MS-A0002 Matriisilaskenta

1. Vektorit ja kompleksiluvut

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

1.1 Vektorit

Reaalinen n-ulotteinen avaruus on joukko
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
Sen pisteet voidaan mieltää myös (paikka)vektoreiksi, merkitään niitä pystyvektoreina:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

1.1 Vektorit

Määritellään kaksi laskutoimitusta avaruudessa $\mathbb{R}^n$:

i) yhteenlasku, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

ii) skalaarilla kertominen, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Alkioittain, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \alpha\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Vektori, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on *nollavektori*.
Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

1.1 Vektorit

Esimerkki 1

Olkoon

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

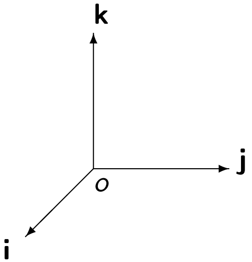
Laske

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$
2. $\frac{1}{\pi}\mathbf{y} - \mathbf{x}$
3. $\mathbf{x} + 2\mathbf{z}$

1.1 Vektorit

Koordinaatisto muodostetaan kiinnittämällä origo ja kantavektorit.

Kolmiulotteisessa avaruudessa siis esim. karteesinen koordinaatisto $\{o, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, missä yksikkövektorit **i**, **j** ja **k** muodostavat ortonormeeratun positiivisesti suunnistetun kannan.



1.1 Vektorit

Huom!

Tasossa: Jos $\mathbf{a}$ kiertyy $\mathbf{b}$:n päälle vastapäivään lyhintä reittiä, on pari $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ suunnistettu positiivisesti.

Avaruudessa: Jos kolmikko $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ toimii oikean käden säännön $\{P, E, K\}$ mukaisesti, se on positiivisesti suunnistettu.

1.1 Vektorit

Tasossa kantavektorit **i** ja **j**,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Erityisesti,

$$\mathbf{i} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2

Piirretään tasoon edellisen esimerkin vektorit.

1.1 Vektorit

Avaruudessa kantavektorit **i**, **j** ja **k**,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Erityisesti,

$$\mathbf{i} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Olkoon $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ avaruuden ortonormeerattu kanta ja

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 3

Vektoreiden **a** ja **b** *skalaaritulo* (eli sisätulo eli pistetulo) on

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 4

Vektorin $\mathbf{a}$ *pituus on*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Esimerkki 5

Lasketaan vektorin $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ pituus.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 6

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b}), & \textit{jos } \mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{b}\neq\mathbf{0} \\ 0, & \textit{jos } \mathbf{a}=\mathbf{0} \textit{ tai } \mathbf{b}=\mathbf{0} \end{cases}$$

Seuraus: Vektorit $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ *ovat kohtisuorassa jos ja vain jos* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, *merkitään* $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Esimerkki 7

Olkoon $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Laske

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
2. $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$
3. $3\mathbf{a}\cdot(4\mathbf{c}-3\mathbf{b})$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Vektoritulo voidaan muodostaa vain kolmiulotteisessa avaruudessa.

Määritelmä 8

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ kolmiulotteisia vektoreita. *Vektori- eli ristitulo* on vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jolle pätee:

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
3. vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin

Jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, on $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Esimerkki 9

Vektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ vektoritulo $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, sillä

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}||\mathbf{j}| \sin \measuredangle(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 1,$$

$\mathbf{k}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria vastaan, ja $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Vektoritulo **ei** ole

- vaihdannainen: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- liitännäinen: $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, mutta $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Sille kuitenkin pätee

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Kannassa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ vetoritulo saa nasevan muodon: Olkoon

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Tällöin voidaan suoralla laskulla osoittaa, että

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}.$$

Myöhemmin tällä kurssilla opimme determinantin käsitteen ja näemme, että yo. voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Esimerkki 10

Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Laske

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Ratkaisu:

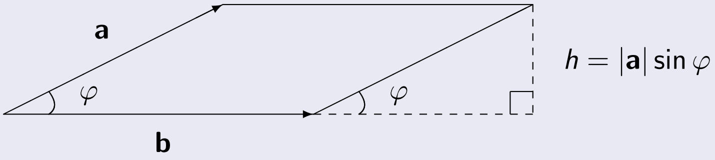
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{j} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + 2\mathbf{k} - (-\mathbf{k}) + \mathbf{0} = 3\mathbf{k}$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 4\mathbf{j} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -2\mathbf{k} + \mathbf{j} + 2\mathbf{i}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 2\mathbf{k} - \mathbf{j} + \mathbf{i}$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 11

Vektoreiden $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *virittämän suunnikkaan ala on* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Todistus.



$$\text{Ala} = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \qquad \square$$