Aalto University
School of Science

PHYS-A5120 Termodynamik Laboratoriearbeten

Aalto University
School of Science

Innehåll

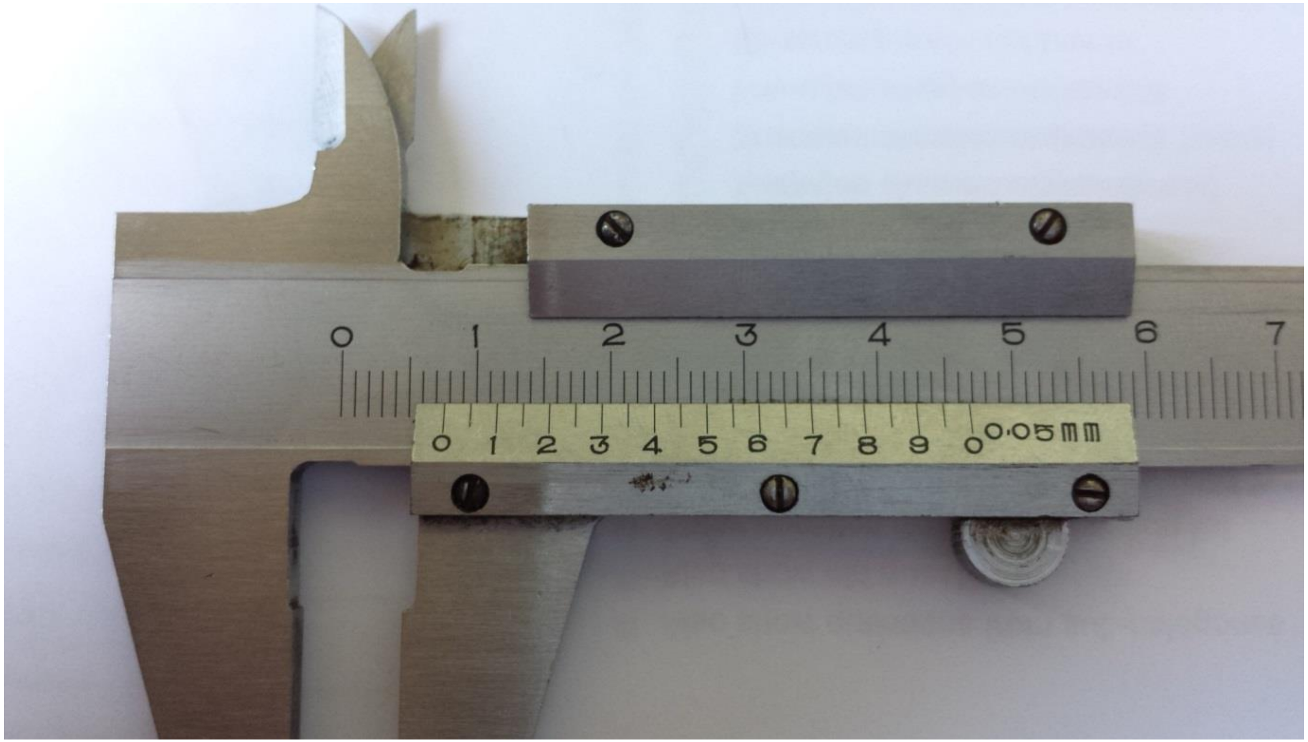
1. Användning av mätinstrument

2. Analyserandet av mätresultat och bestämmandet av mätfel
   - Olika typer av fel
   - Olika sätt att utföra mätningar
   - Anpassning av funktioner
   - Sammansatta fel

Aalto University
School of Science

1. Användning av mätinstrument

1. Hur avläses ett skjutmått?



Vad visar skjutmåttet?

a. 0,705 cm
b. 0,775 cm
c. 0,550 cm
d. 0,605 cm

2. Hur avläses ett millimetermått?

<u>Vad visar millimetermåttet?</u>

a. 48,20 mm
b. 20,98 mm
c. 98,20 mm
d. 20,48 mm

Aalto University
School of Science

2. Analyserandet av mätresultat och bestämmandet av mätfel

Olika sätt att utföra mätningar

- **Engångsmätning**
  - Ett enda mätresultat
- **Upprepade mätningar**
  - Resultatet som ett medeltal
- **Funktionsmätning**
  - Storheters beroendeförhållande studeras
  - Genom att anpassa en ekvation till uppmätt data kan värden eller konstanter bestämmas

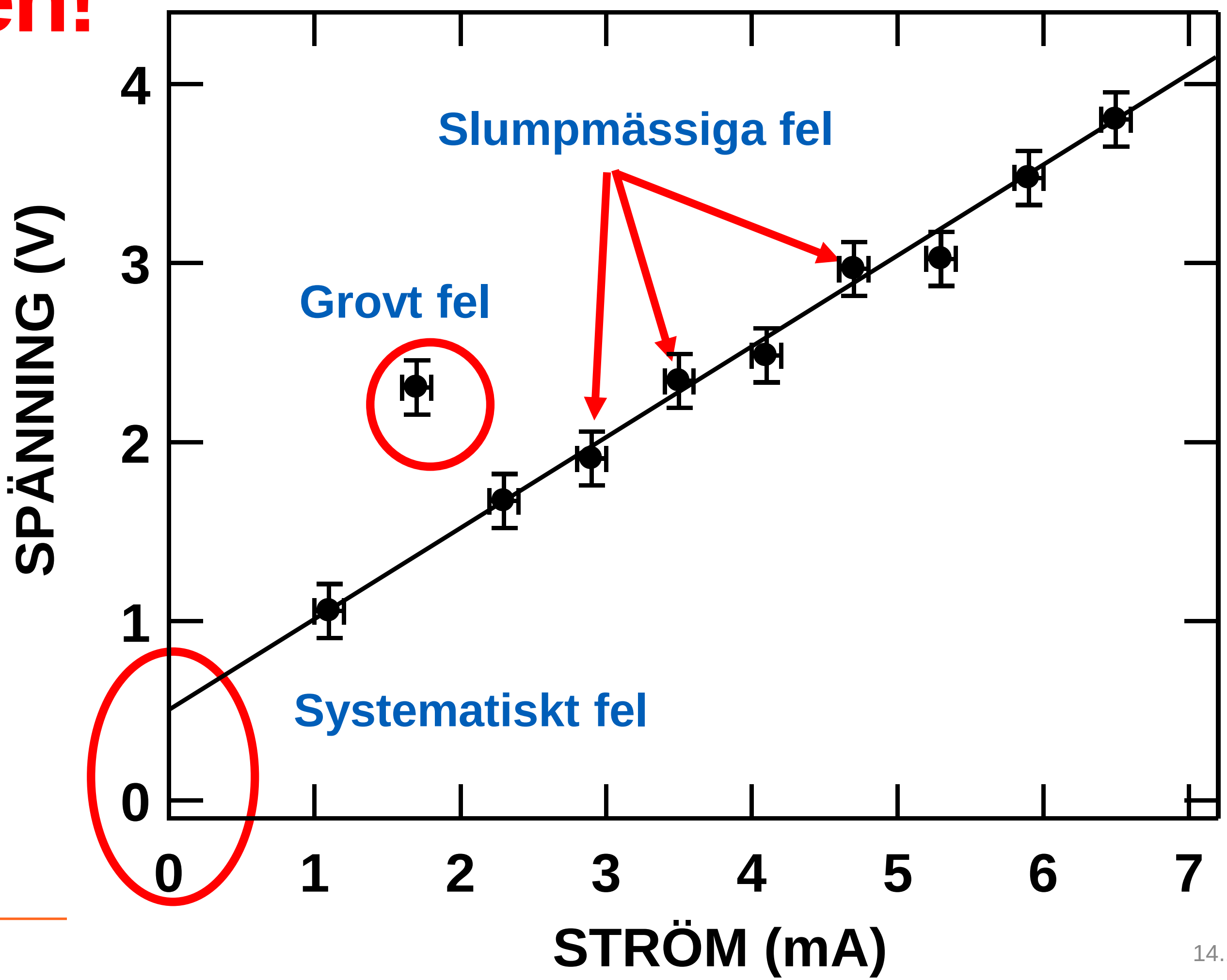
Olika sorters fel

Mätningar är alltid förknippade med inexakthet ⇒ glöm inte att vara kritiskt!

