1 Vektorit

1.1. Avaruudet $\mathbb{R}^n$ ja E^n

Joukko $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n$:n alkiot ovat vektoreita ; merkitään pystyvektoreina:

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Toisaalta, (avaruuden) joukon E^d alkiot A ja B ovat pisteitä, jotka yhdistävä suuntajana AB määrää vektorin $\overrightarrow{AB}$.

Merkitään : $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$ yhdellä symbolilla.

Tässä kurssissa ei tehdä eroa $\mathbb{R}^n$:n ja E^d:n vektoreiden välillä.

1.2. $\mathbb{R}^n$:n vektorit

Määritellään kaksi laskutoimitusta :

(i) yhteenlasku , $x, y \in \mathbb{R}$; $x + y \in \mathbb{R}^n$

(ii) skalaarilla kertominen , $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\alpha x \in \mathbb{R}^n$

Alkioittain , $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad x + y = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}; \quad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha \xi_1 \\ \alpha \xi_2 \\ \vdots \\ \alpha \xi_n \end{pmatrix}$$

Vektori, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on nollavektori.

Kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $x + (-x) = 0$.

1.3 E^d:n vektorit ; Koordinaatisto

Koordinaatisto muodostetaan kiinnittämällä origo ja kantavektorit. Pisteavaruudessa E^3 siis $\{O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, missä yksikkövektorit $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ muodostavat ortonormeeratun positiivisesti suunnistetun kannan.

Huom! Vektorisysteemeille $\{\underline{a}, \underline{b}\} \in E^2$, $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \in E^3$ voidaan määritellä suunnistus, joka on joko positiivinen tai negatiivinen.

Tasossa: Jos $\underline{a}$ kiertyy $\underline{b}$:n päälle vastapäivään lyhintä reittiä, on $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ suunnistettu positiivisesti.

Avaruudessa: $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$, oikean käden sääntö : $\{P, E, K\}$

Miksi kaksi vektorin määritelmää? E^d:n vektorit (fysikaaliset) soveltuvat hyvin päättelyyn, $\mathbb{R}^n$:n vektorit laskentaan.
Jos origot yhdistetään, voidaan pisteen P paikkavektori esittää yhtäpitävästi muodoissa:

$$P \mathrel{\hat{=}} \underline{r} = \overline{OP} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k} \mathrel{\hat{=}} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.4 Skalaaritulo

<u>Määritelmä 1.4.1</u> Vektoreiden $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ skalaaritulo eli sisätulo on

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{cases} |\underline{a}||\underline{b}| \cos \measuredangle(\underline{a}, \underline{b}), & \text{jos } \underline{a} \neq \underline{0},\ \underline{b} \neq \underline{0} \\ 0, & \text{jos } \underline{a} = \underline{0} \text{ tai } \underline{b} = \underline{0} \end{cases}$$

Vektorit ovat kohtisuorassa, jos $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ eli $\underline{a} \perp \underline{b}$.

Vektorin $\underline{b}$ skalaarikomponentti vektorin $\underline{a}$ suunnalle on

$$|\underline{b}| \cos \measuredangle(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \cdot \underline{b} = \underline{a}^\circ \cdot \underline{b}$$

ja vektorikomponentti $(\underline{a}^\circ \cdot \underline{b})\underline{a}^\circ$.

Lause 1.4.2 Olkoon $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ avaruuden ortonormeerattu kanta

ja
$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k} \;\hat{=}\; a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{b} = \beta_1 \underline{i} + \beta_2 \underline{j} + \beta_3 \underline{k} \;\hat{=}\; b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Tällöin on $\underline{a} \cdot \underline{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$.

$\mathbb{R}^n$:n vektoreille a ja b : $(a \mid b) = a^T b = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i$.

Huom! Voimme siis ~~määritellä~~ $\mathbb{R}^n$:n vektoreiden välisen kulman.

Luentoharjoitus : $\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$, $\underline{b} = -\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{c} = \underline{i} + 2\underline{j}$

Laske : $\underline{a} \cdot \underline{b} =$

$\underline{c} \cdot (\underline{a} + \underline{b}) =$

$3\underline{a} \cdot (4\underline{c} - 3\underline{b}) =$

1.5 Vektoritulo

Vektoritulo voidaan muodostaa vain avaruudessa.

<u>Määritelmä 1.5.1</u> Olkoot $\underline{a}, \underline{b} \in E^3$. Vektori- eli ristitulo on vektori $\underline{a} \times \underline{b}$, jolle pätee:

1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \measuredangle(\underline{a}, \underline{b})$
2) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$
3) vektorit $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin

Jos $\underline{a} = \underline{0}$ tai $\underline{b} = \underline{0}$, on $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$.

Vektoritulo ei siis ole:

a) vaihdannainen: $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

b) liitännäinen: $(\underline{i} \times \underline{j}) \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$

$$\underline{i} \times (\underline{j} \times \underline{j}) = \underline{i} \times \underline{0} = \underline{0}$$

Ortonormeeratussa oikeakätisessä kannassa vektoritulo saa naseuraavan muodon:

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k}$$
$$\underline{b} = \beta_1 \underline{i} + \beta_2 \underline{j} + \beta_3 \underline{k}$$

Aputaulukko: $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \quad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \quad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$
$$\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}, \quad \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}, \quad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$$

Jolloin:
$$\begin{aligned}\underline{a} \times \underline{b} &= \alpha_1\beta_1\, \underline{i} \times \underline{i} + \alpha_1\beta_2\, \underline{i} \times \underline{j} + \alpha_1\beta_3\, \underline{i} \times \underline{k} \\ &+ \alpha_2\beta_1\, \underline{j} \times \underline{i} + \alpha_2\beta_2\, \underline{j} \times \underline{j} + \alpha_2\beta_3\, \underline{j} \times \underline{k} \\ &+ \alpha_3\beta_1\, \underline{k} \times \underline{i} + \alpha_3\beta_2\, \underline{k} \times \underline{j} + \alpha_3\beta_3\, \underline{k} \times \underline{k}\end{aligned}$$
$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\underline{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\underline{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\underline{k}$$

Luentoharjoitus : $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$, $\underline{b} = -\underline{i} + 2\underline{j}$, $\underline{c} = 2\underline{j} + \underline{k}$

