

BÖJNING AV EN BALK

1 Inledning

Då en homogen jämntjock stav töjs med en kraft F i stavens riktning, beskrivs spänningen σ på ett godtyckligt avstånd från stödpunkten som

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

där A är stavens tvärsnittsytta. Ifall kraften F på ett avstånd l_0 orsakar töjningen Δl , kan den relativa töjningen beräknas som

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2)$$

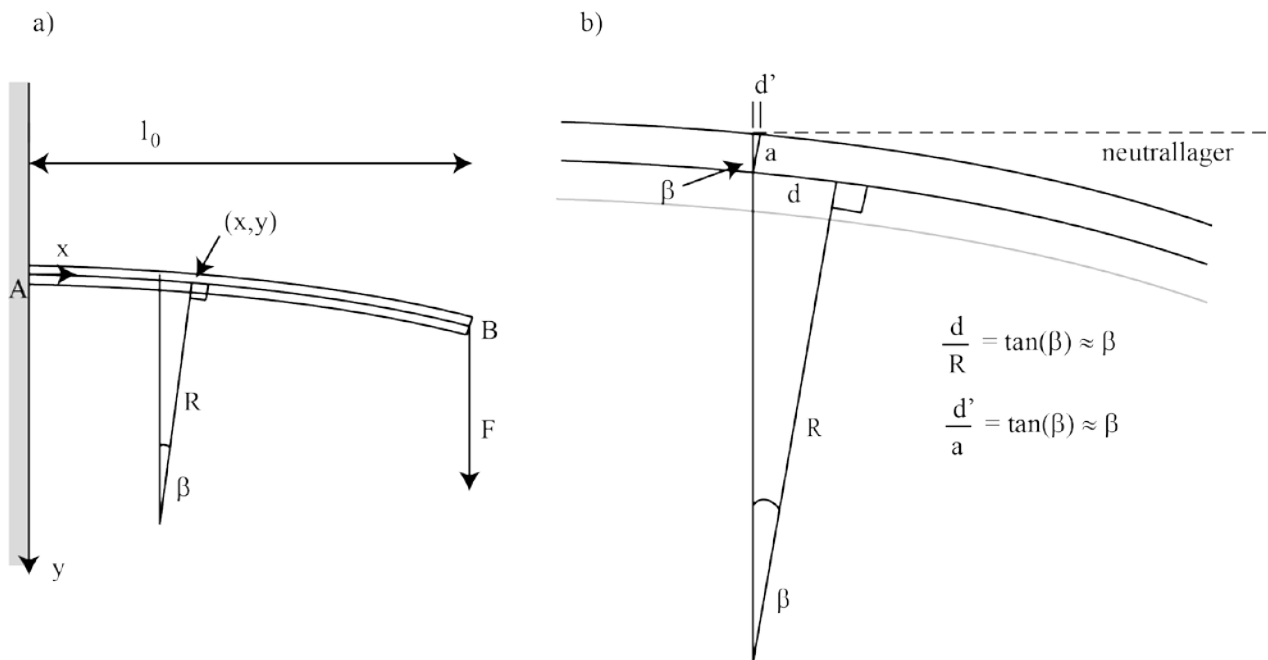
Materialets elasticitetsmodul definieras som förhållandet mellan spänningen och den relativa töjningen

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3)$$

För stavens töjning Δl gäller att

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{F}{A} l_0. \quad (4)$$

Elasticitetsmodulen kan således bestämmas genom att påverka staven med en känd kraft F och mäta stavens töjning. Kraften ger dock upphov till förhållandevis små töjningar varför elasticitetsmodulen i detta laboratoriearbete bestäms genom att böja staven.



Figur 1. a) Böjning av staven, b) uppskattning av stavens töjning med hjälp av böjningsvinkeln.

Antag att ena ändan av en stav med längd l_0 är fäst, medan den andra belastas av en kraft F (figur 1a). Vidare antag att stavens tvärsnittsytta S är konstant för hela längden på staven och symmetrisk i förhållandet till det plan i vilken belastningen sker (bild 2). Då staven böjs, töjs de övre lagren ut medan de undre lagren pressas ihop. Lagret mitt i staven töjs ej. I figur 1a är detta det s.k. neutrallagret AB. Vidare kan det visas att neutrallagret vid jämnvikt går genom tvärsnittets tyngdpunkt (då summan av kraften som påverkar tvärsnittsplanet är noll).