1. **Grova fel**
   – Enskild observation som avviker mycket från de andra mätvärdena.
2. **Systematiska fel**
   – Felet leder till att resultaten förvrids åt samma håll
3. **Slumpmässiga fel**
   – Beror inte på ett mänskligt fel eller på ett fel i apparaturen
   – Storhetens värde varierar slumpmässigt från en observation till en annan => inexakthet

Namnge felen!

1. Grovt fel
2. Systematiskt fel
3. Slumpmässigt fel

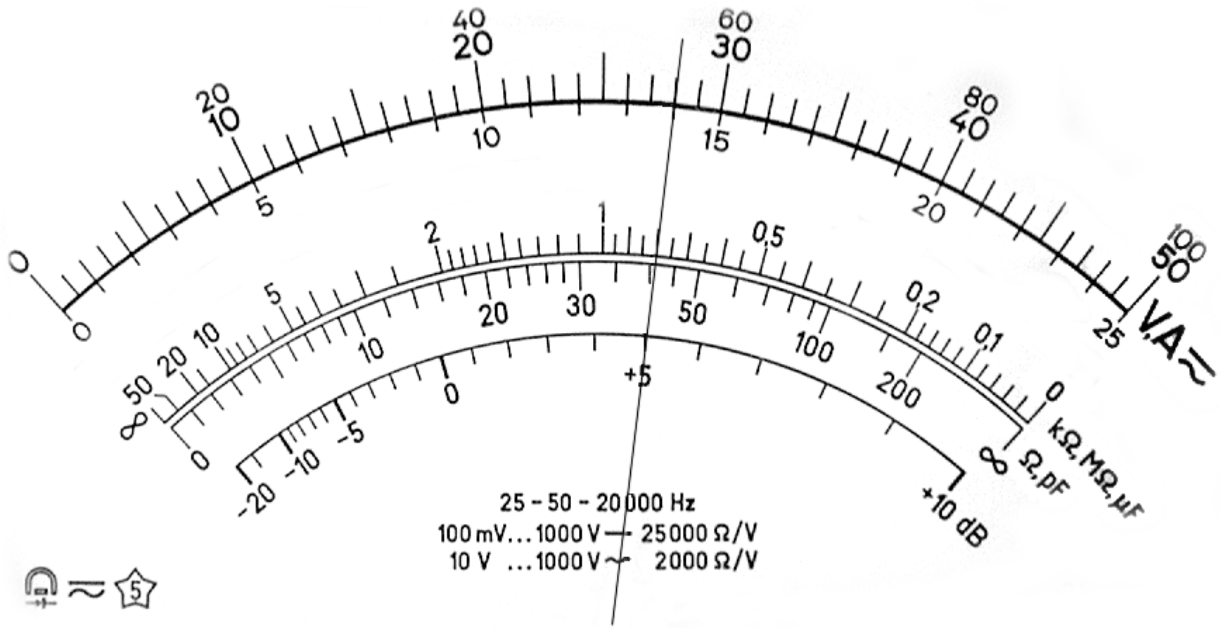


Slumpmässiga fel vs Systematiska fel

Typ av fel	Experiment	Hur kan felet minimeras?
Slumpmässiga fel	En mätning av samma klots massa ger tre olika värden: 17.46 g, 17.42 g, 17.44 g	Samla mera data, d.v.s. gör flera mätningar. Statistiska fel kan beräknas med statistiska mått och minimeras genom upprepade mätningar.
Systematiska fel	1. Längdmåttet av tyg du använder till att bestämma ett objekts längd har töjts ut med åren så att de uppmätta längderna är något för korta. 2. Den elektroniska vågen du använder visar 0,05 g för mycket vid samtliga mätningar (eftersom kärlets vikt inte är korrekt upphävt). 3. Accelerationen som gravitationen orsakar bestäms m.h.a. en pendel vars längds och period mäts. Ifall luftmotståndet, pendels massa och rörelser som stödet som pendel är fast i inte tas i beaktan blir värdet på den bestämda accelerationen inte korrekt.	Systematiska fel är svåra att detektera och kan inte analyseras genom statistiska mått. Detta p.g.a. att alla värden förskjuts i samma riktning. • Genom att ex. kalibrera mätutrustningen kan systematiska fel elimineras. • Genom att använda en mera detaljerad modell (som tar luftmotståndet m.m. i beaktan)

Engångsmätning

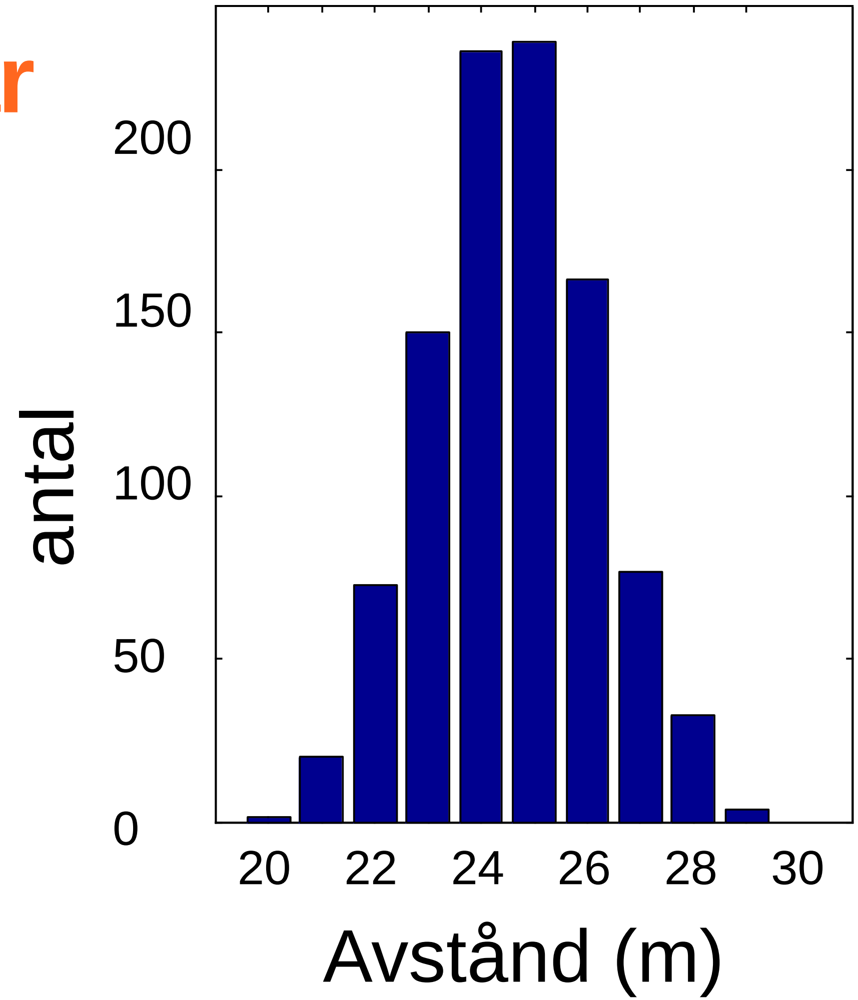
- Apparaturens fel är givet eller så uppskattas det (från t. ex. avläsningsnoggrannheten)



