödyllistä identiteettiä:

(i) $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(ii) $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

$\operatorname{tr} A$ on matriisin jälki.

Reaalikertoimisen polynomin juuret voivat olla kompleksisia. Välittömästi seuraa, että reaalisen matriisin ominaisarvot voivat olla kompleksisia.

Esimerkin 4.1.3 ominaisarvot saavat geometrisen tulkinnan, kun havaitaan, että kompleksiluvulla kertominen tarkoittaa kiertoa ja skaalausta.

4.2 Matriisin diagonalisointi

<u>Lause 4.2.1</u> Olkoon $\underset{n\times n}{S} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$, missä x_i:t ovat $\underset{n\times n}{A}$:n lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit. Tällöin

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Huomaa! Ominaisvektoreiden riippumattomuudesta seuraa:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

Tällä identiteetillä on yllättävä seuraamus:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ kpl}}$$

$$= S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{=I} \Lambda S^{-1} \dots S\Lambda S^{-1}$$

$$= S\Lambda^k S^{-1}$$

Milloin ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia?

<u>Lause 4.2.2</u> Eri suuria ominaisarvoja λ_i vastaavat ominaisvektorit x_i ovat lineaarisesti riippumattomia. Jokainen $\underset{n\times n}{A}$, jolla on n eri suurta ominaisarvoa λ_i on diagonalisoituva.

<u>Todistus</u> Olkoon (*) $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$; Kerrotaan A:lla (*)

$$c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0 \quad ; \quad \text{Kerrotaan } \lambda_2\text{:lla } (*)$$

$$c_1\lambda_2x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0 \quad ; \quad \text{vähennetään}$$

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}c_1x_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Samalla tekniikalla $c_2 = 0$, mistä seuraa: $\{x_1, x_2\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus yleistyy suoraan j:n vektorin tapaukseen.
Alternoidaan A:lla ja λ_j:llä kertomista (j vähenee yhdellä joka askeleella), jolloin vähennysten jälkeen jää vain yksi termi:

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}\underbrace{(\lambda_1-\lambda_3)}_{\neq 0}\dots\underbrace{(\lambda_1-\lambda_j)}_{\neq 0}c_1x_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0.$$

Siis: $S = (x_1 \dots x_n)$ voidaan muodostaa. $\square$

Siis:

a) matriisin säännöllisyys riippuu ominaisarvoista ($\lambda \neq 0$ tai $\lambda = 0$)

b) diagonalisoitavuus riippuu ominaisvektoreista

Yllättävä sovellus:

<u>Esimerkki 4.2.3</u> $\quad A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.5$

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & -0.6 \end{pmatrix} = S\Lambda S^{-1}$$

Huomaa ominaisvektoreiden ja arvojen järjestys!

Potenssien A^k ominaisarvot ja -vektorit:

$$A^2 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$; Ominaisvektorit ovat samat, ominaisarvot korotetaan erikseen.

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Havainto: $A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, jos $|\lambda_i| < 1$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

4.3 Symmetriset matriisit

Lause 4.3.1 Spektraaliteoreema

Jokainen symmetrinen matriisi on diagonalisoituva:
$A = Q \Lambda Q^T$, missä ominaisarvot ovat reaalisia ja ominaisvektorit ortonormaaleja: $Q^{-1} = Q^T$.

Näytetään:

Lause 4.3.2 Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

Lause 4.3.3 Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisvektorit ovat keskenään ortogonaalisia, jos niitä vastaavat ominaisarvot ovat erisuuria.

Ei näytetä: Jokaista ominaisarvoa vastaa ominaisvektori kertaluvusta riippumatta.

Todistus (4.3.2)

Oletetaan $\lambda \in \mathbb{C}$. $\quad Ax = \lambda x$ eli $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

$$\iff \bar{x}^T A = \bar{x}^T \bar{\lambda}$$

Sisätulot: $\bar{x}^T A x = \bar{x}^T \lambda x$ ja $\bar{x}^T A x = \bar{x}^T \bar{\lambda} x$

$$= \qquad\qquad =$$

Saadaan $\lambda \bar{x}^T x = \bar{\lambda} \underbrace{\bar{x}^T x}_{\|x\|^2} \implies \operatorname{Im} \lambda = 0.$ $\square$

Todistus (4.3.3)

Olkoon $Ax = \lambda_1 x$ ja $Ay = \lambda_2 y$; $\quad A = A^T$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$(\lambda_1 x)^T y = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T A y = x^T(\lambda_2 y)$$

Oletuksen nojalla: $x^T y = 0$ eli ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.