$\underline{a} \times \underline{b} =$

$\underline{b} \times \underline{c} =$

$\underline{a} \times \underline{c} =$

Lause 1.5.2 Laskuominaisuudet

(i) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

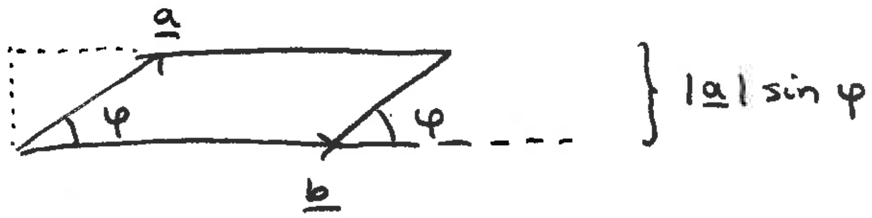
(ii) $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{c})$

(iv) $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{c}) + (\underline{b} \times \underline{c})$

Lause 1.5.3 Vektoreiden $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ virittämän suunnikkaan ala on $|\underline{a} \times \underline{b}|$

Todistus



Määritelmästä : $|\underline{a}||\underline{b}| \sin\varphi = |\underline{a} \times \underline{b}|$ □

1.6 Suora ja taso

Suora : $\underline{r} = \underline{r}_0 + \tau \underline{t}$, $\underline{t} \neq \underline{0}$, $\tau \in \mathbb{R}$

Taso : $\underline{r} = \underline{r}_0 + \sigma \underline{s} + \tau \underline{t}$, $\underline{s}, \underline{t} \neq \underline{0}$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$

Toisaalta, tason suora voidaan määritellä yhden pisteen ja normaalin avulla :

$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$$

Merkitään : $\underline{n} = n_1 \underline{i} + n_2 \underline{j}$, $\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j}$

Sijoittamalla suoran yhtälöön ja sopimalla $d = \underline{n} \cdot \underline{r}_0$, saadaan suoran koordinaattimuoto :

$$n_1 x + n_2 y = d .$$

Vastaavasti tasolle avaruudessa : $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$

(Muodollisesti täsmälleen sama yhtälö!)

eli

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

Kääntäen : Koordinaattimuodosta voi aina lukea normaalin suoraan.

Parametrimuodosta tason normaali saadaan vektoritulon avulla : $\underline{n} = \underline{t} \times \underline{s}$ (tai $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{t}$) .

Avaruuden suoralla ei siis ilmeisestikään voi olla koordinaattimuotoa. Se määritellään kahden tason leikkaussuorana :

$$\begin{cases} \underline{n}_1 \cdot (\underline{r} - \underline{r}_1) = 0 \\ \underline{n}_2 \cdot (\underline{r} - \underline{r}_2) = 0 \end{cases}$$

Kaksi avaruuden suoraa voivat suhtautua toisiinsa kolmella tavalla. Ne joko

1) leikkaavat yhdessä pisteessä
2) ovat yhdensuuntaisia
3) ovat ristikkäisiä

Luentoharjoitus

a) Esitä $2x - 5y = 7$ parametrisoidussa muodossa.

Valitaan $x = \tau \Rightarrow y = -\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\tau$

$\underline{r} = \underline{r}_0 + \tau \underline{t}$; $\underline{r}_0 = -\frac{7}{5}\underline{j}$, $\underline{t} = \underline{i} + \frac{2}{5}\underline{j}$, $\tau \in R$

b) Esitä $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$, $t \in R$ koordinaattimuodossa.

$\begin{cases} t = x - 1 \\ t = \frac{1}{2}(y+2) \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{2}(y+2) \Leftrightarrow 2x - y = 4$

CI: OSA III Lineaarialgebraa ja geometriaa

1 Matriisit ja vektorit

1.1 $\mathbb{R}^n$

Joukko $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kpl}} = \{ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_1, \ldots, \xi_n \in$

$\mathbb{R}^n$:n alkiot ovat vektoreita; merkitään pystyvektoreina

$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Määritellään kaksi laskutoimitusta:

(i) yhteenlasku, $x, y \in \mathbb{R}^n$; $x + y \in \mathbb{R}^n$

(ii) skalaarilla kertominen, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\alpha x \in \mathbb{R}^n$

Eli: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}; \quad x + y = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}; \quad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha \xi_1 \\ \alpha \xi_2 \\ \vdots \\ \alpha \xi_n \end{pmatrix}$$

Vektori, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on nollavektori.

Kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee: $x + (-x) = 0$.

<u>Määritelmä 1.1.1</u> Lineaarinen riippumattomuus

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$ ja $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ tuntemattomia skalaareja. Vektorit $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälön

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k a_k = 0$$

ainoana ratkaisuna on $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_p = 0$.

Jos muitakin ratkaisuja on olemassa, niin vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

Esimerkki 1.1.2

Olkoot $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ovatko a_1, a_2, a_3 lineaarisesti riippumattomia?

$$\sum_{k=1}^{3} \xi_k a_k = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

$$= \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Yhtälö toteutuu (ainakin) valinnoilla:

$$\xi_1 = -2 , \; \xi_2 = 1 , \; \xi_3 = 0 .$$

Siis: a_1, a_2, a_3 ovat lineaarisesti riippuvia.

Pätee yleisesti:

Lause 1.1.3

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on olemassa n lineaarisesti riippumatonta vektoria, mutta useamman vektorin kokoelma on aina lineaarisesti riippuva.

Dimensio on suurin lineaarisesti riippumattomien vektoreiden lukumäärä; $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Määritelmä 1.1.4

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ n lineaarisesti riippumatonta vektoria muodostavat sen kannan.

Käsitteet nivoo yhteen keskeinen lause:

Lause 1.1.5

Olkoon $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta ja $y \in \mathbb{R}^n$.
Tällöin vektori y voidaan yksikäsitteisellä tavalla lausua kantavektoreiden lineaariyhdistelynä:

$$y = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_n b_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k .$$

Todistus

Ensin on vakuuttauduttava siitä, että vektorijoukko $\{b_1, b_2, \dots, b_n, y\}$ on lineaarisesti riippuva.
Olkoot tuntemattomat kertoimet $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta\}$ s.e.
$\sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k + \eta y = 0$. Jos $\eta = 0$, seuraa kannan ominaisuuksista, että $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$. Tämä on ristiriita, koska $\mathbb{R}^n$:ssä voi olla vain n lineaarisesti riippumatonta vektoria. Välttämättä $\eta \neq 0$, koska muutoin ainoa valinta olisi $y = 0$.
Lineaariyhdistely on siis: $y = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\xi_k}{\eta}\right) b_k$.

Onko esitys yksikäsitteinen?

$$y = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k' b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi_k') b_k = 0$$

Koska $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ on kanta, on välttämättä
$\xi_k = \xi_k'$, $k = 1, \dots, n$.

□

Lineaariyhdistelmä saadut kertoimet ovat vektorin koordinaatit ko. kannan suhteen.