Upprepade mätningar

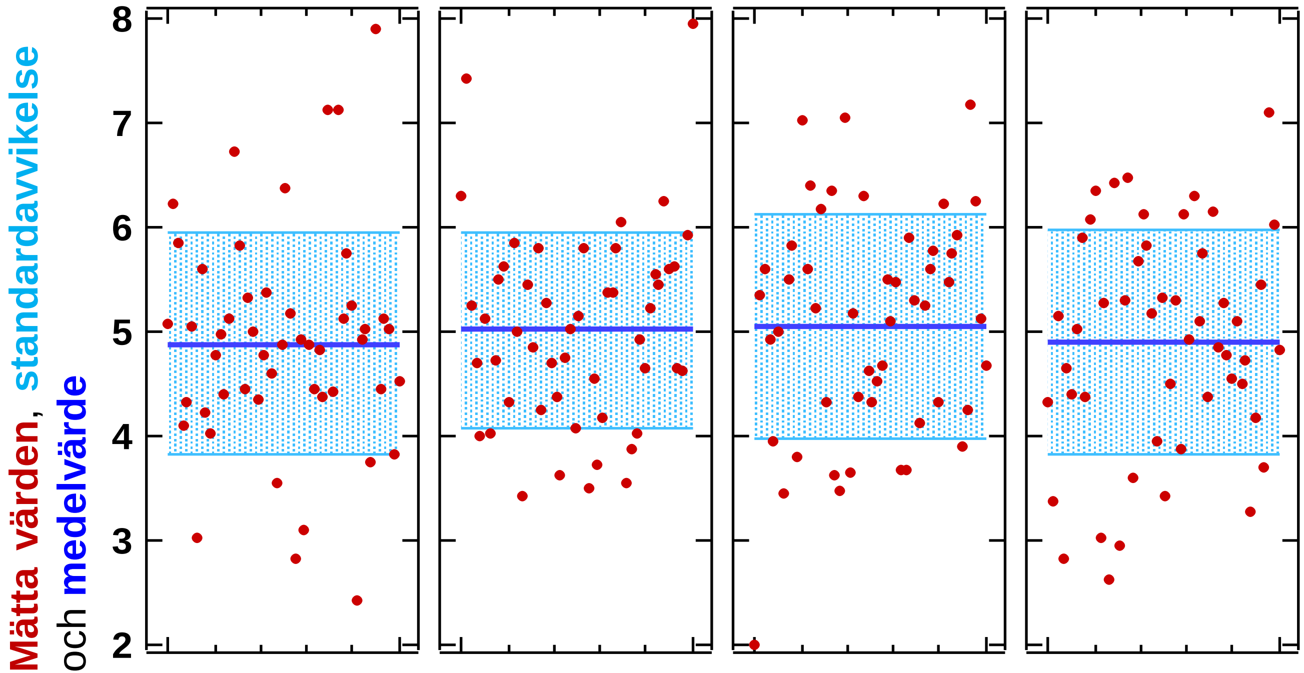
- Genom att utföra upprepade mätningar kan den mätta storhetens värde och noggrannhet utredas

- Resultaten är oftast normalfördelade då antalet upprepade mätningar är tillräckligt stort



Statistiska mått för upprepade mätningar

- Standardavvikelsen berättar inom vilket område en enskild mätning sannolikt (68%) ligger
  - Är ungefär lika stor oberoende samplets storlek
  - Svarar mot felet för en enskild mätning



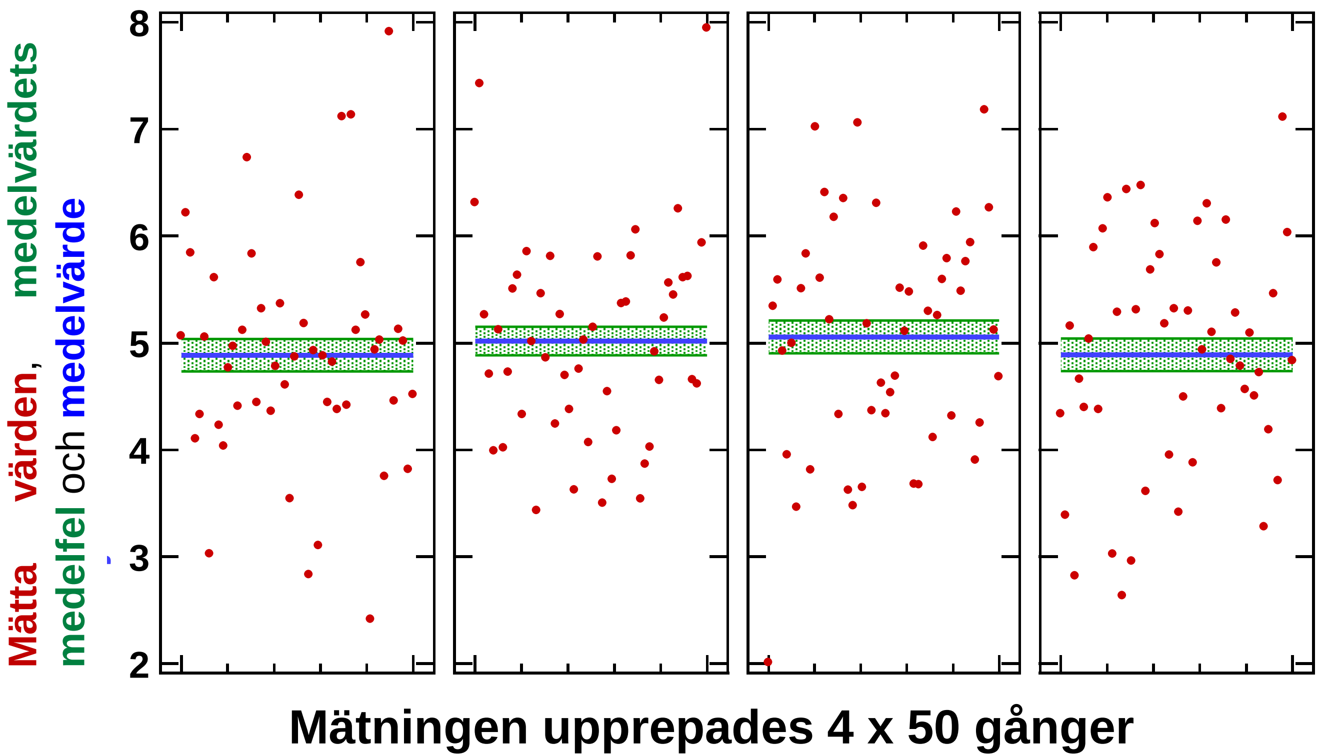
Mätningen upprepades 4 x 50 gånger

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\pm s = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$$

Statistiska mått för upprepade mätningar

- Medelvärdet varier en aning från serie till serie
- Medelvärdets medelfel berättar inom vilket område en liknande mätseries medeltal sannolikt (68%) ligger



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\pm\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N(N-1)}}$$

När kan statistiska mått användas?

- När N ≥ 10 kan medelvärdets medelfel, standardavvikelsen och dylika statistiska mått användas.
  - Felet för en mätserie fås då från medeltalets medelfel
- Då 10 > N > 1 kan felet uppskattas från t.e.x variationsintervallet.

Plankans bredd (mm)	Plankans höjd (mm)
20,043	9,980
20,040	9,995
20,068	9,970
20,045	10,003
20,043	10,020

$$felet: \frac{största\ värde\ - minstra\ värde}{2}$$

Plankans bredd: 20,05 ± 0,01 mm
Plankans höjd: 9,99 ± 0,03 mm

Funktionsmätning

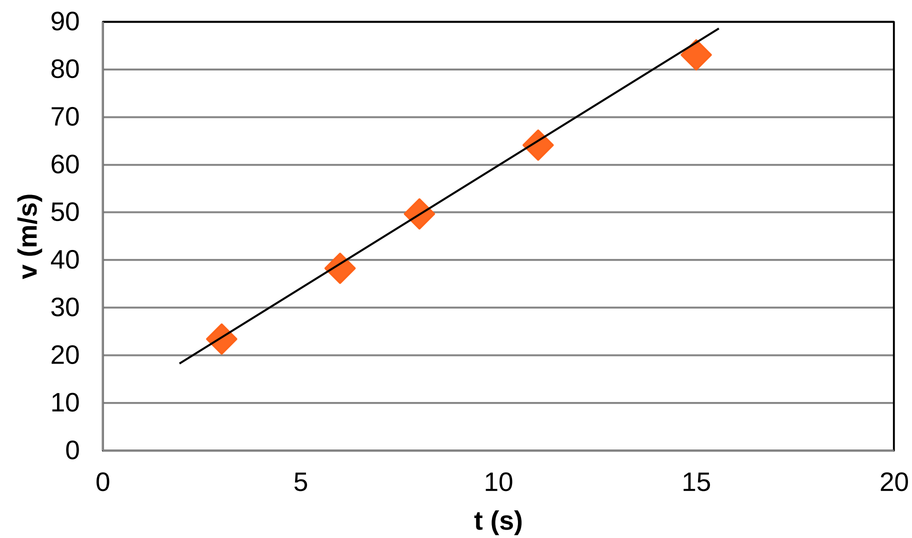
- **Beroendeförhållande mellan storheter studeras**
- **Modellers giltighet bevisas**
- **Modellens parametrar bestäms**
- **Grafiskt med ögat**
- **Anpassning med minsta kvadrat-metoden**

