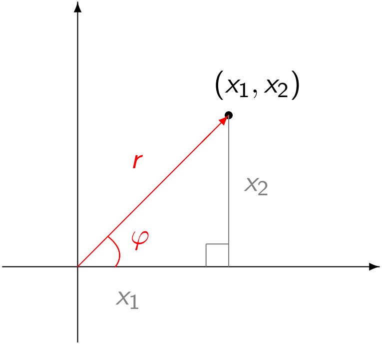
1.3 Napakoordinaatit



$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

$$x_1 = r\cos\varphi$$

$$x_2 = r\sin\varphi$$

1.3 Napakoordinaatit

Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\mathbf{x} = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\left(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\right),$$

missä $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on pisteen etäisyys origosta ja $\varphi = \arg(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on $\mathbf{x}$*:n argumentti* eli kulma $\mathbf{x}$:n paikkavektorin ja vaaka-akselin välillä.

Luvut

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| & \in [0, \infty[, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ovat $\mathbf{x}$*:n napakoordinaatit*.

1.3 Napakoordinaatit

Huom.

- $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi)$ ja $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi)$, joten argumentti on monikäsitteinen (kulmaan voi lisätä 2π-monikertoja)!
  Usein halutaan, että $\arg(\mathbf{x}) \in [0, 2\pi[$ tai $\arg(\mathbf{x}) \in]-\pi, \pi]$.
- Jos $x_1 \neq 0$, niin
  $$\tan\left(\arg(\mathbf{x})\right) = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{“eli”} \quad \arg(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$
- Origon vaihekulma $\arg(0)$ on “epämääräinen”.

1.3 Napakoordinaatit

Esimerkki 12

Mitkä ovat karteesisissa koordinaateissa ilmoitetun pisteen $\mathbf{x} = (\sqrt{3}, 1)$ napakoordinaatit?

Ratkaisu:

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6. \end{cases}$$

Napakoordinaateissa siis $x = (2, \pi/6)$.
(Tarkistus: $2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$, $2\sin(\pi/6) = 1$.)

1.4 Kompleksiluvut

Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ovat luonnollinen joukko aloittaa laskeminen.

Jos halutaan ratkaista muotoa $x + n = m$, $n, m \in \mathbb{N}$, olevat yhtälöt, kaipaa lukujen joukko kuitenkin laajennusta kokonaislukujen joukoksi: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Tämäkään ei riitä muotoa $nx = m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, olevien yhtälöiden ratkaisemiseen, vaan tarvitaan laajennus rationaalilukuihin:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

1.4 Kompleksiluvut

Rationaalilukujenkaan joukosta ei löydy ratkaisua yhtälölle $x^2 = 2$. Tätä varten tehdään vielä laajennus, otetaan mukaan myös irrationaaliluvut, jolloin saadaan reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Onko kaikki nyt hyvin?

Mikä on yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisu?

1.4 Kompleksiluvut

Määritellään *imaginääriyksikkö* i olemaan luku, jolle pätee

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Imaginääriyksikköä i voitaisiin siis tavallaan kutsua myös -1:n neliöjuureksi.

Määritelmä 13

Kompleksiluku on muotoa

$$a + \mathrm{i}b$$

oleva esitys, jossa a ja b ovat reaalilukuja ja i imaginääriyksikkö.

$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on kompleksilukujen joukko.

1.4 Kompleksiluvut

Samaistetaan vektori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja kompleksiluku $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, eli

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : \; x, y \in \mathbb{R}\} \\ \cong \mathbb{C} &= \{x + \mathrm{i}y : \; x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Esimerkki 14

Piirrä kompleksiluvut $1 + 2\mathrm{i}$, $2 - \mathrm{i}$, i, -2 ja $-3 - 2\mathrm{i}$ koordinaatistoon.

Tulkitsemalla kompleksiluvut tason vektoreiksi nähdään heti, miten niiden yhteenlasku pitää suorittaa.