Luonnollisen kannan muodostavat vektorit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mielivaltaisen vektorin y alkiot ovat sen koordinaatit luonnollisen kannan suhteen.

1.2 Lineaarikuvaus

Tarkastellaan seuraavana kuvauksia avaruudelta toiselle: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Olkoon $y = F(x)$, missä

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p,$$ eli komponenteittain

$\eta_j = f_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, missä komponenttifunktio $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Määritelmä 1.2.1</u>

Kuvaus $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on lineaarikuvaus, jos

1) $F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2) $F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

Esimerkki 1.2.2

Tarkastellaan kuvausta $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jonka komponenttifunktiot ovat

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2) = a\xi_1 + b\xi_2 , \\ f_2(\xi_1, \xi_2) = c\xi_1 + d\xi_2 . \end{cases}$$

Onko F lineaarikuvaus?

Olkoot $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

1) $$F(x+y) = \begin{pmatrix} a(x_1+y_1) + b(x_2+y_2) \\ c(x_1+y_1) + d(x_2+y_2) \end{pmatrix}$$

$$F(x) + F(y) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(x_1+y_1) + b(x_2+y_2) \\ c(x_1+y_1) + d(x_2+y_2) \end{pmatrix}$$

2) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$

F on lineaarikuvaus.

Esimerkki 1.2.3

a) Olkoon edellä $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.
Tällöin: $F(x) = x$ eli $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on identiteettikuvaus.

b) Valitaan $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.
Tällöin: $F(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ eli $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on peilaus y-akselin suhteen.

Edellisten esimerkkien kuvaus F voidaan esittää norevammin matriisimuodossa:

$$F(x) = Ax, \quad \text{missä} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{on } 2\times 2\text{-matriisi}$$

Merkintä Ax tarkoittaa matriisi-vektoritulo, joka on määritelty 2×2-tapauksessa kuten F:n komponenttifunktio

Yleisesti matriisilla voi olla p riviä ja n saraketta eli pystyriviä: $\underset{p\times n}{A}$

Alkiot indeksoidaan rivin ja sarakkeen mukaan s.e. α_{12} tarkoittaa alkiota joka sijaitsee 1. rivin 2:lla sarakkeella.

Jokainen lineaarikuvaus voidaan esittää jonkin matriisin avulla.

Lause 1.2.4

Olkoon $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineaarikuvaus, joka kuvaa luonnolliset kantavektorit $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ vektoreille $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^p$: $F(e_k) = a_k$, $k = 1, \dots, n$.

Olkoon A matriisi, jonka pystyvektorit ovat $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tällöin kuvaus F voidaan esittää matriisin A avulla:

$$F(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \underset{p\times n}{A}$$

Todistus

Vektori $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ on luonnollisessa kannassa

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k .$$

F on lineaarikuvaus:

$$F(x) = F\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k F(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_k + \dots + a_{1n}\xi_k \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{p1}\xi_1 + a_{p2}\xi_2 + \dots + a_{pn}\xi_n \end{pmatrix}$$

$$= Ax$$

□

Määritelmä 1.2.5

Lineaarikuvauksen $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ydin on joukko

$$N(F) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0 \} \quad (= \ker(F)).$$

Ytimellä on myös dimensio $< n$.

Esimerkki 1.2.6

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{pmatrix} ; \quad N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$\dim N(A) = 2$$

1.3 Matriisialgebraa

Olkoon $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Yhdistetty kuvaus on mielekäs vain muodossa $G \circ F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Jos F ja G ovat lineaarikuvauksia, niin $G \circ F$:kin on (Harjoitustehtävä!)

Olkoon B F:n matriisi ja A G:n. Tällöin $G \circ F$ on

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = A(Bx) = ABx.$$

AB on matriisitulo.

Määritelmä 1.3.1

$$\underset{p \times n}{A} = (a_1\, a_2 \dots a_n) = (\alpha_{ij})$$

$$\underset{n \times q}{B} = (\beta_{ij})$$

$$\underset{p \times q}{C} = AB = (c_1 \dots c_q) = (\gamma_{ij})$$

a) lineaariyhdistely : $\quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} a_k$

b) sisätulo : $\quad \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj}$

[Muistisääntö : $\underset{p \times q}{C} = \underset{p \times n}{A} \; \underset{n \times q}{B}$]

Huomaa! Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli se ei kommutoi : $AB \neq BA$ yleisesti

Kuten jo aikaisemmin on nähty :

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ tai } B = 0$$

Määritelmä 1.3.2

Matriisi B on matriisin A käänteismatriisi, jos

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

missä I on identiteettimatriisi, $I = (e_1\ e_2 \dots e_n) =$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \bigcirc \\ & 1 & \\ \bigcirc & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Lause 1.3.3

Jos käänteismatriisi on olemassa, niin se on yksikäsitteinen: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Matriiseille voidaan lisäksi määritellä laskutoimitus, joka muodostaa $\underset{m\times n}{A}$-matriisista $n\times m$-matriisin vaihtamalla rivit ja sarakkeet. Tämä on käytännössä usein hyödyllistä.

Määritelmä 1.3.4 Transpoosi

$$\underset{p\times n}{A} = (\alpha_{ij}), \quad \underset{n\times p}{C} = A^T \quad ; \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ji}$$

Yhdistetylle kuvaukselle: $C = AB$, $C^T = B^T A^T$.

Terminologiaa:

(i) $\underset{n\times n}{A}$ on neliömatriisi; symmetrinen, jos $A = A^T$

(ii) A on säännöllinen, jos käänteismatriisi on olemassa, muutoin singulaarinen

(iii) $$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn})$$

on lävistäjä- eli diagonaalimatriisi.

(iv) Yläkolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j > k$

Alakolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j < k$

(v) A on ortogonaalinen, jos $A^{-1} = A^T$

2 Lineaarinen yhtälöryhmä

2.1. Gaussin eliminaatio

On annettu kolme $\mathbb{R}^3$:n vektoria:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Etsitään vektorin $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ esitys vektoreiden $\{a_1, a_2, a_3\}$ avulla.

Määritelmän mukaan: $\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 = b$

Eli

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 1 \\ -2\xi_1 + 4\xi_2 + 8\xi_3 = 6 \\ 3\xi_1 + 6\xi_2 + 11\xi_3 = 7 \end{cases}$$

tai matriisimuodossa $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Mitä tiedämme mahdollisten ratkaisujen lukumääristä?

Ratkaisuja voi olla:

a) 0 kpl ts. A ei kuvaa mitään vektoria b:lle.

b) 1 kpl ts. $\{a_1, a_2, a_3\}$ on kanta.

c) ∞ kpl ts. A:n ydin on ei-triviaali.