$\square$

Esimerkki 4.3.4 $\quad 5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0 = U(\tilde{P})$

Abstrakti muoto: $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $U(P) = 0$, pisteet P muodostavat tasokäyrän.

$$U(P) = x^T A x + 2b^T x + \omega = 0$$

Tässä: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -16 \\ -28 \end{pmatrix}$, $\omega = 80$

A on diagonalisoituva! $\quad A = S \Lambda S^T$, $\begin{cases} \Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Siispä $U(P) = x^T S \Lambda S^T x + 2b^T x + \omega$

$$= x'^T \Lambda x' + 2b'^T x' + \omega = 0$$

Kyseessä on ortonormeerattu koordinaatistonvaihto: $x' = S^T x$ eli $x = Sx'$.

$$U(\tilde{P}) = 9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}} x' + \frac{8}{\sqrt{5}} y' + 80 = 0$$

Täydennetään neliöiksi:

$$9\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 80 - \frac{9 \cdot 64}{5} - \frac{4 \cdot 1}{5} = 0$$

Siirretään origo: $t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

ja uudet muuttujat ovat

$$x'' = x' + t = S^T x + t$$

jolloin $U(\tilde{P}) = 9x''^2 + 4y''^2 - 36 = 0$

ja tutummin:

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Kyseessä on siis ellipsi, jonka puoliakselit ovat 2 ja 3.

4.4 Singulaariarvohajotelma (SVD)

Diagonalisointi: $\underset{n\times n}{A} = S\Lambda S^{-1}$ ja $S^{-1} = S^T$ erikoistapauksena.

Tavoite: $\underset{m\times n}{A} = U\Sigma V^T$, U ja V ortogonaalisia, Σ lävistäjämatriisi.

Vasen singulaarivektori: $AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T$,

mistä $(AA^T)U = U\Sigma^2$

Oikea singulaarivektori: $A^TA = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$,

mistä $(A^TA)V = V\Sigma^2$

Huomaa! $AA^TAv_i = \sigma_i^2 Av_i \Rightarrow u_i = Av_i/\sigma_i$ on AA^T:n ominaisvektori.

Toisin sanoen: $Av_i = \sigma_i u_i$

Saadaan siis: $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\ \underset{m\times n}{\Sigma}\ \underset{n\times n}{V^T}$

Niinsanottu kompakti muoto:

$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times r}{U}\ \underset{r\times r}{\Sigma}\ \underset{r\times n}{V^T}$, missä r on tukialkioiden lkm.

Kompression idea:

$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$, jos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots$ (yleensä näin järjestetään)

niin usein jo muutama termi voi sisältää tehtävän kannalta olennaisen informaation.

Luentoharjoitus:

Etsi SVD, kun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6 Geometriset kuvaukset

6.1 Euklidiset kuvaukset

Euklidiset kuvaukset ovat kuvauksia, joissa geometristen kuvioiden muoto säilyy.

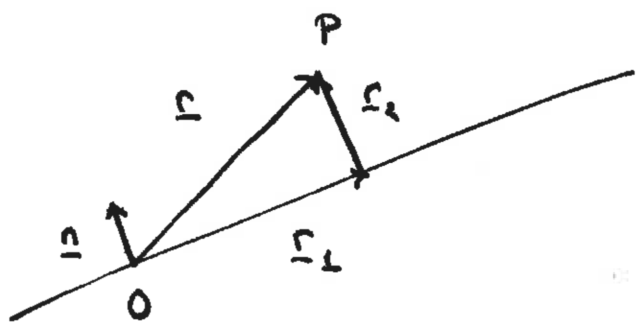
Tyypit: siirto, peilaus, kierto ja skaalaus.

1) Siirto eli translaatio

$$T_{\underline{a}} : E^d \to E^d, \quad T_{\underline{a}}(\underline{r}) = \underline{r}' = \underline{r} + \underline{a}$$

2) Peilaus eli symmetriakuvaus

Symmetria-akseli (taso) kulkee origon kautta.