1.4 Kompleksiluvut

Olkoot $z = x + \mathrm{i}y$ ja $w = a + \mathrm{i}b$ kompleksilukuja.
Tällöin lukujen w ja z summa on

$$\begin{aligned} w + z &= (a + \mathrm{i}b) + (x + \mathrm{i}y) \\ &= (a + x) + \mathrm{i}(b + y), \end{aligned}$$

erotus

$$\begin{aligned} w - z &= (a + \mathrm{i}b) - (x + \mathrm{i}y) \\ &= (a - x) + \mathrm{i}(b - y), \end{aligned}$$

ja tulo

$$\begin{aligned} wz &= (a + \mathrm{i}b)(x + \mathrm{i}y) \\ &= ax + a\,\mathrm{i}y + \mathrm{i}bx + \mathrm{i}b\,\mathrm{i}y \quad (\text{Muista: } \mathrm{i}^2 = -1!) \\ &= (ax - by) + \mathrm{i}(ay + bx). \end{aligned}$$

1.4 Kompleksiluvut

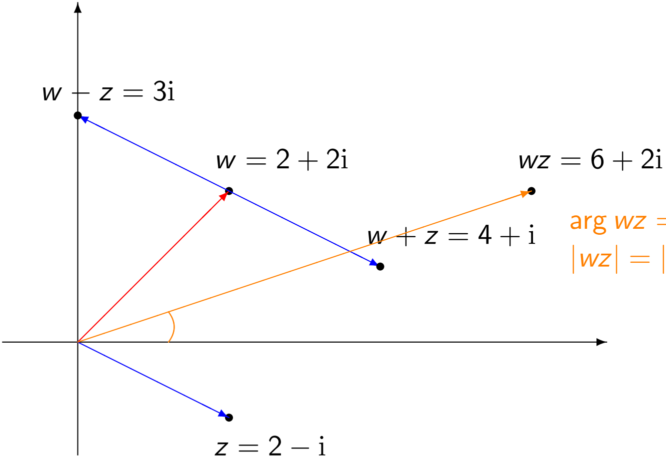
Esimerkki 15

Olkoot $w = 2 + 2\mathrm{i}$ ja $z = 2 - \mathrm{i}$. Laske $w + z$, $w - z$ ja wz. Tarkista piirtämällä kuvat.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
w + z &= (2 + 2) + \mathrm{i}(2 - 1) = 4 + \mathrm{i}, \\
w - z &= (2 - 2) + \mathrm{i}(2 - (-1)) = 3\mathrm{i}, \\
wz &= ((2)(2) - (2)(-1)) + \mathrm{i}\,((2)(-1) + (2)(2)) = 6 + 2\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

1.4 Kompleksiluvut



$\arg wz = \arg w + \arg z$

$|wz| = |w||z|$

1.4 Kompleksiluvut

Määritelmä 16

Luvun $z = z_1 + \mathrm{i}\ z_2 \in \mathbb{C}$ *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) := z_1 \in \mathbb{R}$ ja *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) := z_2 \in \mathbb{R}$.
Luku $\bar{z} = z_1 - \mathrm{i}\ z_2 = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ on luvun z *kompleksikonjugaatti* (eli liittoluku).

Määritelmä 17 (Itseisarvo ja argumentti)

Jos $z = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$, olkoon

$$|z| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \text{ja} \quad \arg(z) := \arg((z_1, z_2)).$$

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 18

Nyt $|\bar{z}| = |z|$ ja $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, joten $\bar{z}z = |z|^2$.
Tarkistus:
$\bar{z}z = (z_1 - \mathrm{i}z_2)(z_1 + \mathrm{i}z_2) = (z_1^2 + z_2^2) + \mathrm{i}(z_1 z_2 - z_2 z_1) = |z|^2$.

Huom. Jos $0 \neq z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} z &= |z| \left(\frac{z_1}{|z|} + \mathrm{i}\, \frac{z_2}{|z|} \right) \\ &= |z| \left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi) \right) \end{aligned}$$

missä $\varphi = \arg(z)$.

1.4 Kompleksiluvut

Käänteisluku:
Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ käänteisluvulle saadaan laskusääntöjen avulla muoto

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

jos $z \neq 0$. Yleisemmin kompleksiluku w/z voidaan sieventää muotoon $a + \mathrm{i}b$ laventamalla se nimittäjän liittoluvulla $\bar{z}$:

$$\frac{w}{z} := w\frac{1}{z} = w\bar{z}/|z|^2.$$

Siis $|w/z| = |w|/|z|$ ja $\arg(w/z) = \arg(w) - \arg(z)$.