Anpassning av funktioner

- Mätpunkterna beror av varandra enligt

$v = at + v_o$

- Genom att rita upp förhållandet kan konstanten *a* anpassas
- Från linjens vinkekoefficient kan nu *a* lätt bestämmas



$$\boxed{y = kx + b}$$

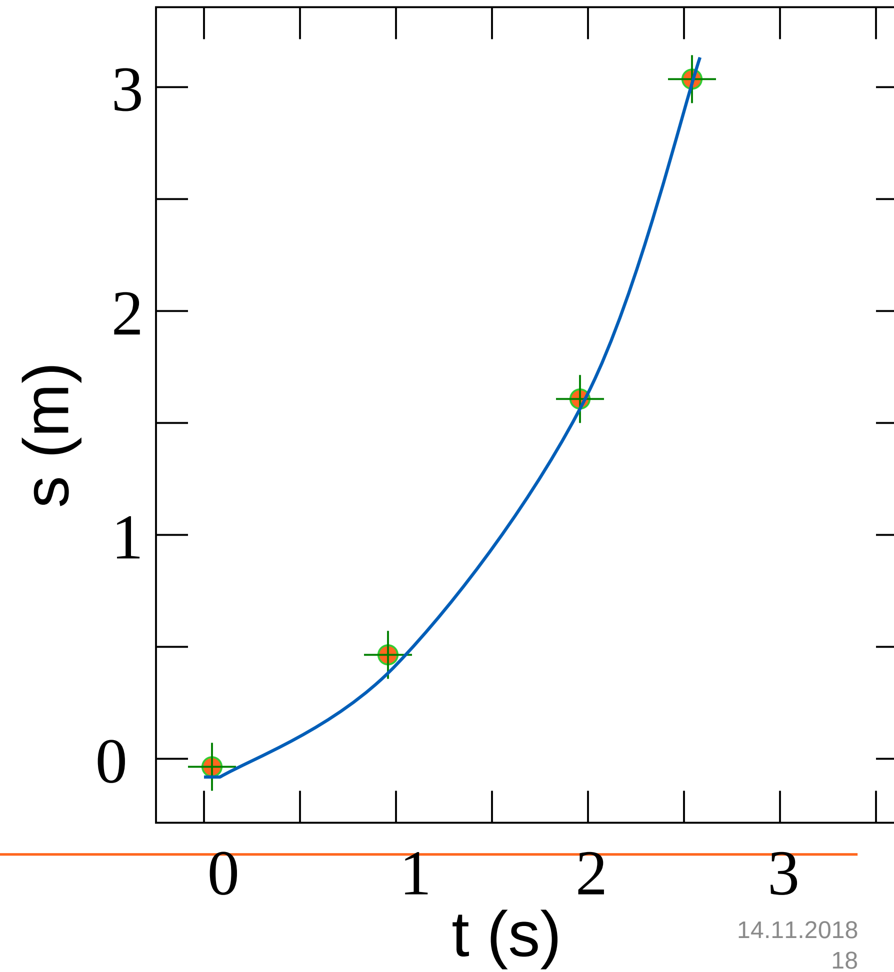
k motsvarar här a

Skall en rak linje eller en kurva ritas upp?

- Mätpunkterna beror av varandra enligt

  $s = at^2$

- Genom att rita upp förhållandet kan konstanten *a* anpassas
- Detta görs lättast genom linearisering



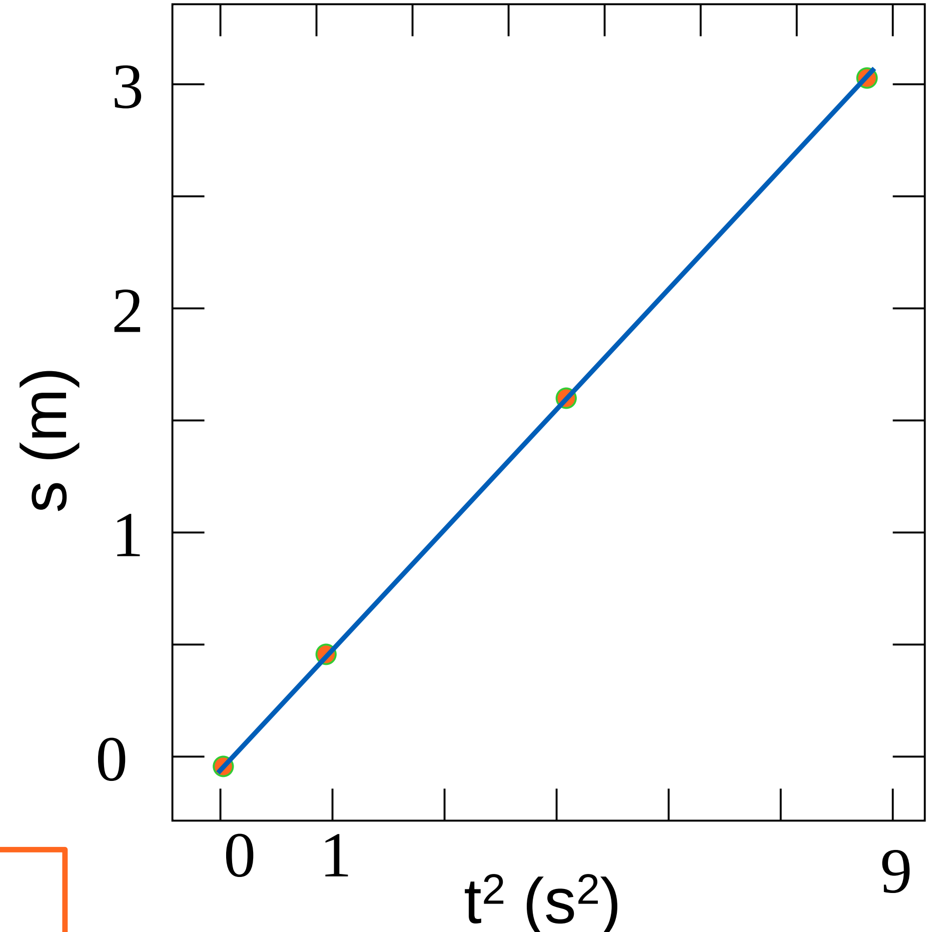
Linearisering

- Genom att rita upp *s* som funktion av t^2 kan en rak linje anpassas till mätpunkterna