Låt oss betrakta ett lager i staven på ett godtyckligt avstånd a från neutrallagret (figur 1b). Om neutrallagrets krökningsradie i denna punkt är R , fås den relativa töjningen för lagret med en längd d på avståndet a med hjälp av figur 1b

$$\varepsilon = \frac{d'}{d} = \frac{a}{R} \quad (5)$$

då det antas att stavens tvärsnittsytter förblir yttor då staven böjs. Spänningen som motsvarar töjningen ε är enligt formel (3)

$$\sigma = E \frac{a}{R} \quad (6)$$

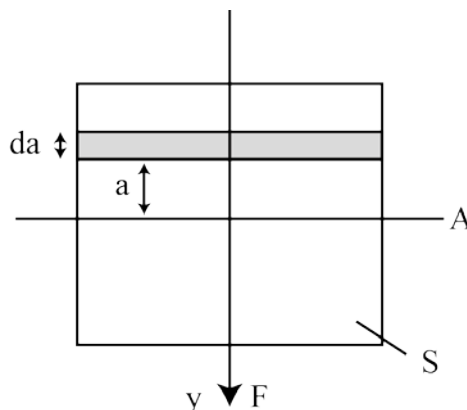
I jämnvikt är kraftmomentet orsakat av spänningen

$$M(x) = \int_S \sigma a dA = \frac{E}{R(x)} \int_S a^2 dS = \frac{E}{R} I_S \quad (7)$$

genom punkt x i förhållande till axel A (i figur 1 lodrät mot papprets plan) till sitt absolutbelopp samma som momentet för kraften F och för stavens tyngd i förhållande till dess axel. Integralen

$$I_S = \int_S a^2 dS \quad (8)$$

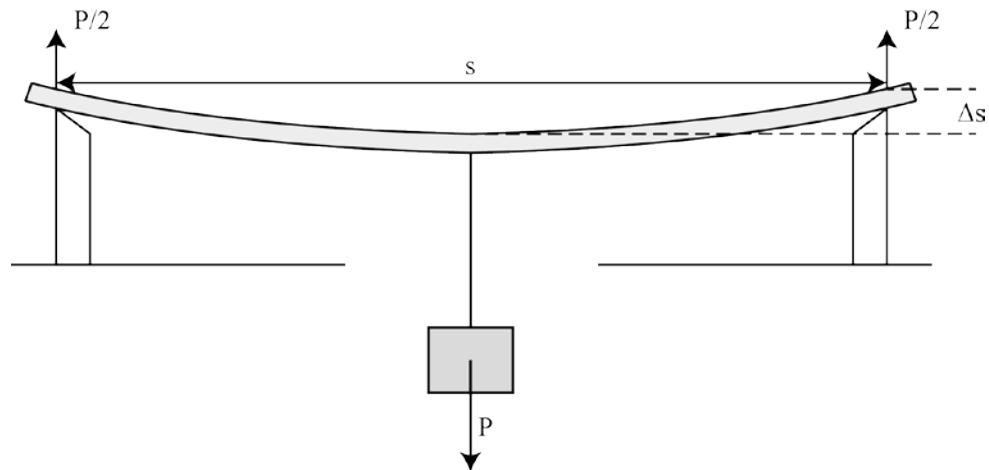
är tvärsnittsyttans böjtröghetsmoment, d.v.s. yttröghetsmomentet vid yttan i förhållandet till axeln genom tyngdpunkten. Värdet på det axiala böjtröghetsmomentets I_S beror på formen på yttan S och på axelns läge.



Figur 2. Stavens tvärsnitt på avstånd x från stavens fästpunkt.

Stavens krökningsradie varierar i olika punkter på staven. På basis av krökningen fås för böjningen på staven vid l_0 [1]

$$y(l_0) = \frac{F}{EI_S} \frac{l_0^3}{3} \quad (9)$$



Figur 3. Beskrivning av konstruktionen för böjandet av staven.

Staven som undersöks i laboratoriearbetet balanserar på två stöd på avståndet S från varandra (bild 3). Staven belastat i mitten med kraften P . Bägge stöd orsakar en kraft $P/2$ vid stavens ändor. Det går lika bra att föreställa sig att staven är fäst vid belastningspunkten och att krafterna $P/2$ böjer staven uppåt på avståndet $s/2$ från fästpunkten.