Hyödyllinen konsepti on A:n kuva-avaruus $R(A)$, jonka alkiot ovat kaikki vektoreiden a_1, a_2, a_3 lineaariyhdistelyt. Jos ratkaisua ei ole olemassa, niin tulkitaan s.e. $b \notin R(A)$.

Huom! Seuraavassa yhtälöryhmän ratkaisu jaetaan osiin. Tämä ratkaisu on puhtaasti pedagoginen, eikä käytännössä saavuteta mitään hyötyä ytimen erillisestä käsittelystä.

Tarkastellaan ensin A:n ydintä : $Ax = 0$.
Suoritetaan ratkaisu ns. Gaussin algoritmilla :

$$\begin{array}{rrr} \underline{1} & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{array} \quad \downarrow 2 \quad \downarrow -3$$

$\underline{1}$ on tukialkio.
$\downarrow$ tarkoittaa rivioperaatiota

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 8 & 14 & \\ 0 & 0 & \underline{2} & :2 \end{array} \quad \uparrow -14 \quad \uparrow -3$$

On saatu yläkolmiomuoto.
Yhtälöryhmän voi jo ratkaista
$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 2 & 0 & \\ 0 & \underline{8} & 0 & :8 \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \quad \uparrow -2$$

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Lineaarisesti riippumattomat vektorijoukot voi aina redusoida identiteetti-matriisiksi rivioperaatioilla.

Yhtälöryhmällä voi siis olla ratkaisu.
Suoritetaan samat eliminaatioaskeleet myös oikealle puolelle :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ratkaisu : $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$; $\{a_1, a_2, a_3\}$ on kanta

Esimerkki 2.1.1

Etsi yhtälöryhmän kaikki ratkaisut, kun

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 14x_4 = 7 \end{cases} \iff Ax = b$$

Ratkaistaan ensin $Ax = 0$.

$$\begin{matrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{matrix} \quad -2 \quad -3$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{matrix} \quad -1$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad :2 \quad -3$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & \end{matrix}$$

A:n redusoitu porrasmuoto.
Yhtälöryhmä on nyt muodossa
$Rx = 0$.

Jaetaan muuttujat a) kiinnitetyiksi (x_1, x_3)
b) vapaiksi (x_2, x_4)

Miksi nämä nimet?

Vapaat muuttujat voi korvata parametrilla ja ratkaista kiinnitetyt niiden avulla.

Olkoon $x_2 = \sigma$, $x_4 = \tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

Siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma \\ x_3 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x_1 = -2\sigma - \tau \\ x_3 = \quad\quad -\tau \end{cases}$$

Päässälaskija voi mielensä antaa yhden vapaan kerrallaan 1:ksi ja loput vapaat nolliksi. Tässä:

1) $x_2 = 1$, $x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$, $x_1 = -2$

2) $x_2 = 0$, $x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = -1$, $x_1 = -1$

Eli $Ax = 0 \Leftrightarrow Rx = 0 \Rightarrow x = \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ydin $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim N(A) = 2$.

Ennen kuin sijoitamme oikealle puolelle vektorin $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, suoritamme eliminaatioaskeleet yleisellä oikealla puolella $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & b_2 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

Jotta viimeiselle riville ei syntyisi ristiriitaa, on pädettävä $b_3 - b_2 - b_1 = 0$. Tämä on ns. konsistenssiehto.

Alkuperäinen tehtävä: $7 - 6 - 1 = 0$ eikä RR synny!

Yhtälöryhmän redusoitu muoto : $Rx = d$

$$
\left.\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\
0 & 0 & \underline{2} & 2 & 6-2\cdot 1 = 4 \quad : 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7-6-1 = 0
\end{array}\right. \quad -3
$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Etsitään ratkaisu vastaten tilannetta, jossa kaikki vapaat ovat nollia.

Siis : $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = -5$, $x_3 = 2$

Kootaan yhteen kaikki ratkaisut :

$$
x = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{R}.
$$

Lause 2.1.2

Lineaarinen yhtälöryhmä $\underset{p \times n}{A} x = b$ voidaan aina saattaa muotoon

$$
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cc|c} I & F & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} r \\ p-r \end{array} \\
\begin{array}{cc} r & n-r \end{array} &
\end{array}
$$

Ratkaisujen lukumäärälle saadaan ehdot :

Jos	lukumäärä on
$r < p$ ja $b_2 \neq 0$	0
$(r = p$ tai $b_2 = 0)$ ja $r = n$	1
$(r = p$ tai $b_2 = 0)$ ja $r < n$	∞

2.2. Determinantti

Määritelmä 2.2.1

Neliömatriisin A determinantti on pinta-ala, tilavuus tai tilavuuden yleistys. Merkitään: $\det A = |A|$.

Käytännössä determinantti on siis luku, joka pitää laskea. Koska permutaatiot ovat tuttuja, voimme tutustua yleisimpään määritelmään.

Määritelmä 2.2.2

Neliömatriisin $\underset{n\times n}{A} = (\alpha_{ij})$ determinantti $\det A$ on luku, joka lasketaan lausekkeesta

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha_{\sigma(1),1}\, \alpha_{\sigma(2),2} \cdots \alpha_{\sigma(n),n},$$

missä $\operatorname{sgn}(\sigma)$ on permutaation σ signum, ± 1.

Esimerkki 2.2.3

Olkoon $\underset{3\times 3}{A}$. $S_3 = \{ (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1) \}$

$+1$: $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$

-1 : $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$

$$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23}$$
$$- \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} + \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}$$

Havaitaan, että yläkolmio (alakolmio) matriisin determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo.

Olkoon $A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ ja $B_{n \times n}$. a_k' ja a_k ovat pystyvektoreita ja λ on skalaari.

Seuraavat perusominaisuudet voi johtaa määritelmään perustuen:

1) $\det(a_1 \dots a_{k-1}\ a_k + a_k'\ a_{k+1} \dots a_n) =$
$\det(a_1 \dots a_{k-1}\ a_k\ a_{k+1} \dots a_n) +$
$\det(a_1 \dots a_{k-1}\ a_k'\ a_{k+1} \dots a_n)$

2) $\det(a_1 \dots a_{k-1}\ \lambda a_k\ a_{k+1} \dots a_n) =$
$\lambda \det(a_1 \dots a_{k-1}\ a_k\ a_{k+1} \dots a_n)$

3) $\det(\dots \underset{(j)}{a_j} \dots \underset{(k)}{a_k} \dots) = -\det(\dots \underset{(j)}{a_k} \dots \underset{(k)}{a_j} \dots)$

4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

5) $\det(\dots \underset{(j)}{a} \dots \underset{(k)}{a} \dots) = 0$

6) $\det(A^T) = \det(A)$

7) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

8) vektorit $a_1, \dots, a_n$ lineaarisesti riippuvia
$\iff$
$\det(a_1, \dots, a_n) = 0$

Näin ollen determinantin voi laskea Gaussin algoritmilla:

<u>Lause 2.2.4</u>

Determinantin arvo ei muutu, jos matriisi sarake lisätään skalaarilla kerrottuna toiseen sarakkeeseen.

