MS-A0002 Matriisilaskenta

2. Lineaarinen yhtälöryhmä matriiseilla

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tarkastellaan esimerkkinä lineaarista yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ \ \ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Matriisimuodossa tämä kirjoitetaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, eli

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tulkinta 1: kumpikin yhtälöparin yhtälö kuvaa suoraa tasossa $\mathbb{R}^2$, ja mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ on suorien leikkauspiste.

Tulkinta 2: matriisi A määrittelee *kuvauksen* (= funktion) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Halutaan löytää piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, jolle $A\mathbf{x} = (1, 5)$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Yleisesti: Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä annettuina ovat $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ja halutaan ratkaista $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tulkinta 1: kukin rivi $a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$ $(1 \le k \le m)$ on yhtälö *hypertasolle* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. (Suora, kun $n = 2$; taso, kun $n = 3$.) Mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on kaikille hypertasoille (m kpl) yhteinen piste.

Tulkinta 2: Matriisi A määrittelee kuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Etsitään pistettä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, joka kuvautuu pisteeksi $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Esimerkki 1

Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Määritellään kuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ säännöllä $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ts.

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Etsi pisteen $\mathbf{u} = (2, -1)$ kuva $T(\mathbf{u})$.

b) Etsi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että $T(\mathbf{x}) = (3, 2, -5)$.

c) Löytyykö b-kohdassa useampia ratkaisuja?

d) Löytyykö pistettä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että $T(\mathbf{x}) = (3, 2, 5)$?

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tarkastellaan hieman laajempaa esimerkkiä. On annettu kolme $\mathbb{R}^3$:n vektoria:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Etsitään vektorin $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ esitys vektoreiden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ avulla.

Tarkasteltavana on siis yhtälö

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b},$$

missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ovat tuntemattomia, jotka on tarkoitus ratkaista, jos mahdollista.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Kirjoitetaan tämä yhtälöryhmäksi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases}$$

Etsitään siis toisaalta kolmen tason leikkauspisteitä.

Sama matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = 6 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 11x_3 & = 7 \end{array} \right.$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Mitä tiedämme ratkaisujen lukumäärästä?

Ratkaisuja voi olla

1. 0 kpl: Tasot eivät leikkaa, eli A ei kuvaa mitään vektoria $\mathbf{b}$:lle.
2. 1 kpl: Tasot leikkaavat yhdessä pisteessä, eli $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ on kanta.
3. ∞ kpl: Tasot leikkaavat pitkin suoraa/tasoa, eli "A:n ydin on ei-triviaali".

Hyödyllinen käsite on A:n kuva-avaruus $\mathcal{R}(A)$, jonka alkiot ovat kaikki vektoreiden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatiot. Jos ratkaisua ei ole olemassa, tulkitaan, että $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(A)$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Esimerkki 2

Tarkastellaan yhtälöryhmän eri tulkintoja seuraavissa kahdessa tapauksessa.

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Perinteisesti yhtälöryhmät ratkaistaan lisäämällä ja vähentämällä yhtälöitä toisistaan, jollakin kertoimilla painotettuina.

Matriisimuodossa vastaavat operaatiot voidaan tehdä yksinkertaisemmin merkinnöin.

Kirjoitetaan matriisiyhtälö *liittomatriisiksi*

$$[A \mid \mathbf{b}] \qquad \text{eli} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] .$$

Suoritetaan sitten ratkaisu *Gaussin algoritmilla*:

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 &= 7 \end{cases} \quad \textit{eli} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{ll} 2 & -3 \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 8x_2 + 14x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= 4 \end{cases} \quad \textit{eli} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 14 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{lll} & & + \\ & + & \\ :2 & -14 & -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= -5 \\ 8x_2 &= -20 \\ x_3 &= 2 \end{cases} \quad \textit{eli} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 8 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & + \\ :8 & -2 \\ & \end{array}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -5/2 \\ x_3 &= 2 \end{cases} \qquad \textit{eli} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ratkaisu on siis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, -5/2, 2)$.
(**Tarkista sijoittamalla!**)

Tämä piste on alkuperäisten tasojen ainoa leikkauspiste. Se on myös piste/vektori, jonka matriisi A kuvaa pisteeksi/vektoriksi $\mathbf{b}$. Toisaalta, nämä kertoimet ovat vektorin $\mathbf{b}$ koordinaatit, kun se ilmoitetaan kannassa $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, eli $0 \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{5}{2}\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

2.2 Gaussin eliminaatio

Gaussin eliminaatiomenetelmässä lineaarinen matriisiyhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kirjoitetaan liittomatriisina $[A \mid \mathbf{b}]$, jota muokataan *rivioperaatioin*:

1. lisämällä (painotettu) rivi toiseen riviin
   — vastaa (painotetun) yhtälön lisäämistä toiseen
2. vaihtamalla kahden rivin paikkaa keskenään
   — vastaa yhtälöiden paikan vaihtoa
3. kertomalla yksittäinen rivi vakiolla $c \neq 0$
   — vastaa yhden yhtälön kertomista vakiolla $c \neq 0$

Jos lineaarisesta yhtälöstä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saadaan rivioperaatioin $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, merkitään

$$[A \mid \mathbf{b}] \quad \sim \quad [C \mid \mathbf{d}].$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 3

Etsi Gaussin eliminaatiomenetelmällä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

ratkaisu.

Vastaus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 4

Allaolevassa taulukossa on annettuna neljän planeetan keskimääräiset etäisyydet auringosta (astronomisisssa yksiköissä) ja niiden kiertoajat auringon ympäri (vuosissa).

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars
Etäisyys	0.387	0.723	1.000	1.524
Kiertoaika	0.241	0.615	1.000	1.881

Sovita kolmen ensimmäisen planeetan avulla toisen asteen polynomi, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, etäisyyden ja kiertoajan välille ja käytä sitä ennustamaan Marsin kiertoaika sen etäisyyden avulla.