2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 5

Etsi yhtälöryhmän kaikki ratkaisut, kun

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 14x_4 = 7 \end{cases} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ratkaisu: Kirjoitetaan yhtälö matriisimuotoon $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Ennen kuin sijoitamme liittomatriisiin oikealle puolelle vektorin $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, suoritetaan eliminaatioaskeleet yleisellä $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & b_2 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & b_3 \end{array}\right] & \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ + \\ \quad\quad + \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array} \end{array}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

Jotta viimeiselle riville ei syntyisi ristiriitaa, on pädettävä $b_3 - b_2 - b_1 = 0$. Tämä on *konsistenssiehto*.

Annetulla vektorilla $7 - 6 - 1 = 0$, joten ristiriitaa ei synny.

2.2 Gaussin eliminaatio

Palataan sitten annettuun vektoriin **b**, jolloin saadaan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-6-1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \mid :2 \quad -3 \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matriisi A on nyt saatettu *redusoituun porrasmuotoon*. Tämä tarkoittaa muotoa, jossa jokaisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1 ja alemmalla rivillä on alussa nollia aina useampi kuin ylemmällä.

2.2 Gaussin eliminaatio

Jaetaan muuttujat

a) kiinnitetyiksi (x_1, x_3)
b) vapaiksi (x_2, x_4)

Miksi nämä nimet?
Vapaat voi korvata parametreilla ja ratkaista kiinnitetyt niiden avulla.

Olkoon $x_2 = \sigma$, $x_4 = \tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Ratkaistavana on siis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma \\ x_3 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Helpoiten loppu onnistuu kirjoittamalla ongelma takaisin yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} x_1 + 2\sigma + \tau = -5 \\ x_3 + \tau = 2 \end{cases}.$$

Tästä saadaan ratkaistua kiinnitetyt muuttujat x_1 ja x_3 vapaiden avulla:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2\sigma - \tau \\ x_3 = 2 - \tau \end{cases}.$$

Kun lisäksi muistetaan, että $x_2 = \sigma$ ja $x_4 = \tau$ ovat mielivaltaisia reaalilukuja, nähdään, että yhtälöt ratkeavat millä tahansa lukunelikolla x_1, x_2, x_3, x_4, joka on muotoa

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2\sigma - \tau \\ x_2 = \sigma \\ x_3 = 2 - \tau \\ x_4 = \tau \end{cases},$$

missä $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$.Toisin sanoen, kaikki muotoa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{R},$$

olevat vektorit toteuttavat siis alkuperäisen yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli ratkaisuita on ääretön määrä.

2.2 Gaussin eliminaatio

Huom. Vapaiden muuttujien kerroinvektorit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ratkaisevat yhtälön $A\mathbf{x} = 0$, eli samaa matriisia vastaavan homogeenisen yhtälön. Myös kaikki niiden lineaarikombinaatiot ratkaisevat homogeenisen yhtälön.

Sanotaankin, että matriisin A *ydin* on yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = 0$ ratkaisuiden kantavektorien joukko, eli tässä tapauksessa

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 6

Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

kaikki ratkaisut.

Vastaus: $\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$

2.2 Gaussin eliminaatio

Lause 7

Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *missä* A *on* $m \times n$*-matriisi, voidaan aina saattaa muotoon*

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & F & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \end{array} \right),$$

missä I *on* $r \times r$*-identiteettimatriisi,* F *on* $r \times (n-r)$*-matriisi,* c_1 *on* r*-vektori ja* c_2 *on* $(m-r)$*-vektori.*
Ratkaisuiden lukumäärälle saadaan ehdot: Jos

$$\begin{cases} r < m \text{ ja } c_2 \neq 0 & \text{lukumäärä on } 0 \\ (r = m \text{ tai } c_2 = 0) \text{ ja } r = n & \text{lukumäärä on } 1 \\ (r = m \text{ tai } c_2 = 0) \text{ ja } r < n & \text{lukumäärä on } \infty \end{cases}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 8

Eräs yksinkertainen talous koostuu hiili-, sähkö- ja terässektoreista. Sähkösektorin tuotannosta myydään 40% hiilisektorin käyttöön, 50% terässektorin käyttöön ja loput jää omaan käyttöön. Hiilisektorin tuotannosta sähköteollisuus ostaa 60% ja terästeollisuus 40%. Terässektorin tuotannosta puolestaan 60% myydään hiilisektorin käyttöön, 20% sähkösektorille ja loput omaan käyttöön.

Merkitään sähkösektorin vuosituotannon arvoa p_s, hiilisektorin p_h ja terässektorin p_t. Etsi tasapainotila, jossa kunkin sektorin tulot ja menot vastaavat toisiaan.

2.2 Gaussin eliminaatio

Ratkaisu: Tasapainotilassa hiilisektorin vuosituotannon arvo p_h on yhtä suuri kuin sen menot. Menot koostuvat siitä, että ostetaan 40% sähkösektorin tuotannosta ja 60% terässektorin tuotannosta. Siis:

$$p_h = 0.40p_s + 0.60p_t.$$

Vastaavasti sähkö- ja terässektoreille:

$$\begin{aligned} p_s &= 0.60p_h + 0.20p_t + 0.10p_s \\ p_t &= 0.50p_s + 0.40p_h + 0.20p_t. \end{aligned}$$

(Huomaa, että näillä sektoreilla osa tuotannosta menee omaan käyttöön!) Saadaan siis yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} p_h & -0.40p_s & -0.60p_t & = 0 \\ -0.60p_h & +0.90p_s & -0.20p_t & = 0 \\ -0.40p_h & -0.50p_s & +0.80p_t & = 0 \end{cases}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Kirjoitetaan tämä matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.40 & -0.60 \\ -0.60 & 0.90 & -0.20 \\ -0.40 & -0.50 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussin eliminaatiolla saadaan (pyöristettynä kahden luvun tarkkuudelle)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.40 & -0.60 & 0 \\ -0.60 & 0.90 & -0.20 & 0 \\ -0.40 & -0.50 & 0.80 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

joten yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_t \end{pmatrix} \approx p_t \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 9

Fotosynteesissä kasvi muuttaa auringonvalosta saamallaan energialla hiilidioksidia CO_2 ja vettä H_2O hapeksi O_2 ja glukoosiksi $C_6H_{12}O_6$. Reaktion kemiallinen yhtälö on siis

$$x_1 CO_2 + x_2 H_2O \quad \rightarrow \quad x_3 O_2 + x_4 C_6 H_{12} O_6$$

Etsi kertoimet x_1, x_2, x_3, x_4.

Vastaus: Hiili-, vety- ja happiatomien lukumäärien täytyy pysyä vakioina, joten yhtälön kummallakin puolella niitä kutakin on sama määrä. Tästä saamme yhtälöryhmän, joka ratkaistaan Gaussin eliminaatiomenetelmällä. Vastaukseksi saadaan $x_1 = x_2 = x_3 = 6\tau$, $x_4 = \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.