(Tai vastaavasti vaakarivi vaakariviin.)

Esimerkki 2.2.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det A = ? \quad ;$$

Suoraan määritelmästä:

$$\det A = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot -6 + -1 \cdot 4 \cdot 1$$
$$- (-1 \cdot 0 \cdot -6) - (0 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 0 \cdot 4$$
$$= -4$$

Gauss:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 0 & -1 \\ \updownarrow & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 1 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Lävistäjäalkioiden tulo : $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

Rivinvaihtojen lukumäärä: 1

$\det A = (-1)^1 4 = -4$ (Saatiin sama tulos!)

Muitakin tapoja määrittää determinantti löytyy.
Gaussin eliminaatio on kuitenkin riittävä yleisratkaisu.

2.3 Käänteismatriisi

Käänteismatriisi voidaan laskea Gaussin algoritmilla:

$$\underset{n \times n}{A} \; \underset{n \times n}{X} = \underset{n \times n}{I}$$

Ratkaistaan siis n kpl yhtälöitä samanaikaisesti.

Mukava muistikaava:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.4 Synteesi

Olkoon A neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1) on olemassa A^{-1}

2) $\det A \neq 0$

3) matriisin A pystyvektorit ovat lineaarisesti riippumattomat

4) matriisin A rivit ovat lineaarisesti r:ttomat

5) yhtälöryhmällä $Ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu mielivaltaisella vektorilla b

6) Yhtälöryhmän $Ax = 0$ ainoa ratkaisu on $x = 0$

3 Ominaisarvot ja -vektorit

3.1 Reaaliset neliömatriisit

Määritelmä 3.1.1

Reaali- tai kompleksiluku λ on neliömatriisin $\underset{n\times n}{A}$ ominaisarvo, jos on olemassa pystyvektori $\underset{n\times 1}{x} \neq 0$ s.e.

$$Ax = \lambda x.$$

Ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit x ovat yhtälön $Ax = \lambda x$ ratkaisut.

Reaalisella matriisilla voi siis olla kompleksisia ominaisarvoja. Tämä on helppo hyväksyä seuraavan lauseen jälkeen:

Lause 3.1.2

Luku λ on ominaisarvo, jos ja vain jos

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Todistus

$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I)x = 0$

Jos $x \neq 0 \implies \det(A - \lambda I) = 0$ $\square$

Polynomien $\det(A - \lambda I)$ ja $\det(\lambda I - A)$ juuret ovat ominaisarvot. Kyseessä on ns. karakteristinen polynomi:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

tai $$p(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Esimerkki 3.1.3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(2-\lambda)(1+\lambda) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

Esimerkki 3.1.4

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad ; \quad p(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \sqrt{2}\,\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\,\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$$

Ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmät

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0 .$$

Ratkaisuja on aina ääretön määrä, suunta riittää.

Esimerkki 3.1.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; Ominaisarvoon $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ liittyvä ominaisvektori x_1 :

$$\begin{pmatrix} 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ -1 & -1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} x_1 = 0 \quad ; \quad x_1 = \sigma \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma \in \mathbb{R}$$

Potenssimenetelmä

Olkoot A:n ominaisvektorit $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ lineaarisesti riippumattomia ja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ominaisarvot.

Mielivaltainen vektori x voidaan lausua ominaisvektoreiden muodostamassa kannassa:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k .$$

Tällöin

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k A v_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k v_k$$

eli

$$A^k x = \xi_1 \lambda_1^k v_1 + \xi_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + \xi_n \lambda_n^k v_n .$$

Olkoon λ_1 suurin ominaisarvo: $|\lambda_1| > |\lambda_j|, \; j > 1$.

Nyt $|\lambda_1|^k \gg |\lambda_j|^k, \; j > 1, \; k \gg 0$.

Jos $\xi_1 \neq 0$, niin jonossa $x^{(k)} = A^k x$, jonain vaiheessa

$$x^{(k)} \simeq \xi_1 \lambda_1^k v_1 .$$

No hyvä, vaan miten λ_1 saadaan paljastettua?

$x^{(k)}$ on vektori, $x_i^{(k)}$ on sen i:s alkio:

$$\lambda_1 \simeq x_i^{(k)} / x_i^{(k-1)} , \quad \text{jos } x_i^{(k-1)} \neq 0 .$$

Näin määritelty menetelmä on nimeltään potenssimenetelmä. Se on ns. iteratiivinen menetelmä. Ratkaisu saadaan toistamalla yksinkertaista laskutoimitusta, kunnes jokin katkaisukriteeri päättää iteraation.

3.2 Diagonalisointi

Lause 3.2.1

Jos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ovat $\underset{n\times n}{A}$:n eri suuria ominaisarvoja ja $x_1, x_2, \ldots, x_k$ niitä vastaavat ominaisvektorit, niin $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus

Olkoon $r = \dim(\{x_1, \ldots, x_k\})$, $r < k$.

Voimme siis valita $r+1$, jotka ovat lineaarisesti riippuvia:

$$c_1 x_1 + \ldots + c_r x_r + c_{r+1} x_{r+1} = 0 \qquad (*)$$

Kerrotaan yhtälöä A:lla:

$$c_1 A x_1 + \ldots + c_r A x_r + c_{r+1} A x_{r+1} = 0$$

eli

$$c_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + c_r \lambda_r x_r + c_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = 0 \qquad (**)$$

"Eliminoidaan" x_{r+1}:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) x_1 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) x_r = 0 \quad \text{RR}$$

Välttämättä: $r = k$.

□

Määritelmä 3.2.2

$\underset{n\times n}{A}$ on diagonalisoituva, jos on olemassa matriisit $\underline{X}$ ja D s.e. (D diagonaalimatriisi)

$$\underline{X}^{-1} A \underline{X} = D.$$

Sanotaan, että A on similaarinen diagonaalimatriisi D:n kanssa. $\underline{X}$ on similariteettimuunnosmatriisi.

Lause 3.2.3

Neliömatriisi $A_{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos A:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Esimerkki 3.2.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_1 = 1, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_2 = -4, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Olkoon $X = (x_1\ x_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nyt: $$X^{-1} A X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = D$$

ja $$X D X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = A$$

Esimerkki 3.2.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_{1,2} = 1, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ on karakteristisen polynomin kaksinkertainen juuri eli sen algebrallinen kertaluku on 2.