Ifall spänningar i tvärsnittets riktning ej beaktas, kan absolutbeloppet för avvikelserna Δs som belastningen P orsakar beräknas genom att i ekvation (9) sätta $F=P/2$ och $l=s/2$;

$$\Delta s = \frac{s^3}{48EI_S} P. \quad (10)$$

I arbetet mäts avvikelserna Δs för många olika värden på belastningen P . Ifall förhållandet mellan kraften P och avvikelserna Δs är linjärt, kan elasticitetsmodulen E bestämmas t. ex. grafiskt. Staven tyngd behöver ej vara känd då avvikelserna som tyngden orsakar endast leder till en addering av en konstant i ekvation (10).

2 Målsättningar

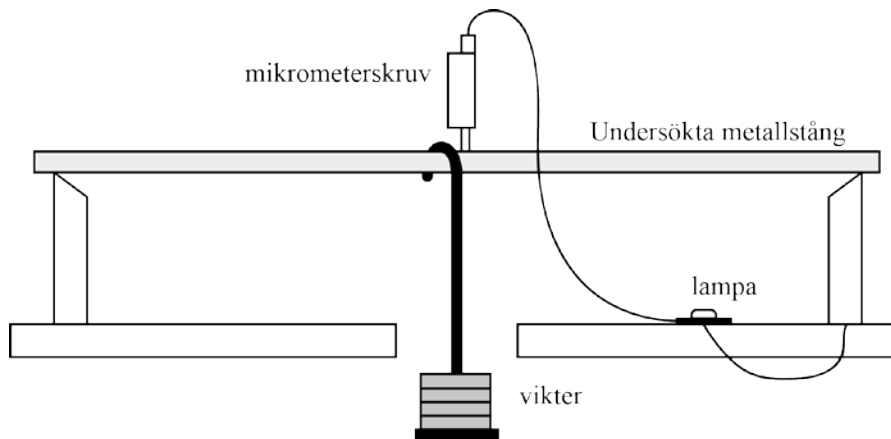
Efter att ha utfört laboratoriearbetet

- kan studeranden förklara hur formen på stavens tvärsnitt påverkar stavens böjning
- kan studeranden förklara vad som menas med elasticitetsmodul
- kan studeranden bestämma böjtröghetsmomentet d.v.s yttretröghetsmomentet för en enkel stav
- har studeranden övat på framställandet av mätresultaten grafiskt och anpassandet av en rak linje till mätdata

3 Apparatur

I detta arbete studeras stångars böjning genom mätanordningen beskriven i figur (4) där en ca en meter lång stång stöds i ändorna med hjälp av flyttbara stöd. I mitten på stången hängs en behållare i vilken vikter kan fästas. Belastningen på stången ändras genom att lägga på vikter. Stångens böjning mäts med en mikrometerskruv fäst i mätapparaturen. Då mikrometerskraven rör i mätapparaturen sluts strömkretsen och lampan tänds. Genom att lampan tänds kan stångens och mikrometerskrovens beröringspunkt bestämmas

exakt. Förutom mätapparaturen behövs ett rullmått för att bestämma avståndet mellan stångens stöd samt ett skjutmått för att bestämma stångens tvärsnittsmått. Dessa verktyg fås av assistenten.



Figur 4. Mätutrustning som används i arbetet.

4 Förhandsuppgifter

Bekanta dig med teorin som hör till arbetet i valfri fysiklärobok (t.ex. [2-4]), läs igenom arbetsinstruktionen och besvara frågorna nedan på svarsblanketten.

1. Vad menas med den böjda stångens neutrallager?
2. Förklara vad som menas med böjtröghetsmoment och härled uttrycket för en rektangulär balks böjtröghetsmoment.
3. I arbetet mäts och ritas balkens böjning Δs som funktion av belastningen P samt anpassas en linje till resultaten ($y = kx + b$). Vad är vinkelkoefficienten k för denna linje enligt ekvation (10)? Ge en ekvation för k och lös ur denna elasticitetsmodulen E .
4. Bestäm med hjälp totaldifferentialen en feluppskattning för elasticitetsmodulen E från ekvation du erhöll i föregående punkt. Av variablerna bör du beakta vinkelkoefficienten k , böjtröghetsmomentet I_s samt stödpunkternas avstånd s . (Tips: I det här fallet är det lättare att beräkna det relativa felet)

5 Mätningar

Alla mätresultat och svaren på förhandsuppgifterna antecknas på svarsblanketten som fås av assistenten. Användning av blyertspenna rekommenderas. Svarsblanketten returneras slutligen åt assistenten.