$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2,$$
$$\underline{r}_2 = (\underline{n} \cdot \underline{r})\,\underline{n},$$
$$\underline{r}_1 = \underline{r} - \underline{r}_2 = \underline{r} - (\underline{n} \cdot \underline{r})\,\underline{n}$$

Eli kuvavektorille $\underline{r}' = \underline{r}_1 - \underline{r}_2 = \underline{r} - 2(\underline{n} \cdot \underline{r})\underline{n}$

Kuvaus: $H_{\underline{n}} : E^d \to E^d, \quad H_{\underline{n}}(\underline{r}) = \underline{r}' = \underline{r} - 2(\underline{n} \cdot \underline{r})\underline{n}$.

Koordinaattimuoto:

$$x' = x - 2(n^T x)n = x - 2n(n^T x)$$
$$= x - 2(nn^T)x = (I - 2nn^T)x$$

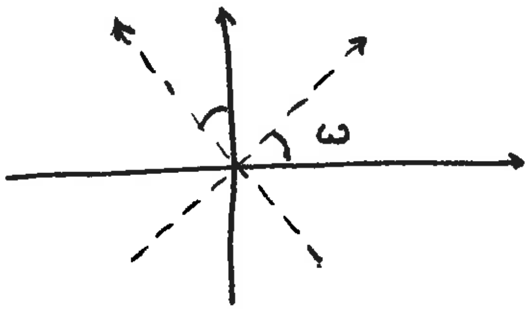
Siis: $x' = H_n x, \quad H_n = I - 2nn^T$.

Välttämättä: $H_n H_n = I$.

3) Kierto

Origo kuvautuu itselleen.

Akselien kierto:



$(1,0) \to (\cos\omega, \sin\omega)$

$(0,1) \to (-\sin\omega, \cos\omega)$

$$U_\omega = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

4) Skaalaus eli homotetia

$S_\lambda : E^d \to E^d$, $S_\lambda(\underline{r}) = \underline{r}' = \lambda \underline{r}$

5) Yleinen peilaus, kierto ja skaalaus

$$F_0(\underline{r}) = F(\underline{r} - \underline{r}_0) + \underline{r}_0$$

eli

$$x' = A(x - x_0) + x_0 = Ax + (x_0 - Ax_0)$$

$$= Ax + b$$

Kuvauksia, jotka ovat muotoa $Ax + b$, kutsutaan affiineiksi kuvauksiksi.

Esimerkki 3.2.8 Googlen PageRank - algoritmi

Ajatellaan verkossa surffaamista satunnaisprosessina. Jokaiselta sivulta siirrytään jollain todennäköisyydellä toiselle, kuitenkin s.e. kokonaistodennäköisyys on 1.

Koko verkkoa voi siis kuvata Markovin prosessin siirtomatriisilla. Olkoon ko matriisi A. A:lla on välttämättä ominaisarvo $\lambda = 1$ (A^T:n ominaisvektori on $(1\ 1 \dots 1)^T$). $\lambda = 1$ on myös suurin, minkä formaali todistaminen vaatii vahvempaa ju-jua. $\lambda = 1$ suurin takaa myös tasapainotilan Markovin prosessille

Siirtomatriisi A

Olkoon $k(j)$ sivun j linkkien lkm. Jos $k(j) \neq 0$ ja surffaaja kulkee vain linkkejä pitkin, on siirtotodennäköisyys sivulle i:

$$m_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k(j)}, & \text{jos } j\text{:ltä on linkki } i\text{:lle}, \\ 0, & \text{muutoin}. \end{cases}$$

Jos sivulla ei ole yhtään linkkiä, $m_{ij} = \frac{1}{n}$ (teleportaatio)

Jos tehdään vielä lisäoletus, että linkkejä seurataan todennäköisyydellä p ja teleportaatio tapahtuu todennäköisyydellä $(1-p)$, saadaan

$$a_{ij} = p\, m_{ij} + (1-p)\frac{1}{n},$$

ja matriisimuodossa

$$A = pM + \frac{1-p}{n} ee^T, \quad \text{missä } e = (1\ 1 \dots 1)^T.$$

$\lambda = 1$:tä vastaava ominaisvektori x_1 on Markovin prosessin tasapainotila. Sivujen järjestys määräytyy tasapainotilan todennäköisyyksien mukaan (engl. PageRank)

Hakuresepti: Etsi ensin avainsanaosumat, tarjoile tärkeysjärjestyksessä.