Mutta, $\dim(N(A - 1\cdot I)) = 1$ (geometrinen kertaluku).

A on defektiivinen, eikä sitä voi diagonalisoida.

Esimerkki 3.2.6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix};$$ Samat arvot $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 2$

$\dim N(A - 2\cdot I) = 1 \Rightarrow A$ defektiivinen

$\dim N(B - 2\cdot I) = 2 \Rightarrow B$ diagonalisoituva

Esimerkki 3.2.7 Markov - ketju

Olkoon $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0.8 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$. Jokaisen sarakkeen alkioiden summa on 1. Matriisin alkio α_{ij} voidaan tulkita siirtymätodennäköisyydeksi tilasta i tilaan j.

Matriisi A kuvaa vaikkapa tietokoneen omistajien merkkiuskollisuutta.

Jos alkujakauma on $x_0 = (200 \; 100 \; 100 \; 100)^T$, niin yhden kierroksen jälkeen saadaan $x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 180 \\ 110 \\ 105 \\ 105 \end{pmatrix}$.

Määritelmä

Jono tapahtumia, joiden todennäköisyys on sattumanvarainen, on stokastinen prosessi. Markovin prosessi on stokastinen, jolla on kolme ominaisuutta:

1) Tilojen lukumäärä on äärellinen.
2) Seuraavan tilan todennäköisyys riippuu vain edellisestä.
3) Siirtymätodennäköisyydet ovat vakioita; eivät riipu ajasta.

Esimerkissämme voimme muodostaa eri tiloista x_i ns. Markovin ketjun. Jos alkutila on todennäköisyysvektori, niin voimme kysyä, päätyykö prosessi johonkin tasapainotilaan.

Tässä $x_0 = x_0/500 = (0.4 \; 0.2 \; 0.2 \; 0.2)^T$.

A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.8$, $\lambda_{3,4} = 0.7$; A on diagonalisoituva.

$A = X D X^{-1}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x_{n+1} = Ax_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ eli $x_n = A^n x_0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n = X D^n X^{-1} x_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.05(0.8)^n \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1(0.7)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (0.25 \; 0.25 \; 0.25 \; 0.25)^T$$

4 Vektorit, suorat ja tasot

4.1 Koordinaatisto

Koordinaatisto muodostetaan kiinnittämällä origo ja kantavektor
Pisteavaruudessa E^3 siis $\{O, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$.

Huom! Teemme pedanttisesti eron $\mathbb{R}^3$:n ja E^3:n välille.
Materiaalin ymmärtämisen kannalta erottelulla ei varsinaisesti ole mitään merkitystä.

Vektorisysteemille $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ E^2:ssa, $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ E^3:ssa voidaan määritellä suunnistus, joka on joko positiivinen tai negatiivinen.

Tasossa: Jos $\underline{a}$ kiertyy $\underline{b}$:n päälle vastapäivään lyhintä reittiä, on $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ suunnistettu positiivisesti.

Avaruudessa: $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$, oikean käden sääntö:
(P, E, K)

Tavallisesti käytössä $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, joka on ortonormeerattu positiivisesti suunnistettu kanta.

Seuraavassa tavoitteena on yhdistää E^3:n luonnollinen geometria $\mathbb{R}^3$:n luonnollisiin laskutoimituksiin.

Piste P voidaan esittää yhtäpitävästi muodoissa

$$P \mathrel{\hat{=}} \underline{r} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k} \mathrel{\hat{=}} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Skalaaritulo

Määritelmä 4.2.1

Vektoreiden $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ skalaaritulo eli sisätulo on

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{cases} |\underline{a}||\underline{b}| \cos \sphericalangle(\underline{a}, \underline{b}), & \text{jos } \underline{a} \neq \underline{0} \text{ ja } \underline{b} \neq \underline{0} \\ 0, & \text{jos } \underline{a} = \underline{0} \text{ tai } \underline{b} = 0 . \end{cases}$$

Vektorit ovat kohtisuorassa, jos $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ eli $\underline{a} \perp \underline{b}$.

Lause 4.2.2

Olkoon $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ avaruuden kanta, ortonormeerattu, ja

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k} \;\hat{=}\; a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{b} = \beta_1 \underline{i} + \beta_2 \underline{j} + \beta_3 \underline{k} \;\hat{=}\; b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Tällöin on

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a^T b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 .$$

Saamme siis $\mathbb{R}^n$:n vektoreille sisätulon ja välisen kulman:

$$x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (x \mid y) = x^T y = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k .$$

4.3 Vektoritulo

Vektoritulo voidaan muodostaa vain avaruudessa.

Määritelmä 4.3.1

Olkoot $\underline{a}, \underline{b} \in E^3$. Vektori- eli ristitulo on vektori $\underline{a} \times \underline{b}$, jolle pätee:

1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \sphericalangle(\underline{a}, \underline{b})$
2) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$
3) vektorit $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

Jos $\underline{a} = \underline{0}$ tai $\underline{b} = \underline{0}$, on $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$.

Vektoritulo ei siis ole

a) vaihdannainen: $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

b) liitännäinen: $(\underline{i} \times \underline{j}) \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$

$\underline{i} \times (\underline{j} \times \underline{j}) = \underline{i} \times \underline{0} = \underline{0}$

Ortonormeeratussa oikeakätisessä kannassa vektoritulo saa yksinkertaisen muodon:

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k}, \quad \underline{b} = \beta_1 \underline{i} + \beta_2 \underline{j} + \beta_3 \underline{k}$$

Aputaulukko: $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \quad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \quad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

$\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}, \quad \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}, \quad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$

Jolloin

$$\begin{aligned}\underline{a} \times \underline{b} = {} & \alpha_1\beta_1\, \underline{i} \times \underline{i} + \alpha_1\beta_2\, \underline{i} \times \underline{j} + \alpha_1\beta_3\, \underline{i} \times \underline{k} \\ & + \alpha_2\beta_1\, \underline{j} \times \underline{i} + \alpha_2\beta_2\, \underline{j} \times \underline{j} + \alpha_2\beta_3\, \underline{j} \times \underline{k} \\ & + \alpha_3\beta_1\, \underline{k} \times \underline{i} + \alpha_3\beta_2\, \underline{k} \times \underline{j} + \alpha_3\beta_3\, \underline{k} \times \underline{k} \\ = {} & (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\, \underline{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\, \underline{j} \\ & + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\, \underline{k}\end{aligned}$$

Mutta, tämähän on vanha tuttu:

<u>Lause 4.3.2</u>

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Toisaalta, vektoritulon voisi määritellä toisin:

<u>Määritelmä 4.3.3</u>

$$\underline{a} \times \underline{b} \mathrel{\hat{=}} A^{\times} b = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

<u>Lause 4.3.4</u> Laskuominaisuudet

(i) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

(ii) $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

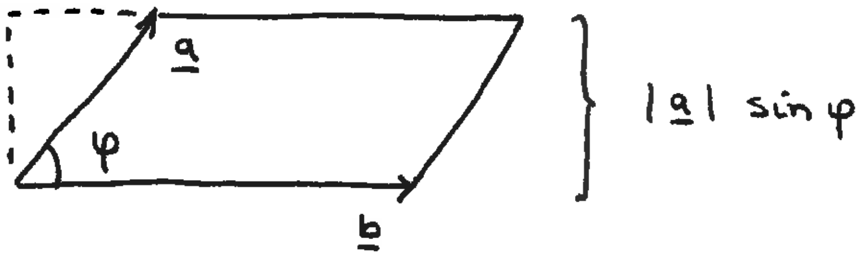
(iii) $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{c})$

(iv) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$

Lause 4.3.5

Vektoreiden $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ virittämän suunnikkaan ala on $|\underline{a} \times \underline{b}|$.

Todistus



Määritelmästä: $|\underline{a}||\underline{b}| \sin\varphi = |\underline{a} \times \underline{b}|$. $\square$

Tulos pätee myös, jos rajoitutaan tasoon:

$$\underline{a} \hat{=} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ 0)^T, \quad \underline{b} \hat{=} (\beta_1 \ \beta_2 \ 0)^T$$

$$|A^{\times} b| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|.$$

4.4. Vektorialgebraa

Lause 4.4.1

Vektoreiden skalaarikolmitulo lasketaan lausekkeista

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Pätee: $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = [\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}] = [\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}]$.

Todistus

$$\underline{b} \times \underline{c} = (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)\,\underline{i} + (\beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1)\,\underline{j}$$

$$+ (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\,\underline{k}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c} \in \mathbb{R} \; ; \quad \underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Determinantin ominaisuuksien nojalla:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c} = \det(a\ b\ c) = \det(c\ a\ b) = \det(b\ c\ a)$$

$$\det(c\ a\ b) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

$\square$

Lause 4.4.2

Vektoreiden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus on $|[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]|$.

Todistus

Tilavuus: Pohjan ja korkeuden tulo

$$|\underline{a} \times \underline{b}||\underline{c}| \cos \psi = |\underline{a} \times \underline{b}||\underline{n}^\circ \cdot \underline{c}|$$ 33

$$= |\underline{a} \times \underline{b}| \left| \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} \cdot \underline{c} \right| = |\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c}|$$

$\square$

Lause 4.4.3

Vektorit $\underline{a} \hat{=} a$, $\underline{b} \hat{=} b$, $\underline{c} \hat{=} c$ ovat positiivisesti suunnistetut, negatiivisesti suunnistetut tai lineaarisesti riippuvat sen mukaan, onko determinantti $\det(a\ b\ c)$ positiivinen, negatiivinen tai nolla.

4.5 Koordinaatiston vaihto

Olkoon annettuna kaksi koordinaatistoa:

$$\{O, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}, \quad \{O', \underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_3\}$$

Olkoon origon O paikkavektori pilkutetussa koordinaatistossa $\underline{r}_0$. Kannan määritelmän nojalla:

$$\underline{r}_0 = \sum_{k=1}^{3} \rho_k \underline{b}'_k \quad , \quad \underline{b}_j = \sum_{k=1}^{3} \tau_{kj} \underline{b}'_k \; , \quad j = 1, 2, 3 .$$

Huomaa implisiittinen transponointi: τ_{kj}. Tämä on ns. valistunut arvaus.

Mielivaltainen avaruuden piste P voidaan esittää yksikäsitteisesti kummassakin koordinaatistossa:

$$\underline{r} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k \underline{b}_k \quad , \quad \underline{r}' = \sum_{k=1}^{3} \xi'_k \underline{b}'_k .$$

Nyt $\underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{r}$ eli koordinaatistojen välille saadaan yhteys:

$$\sum_{k=1}^{3} \xi'_k \underline{b}'_k = \underline{r}_0 + \sum_{j=1}^{3} \xi_j \underline{b}_j$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \rho_k \underline{b}'_k + \sum_{j=1}^{3} \xi_j \sum_{k=1}^{3} \tau_{kj} \underline{b}'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \rho_k \underline{b}'_k + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \tau_{kj} \xi_j \underline{b}'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left(\rho_k + \sum_{j=1}^{3} \tau_{kj} \xi_j \right) \underline{b}'_k$$

Koordinaatit ovat yksikäsitteiset; kannassa $\{\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_3\}$

$$\xi'_k = \rho_k + \sum_{j=1}^{3} \tau_{kj} \xi_j \; , \quad k = 1, 2, 3$$

eli $\quad x' = x_0 + Tx .$

Puhtaasti matriisialgebran avulla:

$$x' = x_0 + Tx \iff x = -T^{-1}x_0 + T^{-1}x'$$

Muunnosmatriisi toiseen suuntaan: $S = T^{-1}$,

mistä $x = -Sx_0 + Sx'$.

S:n olemassaolo seuraa siitä, että kannan vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Mikäli kannat ovat ortonormeerattuja, on koordinaatiston-muunnosmatriisi ortogonaalinen ja $\det(T) = \pm 1$.

Esimerkki 4.5.1

Olkoon $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ avaruuden kanta ja

$$\begin{cases} \underline{b}'_1 = 2\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 + 7\underline{b}_3 \\ \underline{b}'_2 = \underline{b}_2 + 9\underline{b}_3 \\ \underline{b}'_3 = 6\underline{b}_1 + 8\underline{b}_2 \end{cases}$$

Varmista, että $\{\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_3\}$ on kanta.

Määritä luvut α ja β s.e. vektorin $\underline{v} = \alpha\underline{b}'_1 + \beta\underline{b}'_2 + \underline{b}'_3$ koordinaatit kannassa $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ ovat keskenään yhtäsuuret.

Koordinaateille: $x = Sx'$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$; $\det(S) = -78$ Kanta!