- Från linjens vinkekoefficient kan nu *a* lätt bestämmas

$$\boxed{y = kx + b}$$

k motsvarar här a

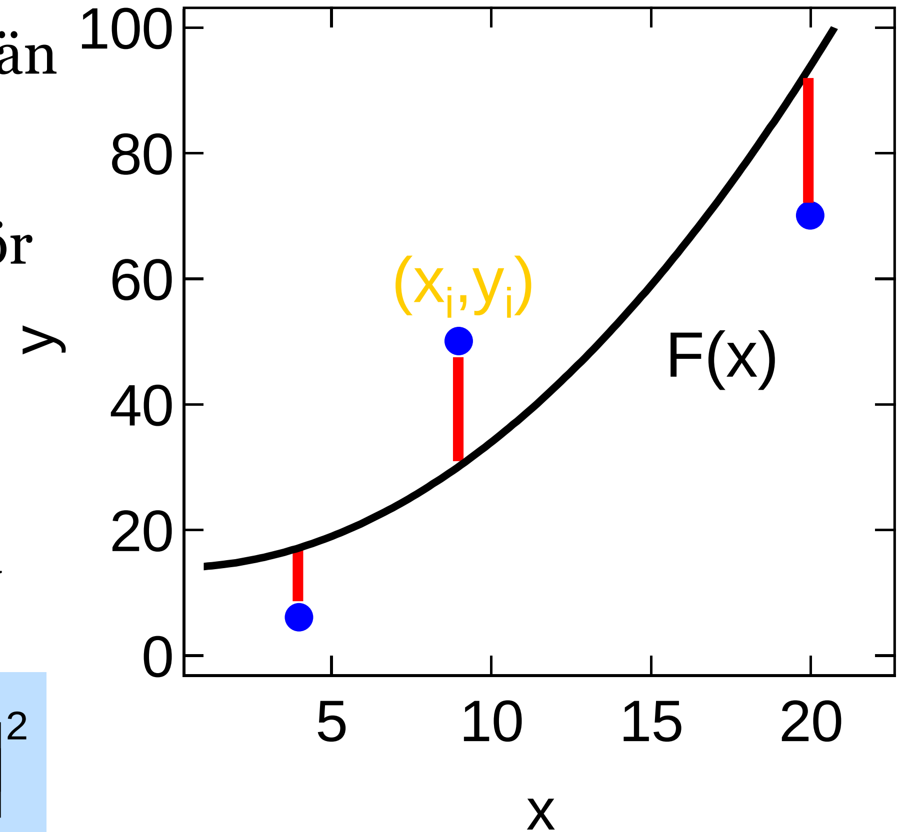


Minsta kvadrat-metoden

Minsta kvadrat-metoden (Pienimmän neliösumman menetelmä PNS)

- Används för att minimera felet för den funktion som ska anpassas utifrån observerade värden.
- Funktionen *F(x)* anpassas till mätvärdena genom att minimera den kvadrerade summan:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - F(x_i) \right]^2$$

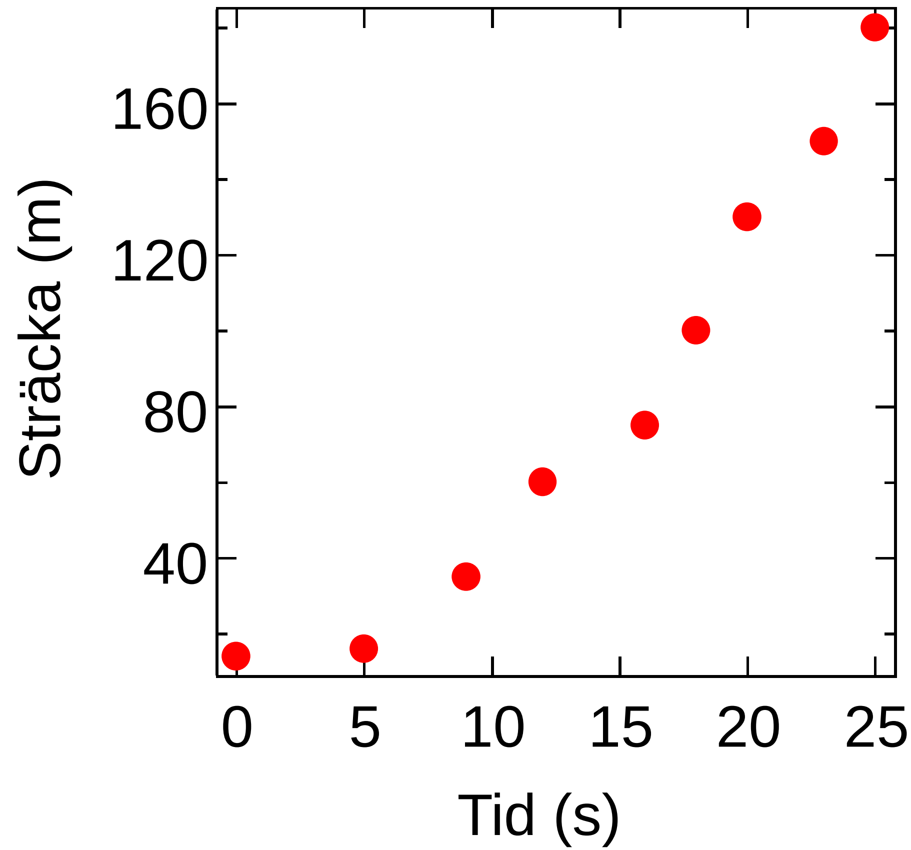


Aalto University
School of Science

Minsta kvadrat-metoden

- Den givna funktionen *F(x)* anpassas till mätdata genom att söka efter de bästa parametrarna
- Den kvadrerade summan *S* minimeras
- Exempelvis:

$$F(x) = s(t) = s_0 + at^2$$

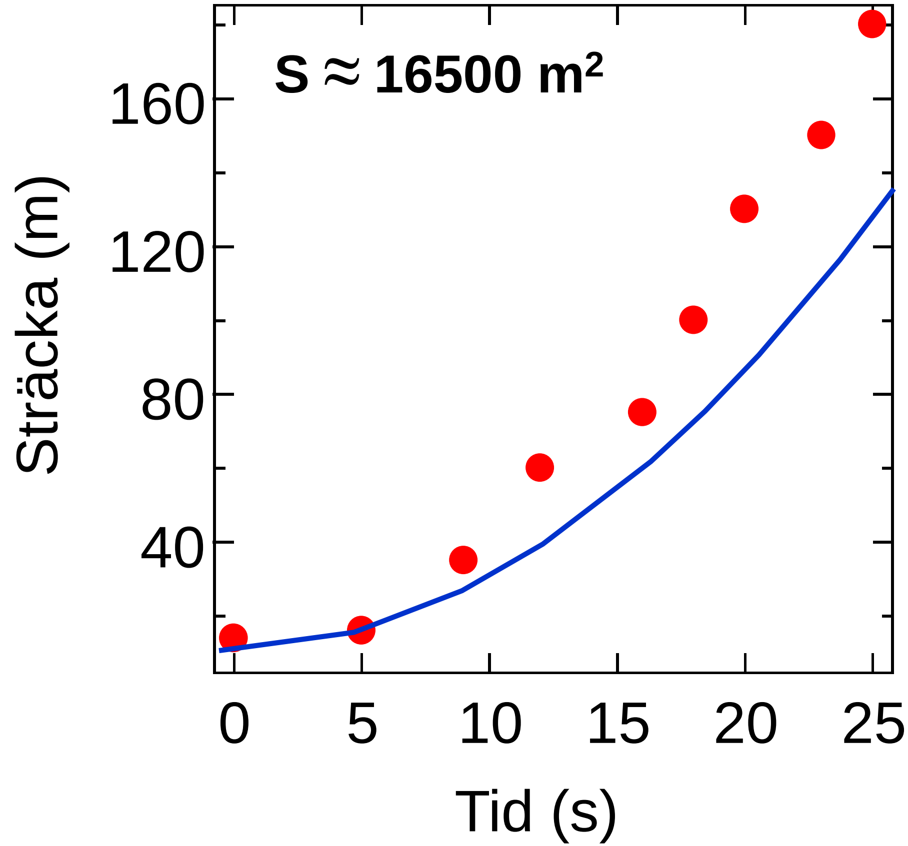


Minsta kvadrat-metoden

- Den givna funktionen *F(x)* anpassas till mätdata genom att söka efter de bästa parametrarna
- Den kvadrerade summan *S* minimeras
- Exempelvis:

$$F(x) = s(t) = s_0 + at^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N}\left[s_i - (s_0 + at_i^2)\right]^2$$