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 19

$$\frac{2+3\mathrm{i}}{4-5\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})}{(4-5\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})} = \frac{-7+22\mathrm{i}}{41} = -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}\mathrm{i}.$$

Esimerkki 20

Jos $n \in \mathbb{Z}$, niin $|z^n| = |z|^n$ ja $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

Tapauksessa $z = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ saadaan **de Moivren kaava:**

$$(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi).$$

1.4 Kompleksiluvut

Tekniikassa kompleksiluvut kirjoitetaan usein ns. polaarimuodossa

$$re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Tämä tarkoittaa tason pistettä, jonka napakoordinaatit ovat (r, φ). $e^{\mathrm{i}\varphi}$ on yksinkertaisesti lyhyempi merkitätapa kompleksiluvulle $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Siis

$$\begin{aligned} re^{\mathrm{i}\varphi} &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi \\ &= x + \mathrm{i}y. \end{aligned}$$

Fakta $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ voidaan osoittaa esim. sarjakehitelmien avulla, tämä tehdään kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 21

Mitkä kompleksiluvut toteuttavat yhtälön $z^3 = 1$?

Vastaus: Ratkaise kirjoittamalla luvut polaarimuodossa $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, $1 = 1e^{\mathrm{i}n2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$(re^{\mathrm{i}\varphi})^3 = r^3 e^{\mathrm{i}3\varphi} = 1e^{\mathrm{i}n2\pi},$$

josta $r^3 = 1$ ja $3\varphi = n2\pi$. Yhtälön toteuttavat siis pisteet, joille $r = 1$ ja $\varphi = n\frac{2}{3}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, eli $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ ja $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Nämä kolme pistettä sijaitsevat tasavälein yksikköympyrällä.

1.4 Kompleksiluvut

Seuraava tulos on seurauksiltaan järisyttävä (vaikkei ehkä heti uskoisi). Sen mukaan ei-vakiolla polynomilla on nollakohta:

Lause 22 (Algebran peruslause)

Olkoon $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *polynomi eli*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

missä $a_k \in \mathbb{C}$ *ja* $a_n \neq 0$.
Jos $n \geq 1$, *niin* $p(w) = 0$ *jollakin* $w \in \mathbb{C}$.

1.4 Kompleksiluvut

Seuraus: Jos polynomi p on kuten edellä, niin

$$p(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n),$$

missä $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 23

$p(z) = z^2 + 1 = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$
eli polynomin p juuret ovat $-\mathrm{i}, \mathrm{i} \in \mathbb{C}$ (eivät reaalisia!).

Esimerkki 24

Etsi polynomi, jolla on sekä reaalisia että imaginäärisiä juuria.

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 25 (lasketaan luennolla)

Etsi polynomin $p(z) = z^2 + (1 - 5\mathrm{i})z - (4 + 4\mathrm{i})$ juuret.

Ratkaisu: Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(1-5\mathrm{i}) \pm \sqrt{(1-5\mathrm{i})^2 - 4(-4(1+\mathrm{i}))}}{2} \\ &= \frac{5\mathrm{i} - 1 \pm \sqrt{1 - 10\mathrm{i} - 25 + 16\mathrm{i} + 16}}{2} \\ &= \frac{5\mathrm{i} - 1 \pm \sqrt{-8 + 6\mathrm{i}}}{2} \end{aligned}$$

1.4 Kompleksiluvut

Neliöjuuri voidaan laskea seuraavasti: $\sqrt{-8+6\mathrm{i}} = x + \mathrm{i}y$ korotetaan puolittain neliöön, jolloin saadaan $-8+6\mathrm{i} = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2$. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

ja saadaan ratkaisuiksi $x = 1$, $y = 3$ ja $x = -1$, $y = -3$, eli $\sqrt{-8+6\mathrm{i}} = \pm(1+3\mathrm{i})$.
Näin ollen polynomin nollakohdat ovat $z = \frac{5\mathrm{i}-1-(1+3\mathrm{i})}{2} = -1+\mathrm{i}$ ja $z = \frac{5\mathrm{i}-1+(1+3\mathrm{i})}{2} = 4\mathrm{i}$.

1.4 Kompleksiluvut

Huom. Neliöjuuri voitaisiin laskea myös samalla idealla kuin kompleksiluvun potenssi aiemmin, eli muuntamalla $-8+6\mathrm{i}$ polaarimuotoon, ottamalla sitten neliöjuuri ($\sqrt{re^{\mathrm{i}\varphi}} = r^{1/2}e^{\mathrm{i}\varphi/2}$) ja muuntamalla lopuksi takaisin kompleksimuotoon.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.