$\underline{v}$:n koordinaatit: $S\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 6 \\ 2\alpha + \beta + 8 \\ 7\alpha + 9\beta \end{pmatrix}$

Samat koordinaatit:

$$\begin{cases} 2\alpha + 6 = 2\alpha + \beta + 8 \\ 2\alpha + 6 = 7\alpha + 9\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{24}{5}, \ \beta = -2$$

5 Suorien ja tasojen geometriaa

5.1 Suorien ja tasojen yhtälöt

Suora: $\underline{r} = \underline{r}_0 + \tau \underline{t}$, $\underline{t} \neq \underline{0}$, $\tau \in \mathbb{R}$

Taso: $\underline{r} = \underline{r}_0 + \sigma \underline{s} + \tau \underline{t}$, $\underline{s}, \underline{t} \neq \underline{0}$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$

Toisaalta, tason suora voidaan kiinnittää, jos tunnetaan piste, jonka kautta se kulkee, sekä sen normaali:

$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0 .$$

Merkitään: $\underline{n} = n_1 \underline{i} + n_2 \underline{j}$, $\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j}$

Sijoittamalla suoran yhtälöön ja sopimalla $d = \underline{n} \cdot \underline{r}_0$, saadaan suoran koordinaattimuoto:

$$n_1 x + n_2 y = d .$$

Vastaavasti tasolle: $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$

eli

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d .$$

Koordinaattimuodosta tason normaalin voi lukea suoraan, parametrimuodosta: $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{t}$

Avaruuden suora on kahden tason leikkaussuora:

$$\begin{cases} \underline{n}_1 \cdot (\underline{r} - \underline{r}_1) = 0 \\ \underline{n}_2 \cdot (\underline{r} - \underline{r}_2) = 0 \end{cases}$$

Yksinkertaista koordinaattimuotoa ei siis ole.

Kaksi avaruuden suoraa voivat suhtautua toisiinsa kolmella tavalla: Ne joko

1) leikkaavat yhdessä pisteessä
2) ovat yhdensuuntaisia
3) ovat ristikkäisiä

Esimerkki 5.1.1

$$2x - 5y = 7 \quad ; \text{ valitaan } x = \tau \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\tau$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \tau \underline{t} \,, \quad \underline{r}_0 = -\frac{7}{5}\underline{j} \,, \quad \underline{t} = \underline{i} + \frac{2}{5}\underline{j} \,, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

Esimerkki 5.1.2

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ratkaistaan t ja sijoitetaan:

$$x - 1 = \frac{1}{2}(y+2) \Leftrightarrow 2x - y = 4$$

Esimerkki 5.1.3

Tulkitse:
$$\begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = -1 + 3s + 2t \\ z = 3 - s + t \end{cases}$$

Parametrit on siis eliminoitava. Voimme olla siirtymättä muodon $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{t}$, $\underline{r}_0 = 2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$ kautta!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

Eliminoidaan s ja t, konsistenssiehdon on oltava jokin yhtälö!

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & -1 & y \\ -1 & 1 & 3 & z \end{array} \; -\frac{3}{2} \;\; \frac{1}{2} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 & y - \frac{3}{2}x \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & z + \frac{1}{2}x \end{array} \; -3 \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 & y - \frac{3}{2}x \\ 0 & 0 & 16 & 5x - 3y + \end{array}$$

Tason yhtälö on siis: $5x - 3y + z = 16$

Esimerkki 5.1.4

Pisteen P_1 kohtisuora etäisyys suorasta tai tasosta $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$.

Kaksi lähestymistapaa: 1) projisiointi
2) trigonometrinen päättely

1) Etsitään P_1:n projektiopiste P_2 suoralla (tasolla) s
$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0.$$

Projektiopiste P_2 sijaitsee P_1:n kautta kulkevan s:n normaalin ja s:n leikkauspisteenä.
Merkitään tätä normaalisuoraa: $\underline{r} = \underline{r}_1 + \tau \underline{n}$.

Piste P_2 toteuttaa molemmat yhtälöt; sijoitetaan:
$$\underline{n} \cdot (\underline{r}_1 + \tau \underline{n} - \underline{r}_0) = 0,$$
mistä ratkaistaan $\tau = -\dfrac{\underline{n} \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)}{\underline{n} \cdot \underline{n}}$ eli
$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 - \frac{\underline{n} \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)}{|\underline{n}|^2}\underline{n}.$$
Lopulta etäisyydeksi saadaan $d = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = \dfrac{|\underline{n} \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)|}{|\underline{n}|}$

2) $d = |\underline{r}_1 - \underline{r}_0| \, |\cos \sphericalangle (\underline{r}_1 - \underline{r}_0, \underline{n})|$
$$= \frac{|\underline{n} \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)|}{|\underline{n}|}$$

Jos suoran yhtälö olisi annettu muodossa $\underline{r} = \underline{r}_0 + \tau \underline{t}$, pätee:
$$d = |\underline{r}_1 - \underline{r}_0| \, |\sin \sphericalangle (\underline{r}_1 - \underline{r}_0, \underline{t})| = \frac{|(\underline{r}_1 - \underline{r}_0) \times \underline{t}|}{|\underline{t}|}$$

Avaruuden suora voidaan antaa myös muodossa

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s} = \frac{z - z_0}{t},$$

missä on oletettu suorakulmainen, oikeakätinen koordinaatisto.
Suuntavektori saa mukavan muodon :

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{r} = \dfrac{y - y_0}{s} \\ \dfrac{y - y_0}{s} = \dfrac{z - z_0}{t} \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} sx - ry = sx_0 - ry_0 \\ ty - sz = ty_0 - sz_0 \end{cases},$$

kaksi tasoa ; lasketaan normaal.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ s & -r & 0 \\ 0 & t & -s \end{vmatrix} = s\underbrace{(r\underline{i} + s\underline{j} + t\underline{k})}_{\text{suoran suuntavektori } \underline{t}}$$

Esimerkki 5.1.5

Olkoon annettuna kaksi suoraa, s_1 ja s_2 :

$$s_1 : \quad x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad ; \quad \underline{t} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$s_2 : \quad \underline{r} = (\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}) + \tau(\underline{i} + \underline{j})$$

Etsitään suorien lähinnä toisiaan olevat pisteet.

Piste P_1 suoralla s_1 : $\underline{r}_1 = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k} + \xi(\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k})$

P_2 s_2 : $\underline{r}_2 = \underline{i} - \underline{j} + k + \eta(\underline{i} + \underline{j})$

Pienin etäisyys saavutetaan, kun erotus $\underline{r}_1 - \underline{r}_2$ on kohtisuorassa kumpaankin suoraan s_1, s_2 vastaan :

$$\begin{cases} \underline{t}_1 \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = 14\xi - 3\eta + 4 = 0 \\ \underline{t}_2 \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = 3\xi - 2\eta + 2 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan : $\xi = -\dfrac{2}{19}$, $\eta = \dfrac{16}{19}$