s_0 = 10 m

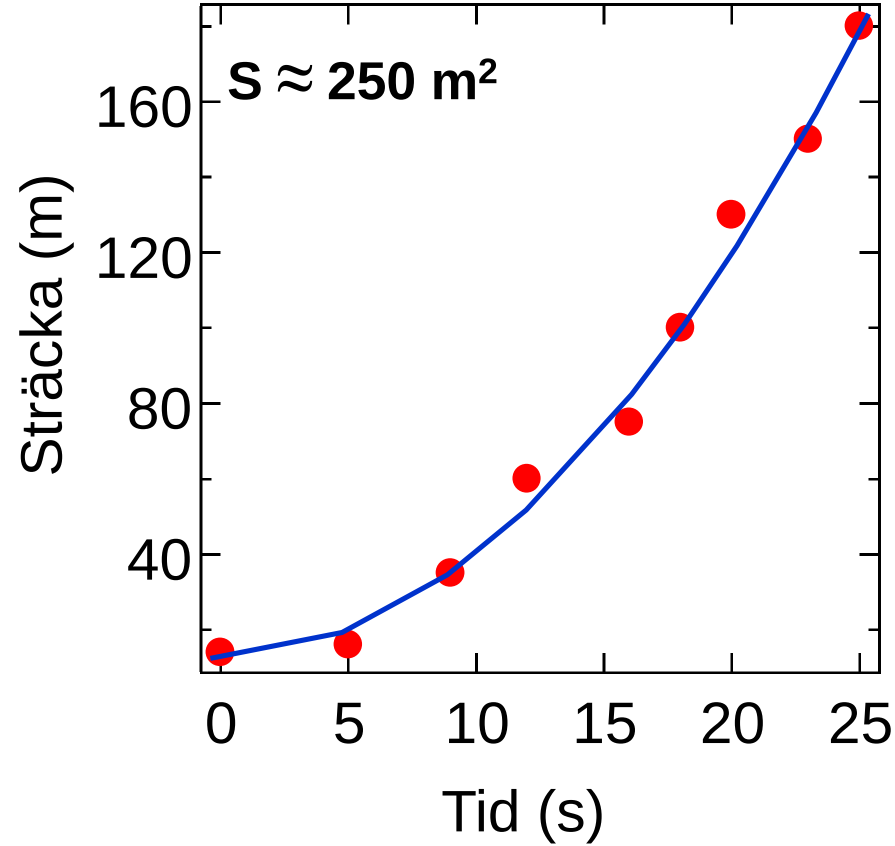
a = 0.15 m/s²

Minsta kvadrat-metoden

- Den givna funktionen *F(x)* anpassas till mätdata genom att söka efter de bästa parametrarna
- Den kvadrerade summan *S* minimeras
- Exempelvis:

$$F(x) = s(t) = s_0 + at^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[s_i - (s_0 + at_i^2) \right]^2$$



$s_0 \approx$ **14 m** $\pm$ **3 m**

a $\approx$ **0.27 m/s²** $\pm$ **0.01 m/s²**

Mätpunkternas felmarginaler kan även tas i beaktan

Sammansatta fel

- Funktioner med flera variabler
- Separation av feltermer

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Vi känner till beroendet

m, V,
Δm, ΔV

Vi har mätt

$\Delta\rho$

Hur bestämmer vi?

Sammansatta fel och differentiering av funktionen

Hur påverkas resultatets fel av <u>en</u> uppmätt storhet?

Det beräknade resultatet y beror på storheten x enligt funktionen $y = f(x)$

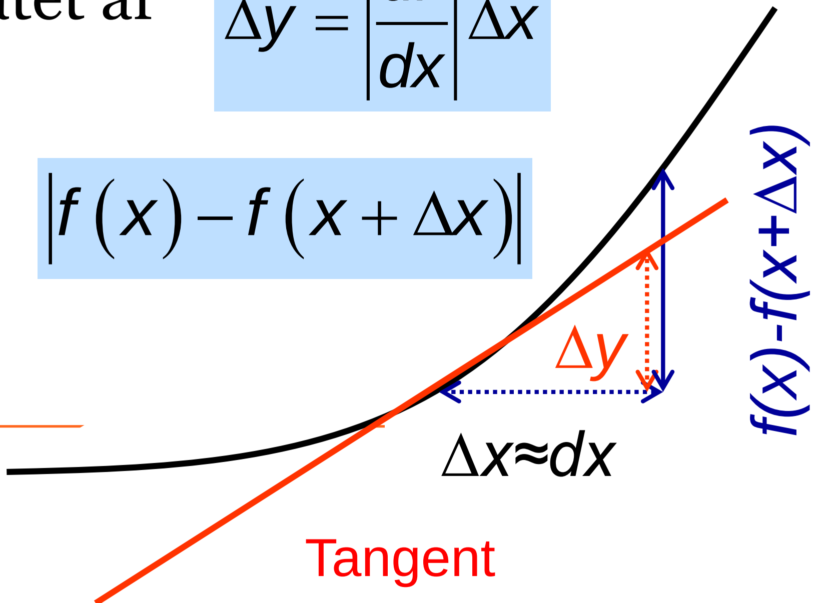
$$\Rightarrow dy = \frac{df}{dx}dx$$

Mätfelets $(\pm)\Delta x$ inverkan på resultatet är approximativt

$$\Delta y = \left|\frac{df}{dx}\right|\Delta x$$

Istället för att uppskatta felet från funktionens förändring kan alltså funktionens tangent användas.

$$\left|f(x) - f(x+\Delta x)\right|$$



Sammansatta fel och differentiering av funktionen

Hur påverkas resultatets fel av <u>flera</u> uppmätta storheter?

- Mätresultaten x, y ja z och förhållandet $f=f(x,y,z)$
- Felen för de enskilda mätningarna Δx, Δy, Δz.
- Felets övre gräns fås genom att beräkna totaldifferentialen för funktionen f

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||\Delta z|,$$

Där termerna $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ och $\frac{\partial f}{\partial z}$ är partiella derivator.

Exempel på beräkning av fel

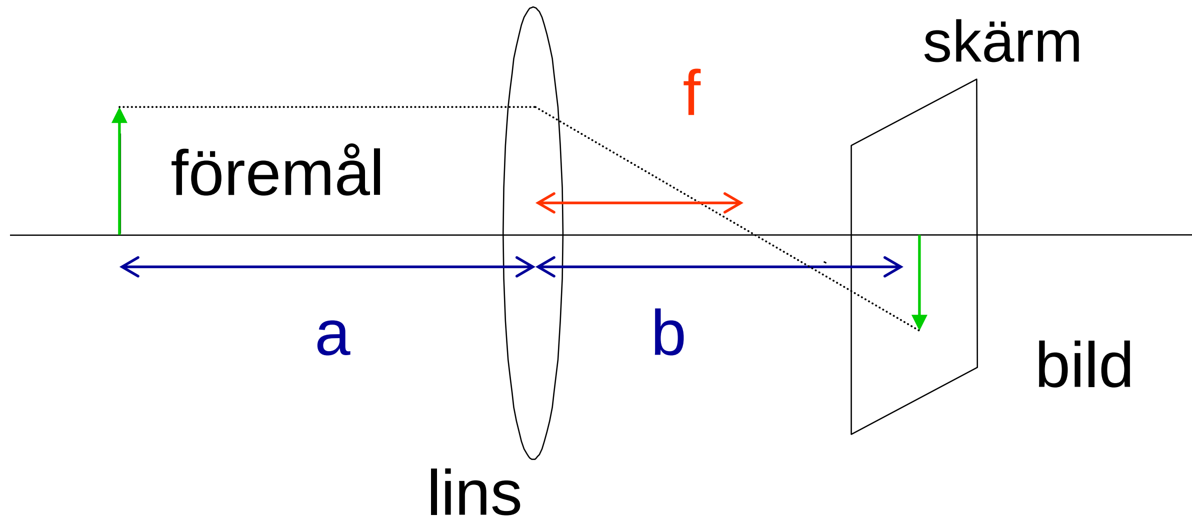
Bränvidden f definieras enligt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow f = \frac{ab}{a+b}$$

Föremålets och bildens avstånd från linsen mäts:

$a = (50{,}0 \pm 0{,}2)$ cm

$b = (22{,}3 \pm 0{,}5)$ cm



$$\boxed{f = \frac{50{,}0\ cm \cdot 22{,}3\ cm}{(50{,}0 + 22{,}3)\ cm} = 15.4218\ldots cm}$$

Funktionens $f = \dfrac{ab}{a+b}$ totaldifferential beräknas med de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{b(a+b) - ab}{(a+b)^2} = \frac{ba + b^2 - ab}{(a+b)^2} = \frac{b^2}{(a+b)^2}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{a(a+b) - ab}{(a+b)^2} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot \Delta b = \left|\frac{b^2}{(a+b)^2}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{a^2}{(a+b)^2}\right| \cdot \Delta b$$

Genom att substituera de uppmätta värdena fås brännviddens fel $\boldsymbol{\Delta f}$ = 0.2581... cm

Separation av feltermer

- De relativa felen orsakade av de olika variablerna kan undersökas skilt för sig.
- Variablernas fel beräknas skilt för sig och skrivs in i t.ex. en tabell.
- De största källorna till fel kan på detta sätt undersökas.