1. Väg massorna och behållaren på vågen. Märk att vikternas massor är olika stora! Anteckna vikternas nummer och massor på svarsblanketten.
2. Mät med hjälp av skjutmättet den rektangulärt formade stångens bredd och tjocklek. Uppskatta mätfelet genom att upprepa mätningen ett par gånger vid olika punkter på stången. Anteckna resultaten på svarsblanketten.
3. Placera den undersökta stången på stöden. Försäkra dig om apparaturens funktionsduglighet genom att kontrollera att lampan lyser då mikrometerskruv rör den undersökta stången.
4. Mät avstånden mellan stångens stöd och anteckna värdet på svarsblanketten.

5. **Gör en hypotes och anteckna den på svarsblanketten:** I vilken ställning böjs staven med rektangulär tvärsnittsytta mera? Varför?
6. **Före den egentliga mätningen:** Testa din hypotes och skriv upp dina observationer och slutsatser på svarsblanketten. Fundera på möjliga orsaker ifall hypotesen inte stämde.
7. Placera nu stången så att tvärsnittytan med den längre sidan ligger vågrätt.
8. Häng vikternas behållare mitt emellan stöden. Kontrollera behållarens läge med hjälp av rullmättet.
9. Sök en sådan inställning på mikrometerskruven där lampan just och just tänds och anteckna värdet. Märk att mikrometerskruven skall vara möjligast i mitten på stången. Anteckna mikrometerskruvens utslag på svarsblanketten.
10. Lägg på vikterna en i taget tills alla tio vikter är i behållaren och mät stångens böjning vid varje kraft som orsakar böjning. Anteckna resultaten i tabellen på svarsblanketten. Avlägsna därefter vikterna en åt gången och mät återigen böjningen vid varje belastning. Kom ihåg att lösa på mikrometerskruven före varje enskild vikt tas bort så att mikrometerskruven inte belastas i onödan.

6 Behandling av resultaten

1. Bestäm stångens bredd och tjocklek som ett medelvärde av de mätta resultaten. Bestäm också felgränser för dessa, t.ex. från variationsbredden.
2. Undersök med hjälp av mätresultaten om stången återhämtar sig. Beräkna för samtliga vikter böjningen som ett medelvärde av det mätta värdet då vikter lades på och togs bort och anteckna resultaten på svarsblanketten.
3. Rita böjningen Δs som en funktion av belastningen P . Enligt ekvation (10) skall mätpunkterna ligga på en rak linje.
4. Anpassa en rak linje till mätdata och bestäm dess vinkelkoefficient samt felmarginalen för vinkelkoefficienten.
5. Skriv ut grafen du ritat och bifoga utskriften till din svarblankett.
6. Beräkna böjtröghetsmomentet samt dess felmarginal för konfigurationen i mätningen.
7. Beräkna från böjtröghetsmomentet och vinkelkoefficienten materialets elasticitetsmodul E och bestäm dess felmarginal. Anteckna resultaten på svarsblanketten.

7 Tankeställare

1. Förklara på en allmän nivå hur böjningen påverkas av kroppens form. Varför används så mycket s.k. I-balkar i byggen?
2. Vilka felkällor påverkar felet för den använda mätanordningen mest?
3. Den böjbara stången är gjord av aluminium. Jämför dina resultat med värden från litteraturen för motsvarande elasticitetsmodul. Faller detta värde inom den beräknade felmarginalen?

Källor

- [1] E. Pennala, Lujuusopin perusteet, 9. painos, Otatiето 1994.
- [2] D.C. Giancoli, Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics 4th edition, International edition, Pearson Education, Inc, 2009.
- [3] Hugh Young, Roger Freedman, A. Lewis Ford: University Physics with Modern Physics. International Edition. 13. upplagan. Pearson Education, 2011.

- [4] Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics Extended, Extended 9th edition, International Student Version, Wiley & Sons, Inc., 2011.