



Aalto-yliopisto

## Matriisilaskenta (TFM)

### Laskuharjoitus 2 / vko 45

Johdantotehtävät lasketaan harjoituksissa, vertaisarvioitavat tarkastetaan seuraavassa harjoituksessa ohjeiden mukaan.

#### Alkuviikko:

**Johdantotehtävä 1:** (a) Olkoon  $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)^T$ . Laske  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ , jos määritelty. (b) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske  $A + 3A$ ,  $A + B$ ,  $A + B^T$ ,  $AB$ ,  $B^T A^T$ , jos määritelty.

**Johdantotehtävä 2:** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Valitse luvut  $a, b, c, d$  siten että  $ad - bc \neq 0$ . Muodosta matriisi

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ja laske tulot  $AB$  ja  $BA$ .

**Vertaisarviointi 3:** Laadi  $3 \times 3$  taikaneliömatriisi  $M_3$ , jonka alkiot ovat luvut  $1, 2, 3, \dots, 9$ . Taikaneliömatriisin kaikki rivit, sarakkeet ja lävistäjät summautuvat luvuksi 15. Laske  $M_3$  kertaa  $(1, 1, 1)^T$ . Mitä on  $M_4$  kertaa  $(1, 1, 1, 1)^T$ , jos  $M_4$ :n alkiot ovat luvut  $1, 2, 3, \dots, 16$ ?

**Vertaisarviointi 4:** Kaksi vektoria ovat keskenään kohtisuoria eli ortogonaalisia, jos niiden sisätulo = 0. Matriisi  $Q$  on ortogonaalinen, jos pätee  $Q Q^T = I = Q^T Q$ .

- Näytä, että kaikki  $Q$ :n sarakkeet  $q_i$  ovat yksikkövektoreita.
- Näytä, että kaikki  $Q$ :n sarakkeet  $q_i$  ovat keskenään ortogonaalisia.
- Etsi  $2 \times 2$  esimerkki ehdolla  $q_{11} = \cos \theta$ .

**Loppuviikko:****Johdantotehtävä 5:** Tutki, ovatko vektorit

$$a_1 = (1 \ 1 \ 0 \ 0)^T, \ a_2 = (0 \ 1 \ 1 \ 0)^T, \ a_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 1)^T, \ a_4 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

lineaarisesti riippumattomia. Voidaanko vektori  $x = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^T$  lausua näiden lineaariyhdistelynä?

**Johdantotehtävä 6:** Totea, että yhtälöryhmän

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\xi_3 = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3 = 2 \\ -\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_3 = 3 \end{cases}$$

kerroinmatriisi on ortogonaalinen ja käytä tätä tietoa hyväksi yhtälöryhmän ratkaisemisessa.

**Vertaisarviointi 7:** Etsi kolmiomatriisi  $E$ , joka redusoi Pascalin matriisin toiseksi Pascalin matriisiksi.

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Vertaisarviointi 8:** Etsi eliminaatiomatriisit  $E_{43}, E_{32}, E_{21}$  jotka toteuttavat ehdon

$$E_{43}E_{32}E_{21} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

Laske auki tulo  $E_{43}E_{32}E_{21}$ .

**Verkkotehtävät 1:** Verkkotehtävien palautus päättyy viikon 46 tiistaina klo 16.