Tabel 1. Brännviddens *f* feltermer separerade

variabel	värde	fel	totaldifferential
a	50,0 cm	0,2 cm	$\left\lvert\frac{b^2}{(a+b)^2}\right\rvert \cdot \Delta a \approx 0.019$ cm
b	22,3 cm	0,5 cm	$\left\lvert\frac{a^2}{(a+b)^2}\right\rvert \cdot \Delta b \approx 0.239$ cm
f	15.4 cm		$\Delta f \approx 0.3$ cm

Logaritmisk derivering

Underlättar beräknandet av resultatets relativa fel

- Fungerar endast för funktioner i produktform

Exempelvis

$$f(x,y,z,k) = k\frac{x^2}{z^3}\sqrt{y}$$

Logaritmering

$$\ln f = \ln\left(k\frac{x^2}{z^3}\sqrt{y}\right) = \ln k + 2\ln x - 3\ln z + \frac{1}{2}\ln y$$

Derivering

$$\frac{df}{f} = \frac{\partial k}{k} + 2\frac{\partial x}{x} - 3\frac{\partial z}{z} + \frac{1}{2}\frac{\partial y}{y}$$

Det relativa felet

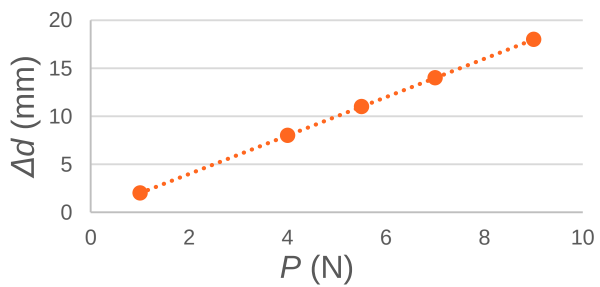
$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|2\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|-3\frac{\Delta z}{z}\right| + \left|\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Typexempel på en uppgift:
Bestämmandet av elasticitetsmodulen samt dess fel.

1. **För elasticitetsmodulen *E* gäller:**

$$\Delta d = \frac{s^3}{48\,E\,I_s}P$$

2. **(*Δd,P*) mäts och en graf ritas upp och en linje anpassas**



3. **Genom den anpassade linjens riktingskoefficienten fås nu**

$$k = \frac{s^3}{48\,E\,I_s} \Rightarrow E = \frac{s^3}{48\,k\,I_s}$$

4. **Genom logaritmisk totaldifferentialen fås:**

$$\Delta E = \left|\frac{-s^3}{48\,k^2\,I_s}\right|\Delta k + \left|\frac{-s^3}{48\,k\,I_s^2}\right|\Delta I_s + \left|\frac{3s^2}{48\,k\,I_s^2}\right|\Delta s$$

5. **Då vi känner till *k*, *Δk*, I_s, ΔI_s, *s* och *Δs* kan *E* och dess fel bestämmas.**

Slutresultatets noggrannhet

- För slutresultatets fel räcker det med en gällande siffras noggrannhet

$$f = 15.4218\ cm$$

$$\Delta f = 0.2581\ cm$$

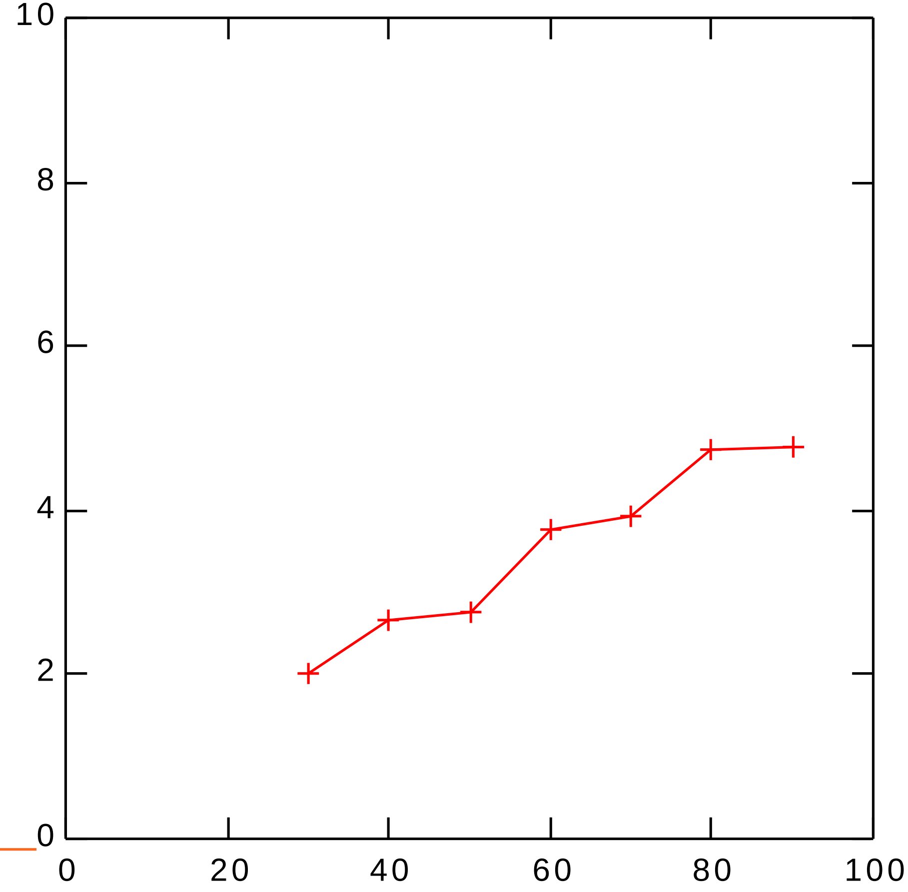
$$\Downarrow$$

Avrundat ges resultatet som f = 15.4 cm ± 0.3 cm

Grafisk framställning av resultat

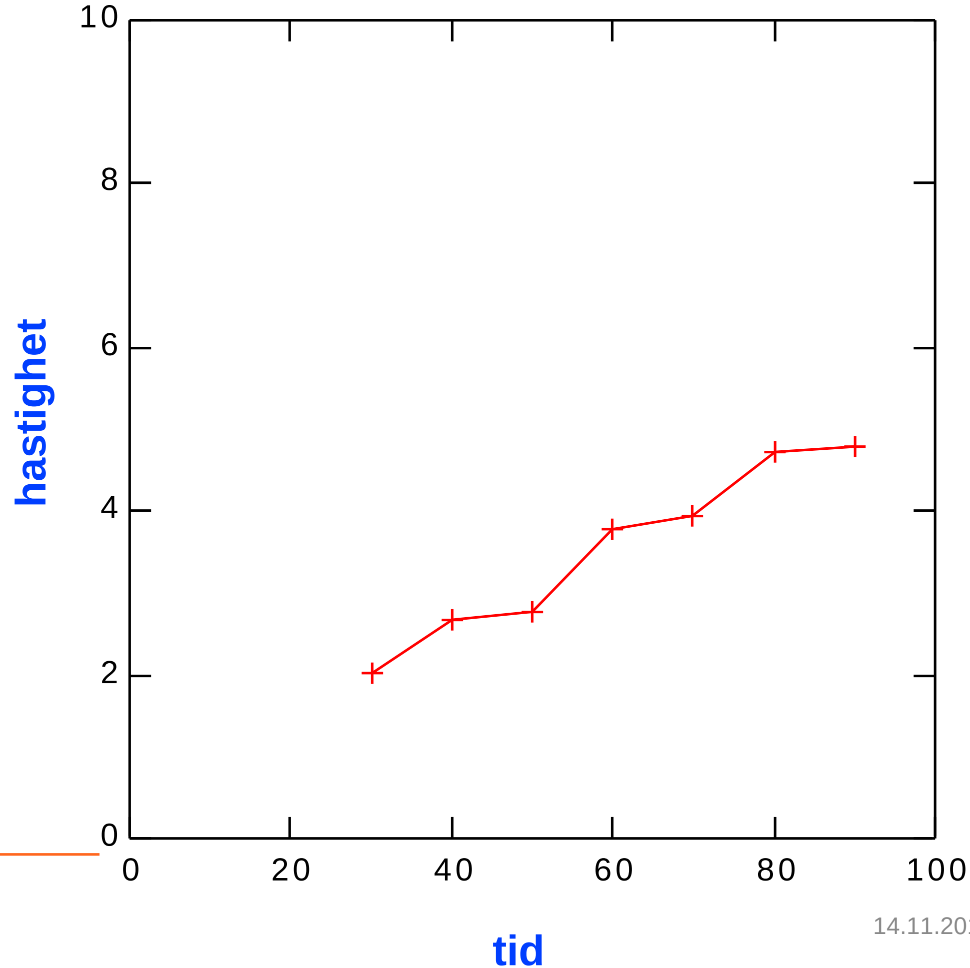
Exempel på en dålig grafisk framställning

- Koordinataxlarna saknar beteckningar
- Enheter saknas
- Punkterna fyller inte upp hela grafens yta
- Punkterna är förenade med brutna linjer



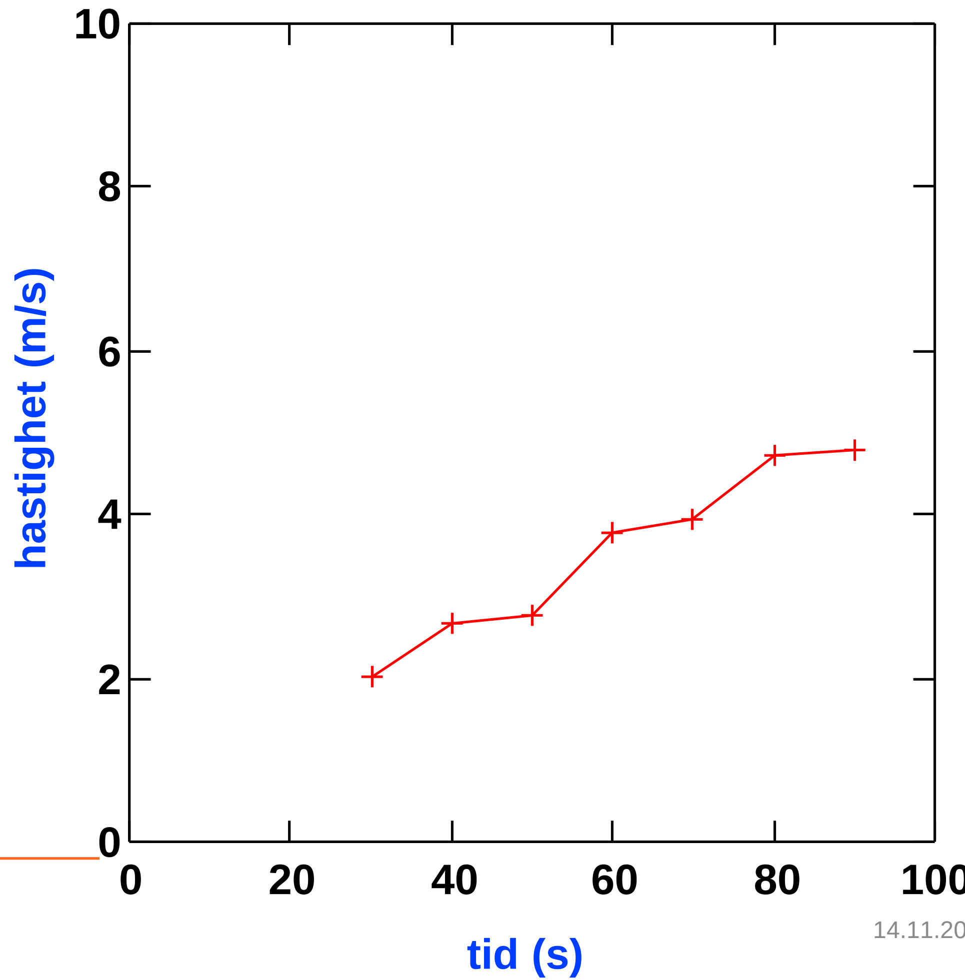
Exempel på en dålig grafisk framställning

- Koordinataxlarna saknar beteckningar
- Enheter saknas
- Punkterna fyller inte upp hela grafens yta
- Punkterna är förenade med brutna linjer



Exempel på en dålig grafisk framställning

- Koordinataxlarna saknar beteckningar
- Enheter saknas
- Punkterna fyller inte upp hela grafens yta
- Punkterna är förenade med brutna linjer

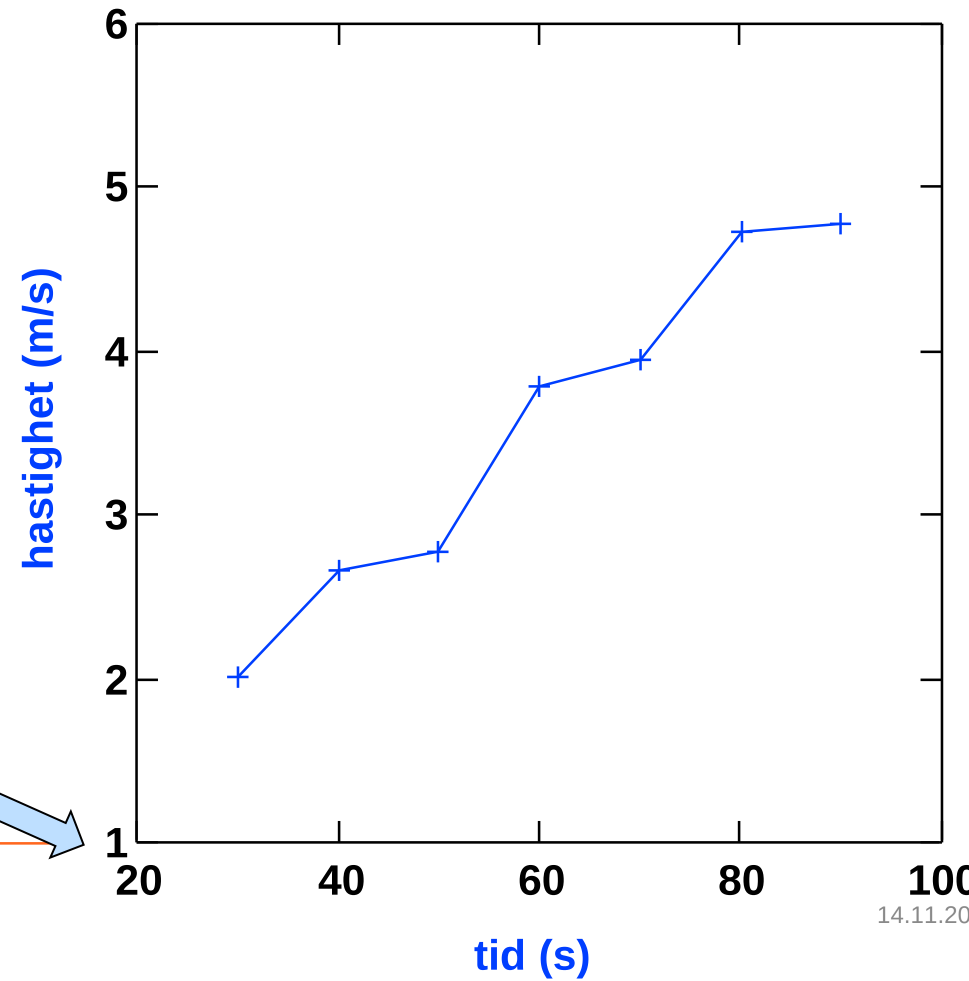


Aalto University
School of Science

Exempel på en dålig grafisk framställning

- Koordinataxlarna saknar beteckningar
- Enheter saknas
- Punkterna fyller inte upp hela grafens yta
- Punkterna är förenade med brutna linjer

Noll är inte ett magiskt nummer



Exempel på en relativt god grafisk framställning

- Koordinataxlarna saknar beteckningar
- Enheter saknas
- Punkterna fyller inte upp hela grafens yta
- Punkterna är förenade med brutna linjer
- Felgränserna är utritade
- Modellen är anpassad till mätpunkterna