

MS-A0002 Matriisilaskenta

3. Matriisialgebra

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

3.1 Linearikuvaukset

Lineaariset yhtälöt ovat “vektoreille luonnollisia” yhtälöitä, joita ratkotaan mm. sähkömagnetiikassa, mekaniikassa, tietotekniikassa, taloustieteissä, ekologiassa jne.

Määritelmä 1

Funktio $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *lineaarinen* (eli lineaarikuvaus), jos

- (i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- (ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ kaikille $c \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Huomioita

- Ehdot (i) ja (ii) voidaan lausua myös yhdessä:
 $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$ kaikille $c, d \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
Edelleen (induktiolla)
 $T(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k) = c_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{u}_k)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, kaikille $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$.
Lineaarikuvaus säilyttää lineaarikombinaatiot.
- Mielivaltaiselle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ pätee $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
Lineaarikuvaus pitää origon paikallaan.
- Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ määräämä kuvaus $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ on lineaarinen (määritelmä toteutuu).
- Lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voidaan aina esittää matriisikuvausena (nähdään esimerkin jälkeen).

3.1 Linearikuvaukset

Esimerkki 2

Määritellään lineaarikuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä pisteiden $\mathbf{u} = (4, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 3)$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (6, 4)$ kuvapistet. Totea, että $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

3.1 Linearikuvaukset

Standardikantavektorit avaruudessa \mathbb{R}^n ovat

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0, 0),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Identiteettimatriisi (yksikkömatriisi) I_n on matriisi, jonka j :s sarake (yhtä lailla rivi) on j :s standardikantavektori:

$$I_n = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Lineaarikuvaukset

Lause 3

Jokainen lineaarikuvaus $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voidaan esittää matriisikuvausena $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, missä matriisin A sarakkeet ovat kantavektorien \mathbf{e}_j kuvat:

$$A = (T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)).$$

Esimerkki 4

Olkoon $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle $T(\mathbf{e}_1) = (5, -7, 2)$ ja $T(\mathbf{e}_2) = (-3, 8, 0)$. Etsitään matriisi $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ siten, että $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Ratkaisu: Koska mielivaltainen $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ voidaan esittää muodossa $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ ja koska T on lineaarinen, niin

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) \\ &= x_1(5, -7, 2) + x_2(-3, 8, 0) = (5x_1 - 3x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1 + 0x_2) \end{aligned}$$

eli sarakemuodossa

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Matriisi A on lineaarikuvauksen T esitys standardikannassa.

3.1 Lineaarikuvaukset

Avaruuden \mathbb{R}^n suora on joukko

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

missä $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ on eräs suoran piste ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on suoran suuntavektori.

Lause 5

Lineaarikuvaus kuvaa suoran suoraksi.

Todistus.

Luentoharjoitus.

3.1 Lineaarikuvaukset

Kaikki tason lineaarikuvaukset (eli kuvaukset $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ovat)

- venytyksiä
- peilauksia
- kiertoja
- projektioita

tai näiden yhdisteitä.

3.1 Lineaarikuvaukset

Projektiomatriiseja

Projektio x -akselille: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Projektio y -akselille: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Venyysmatriiseja

Venyys x -suunnassa kertoimella k : $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Venyys y -suunnassa kertoimella k : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

3.1 Lineaarikuvaukset

Peilausten matriiseja

Peilaus x -akselin suhteen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Peilaus y -akselin suhteen: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Peilaus suoran $y = x$ suhteen: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Peilaus suoran $y = -x$ suhteen: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Peilaus origon suhteen: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3.1 Linearikuvaukset

Pyöritysmatriisi

Matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

pyörittää xy -tason pistettä kulman φ verran origon ympäri vastapäivään.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Idea: Lineaarikuvausten laskutoimitusten avulla määritellään vastaavat matriisien laskutoimitukset.

Vakiolla kertominen ja summa. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Silloin $tA, A + B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ja määritellään

$$tA = \begin{bmatrix} tA_{11} & tA_{12} & \dots & tA_{1m} \\ tA_{21} & tA_{22} & \dots & tA_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ tA_{n1} & tA_{n2} & \dots & tA_{nm} \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1m} + B_{1m} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2m} + B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} & \dots & A_{nm} + B_{nm} \end{bmatrix}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 6

$$\begin{aligned} (-2) \begin{bmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -4 & +5 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & +4 & -6 \\ +8 & -10 & +12 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \\ 21 & 26 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Huom. Jotta $A + B$ olisi määritelty, on matriisien A ja B oltava samankokoiset!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoon $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Yhdistetty kuvaus on mielekäs vain muodossa $G \circ F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Jos F ja G ovat lineaarikuvauksia, niin $G \circ F$:kin on.

Olkoon B kuvauksen F matriisi ja A kuvauksen G matriisi. Tällöin $G \circ F$ on

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = A(B(x)) = ABx.$$

AB on *matriisitulo*.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 7

Olkoot $\underbrace{A}_{p \times n} = (\alpha_{ij})$ ja $\underbrace{B}_{n \times q} = (\beta_{ij})$. Tällöin $\underbrace{C}_{p \times q} = AB = (\gamma_{ij})$,

missä

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

Muistisääntö: $\underbrace{C}_{p \times q} = \underbrace{A}_{p \times n} \underbrace{B}_{n \times q}$.

Huom! Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli se ei kommutoi:
yleisesti $AB \neq BA$!

Huom! Tulo voi olla nolla, vaikka kumpikaan matriisi ei olisi nollamatriisi!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoot

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} .$$

Nyt $A + B$, AB ja BA eivät ole mielekkäitä (vastaavilla lineaarikuvauksilla menisivät dimensiot solmuun tällaisista yhdistelmistä). Kuitenkin voidaan laskea

$$BA = \begin{bmatrix} 9(-1) + 8(-3) & 9(-2) + 8(-4) \\ 7(-1) + 6(-3) & 7(-2) + 6(-4) \\ 5(-1) + 4(-3) & 5(-2) + 4(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & -50 \\ -25 & -38 \\ -17 & -26 \end{bmatrix}$$

ja

3.2 Matriisien laskutoimitukset

$$\begin{aligned} A^2 := AA &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)(-1) + (-2)(-3) & (-1)(-2) + (-2)(-4) \\ (-3)(-1) + (-4)(-3) & (-3)(-2) + (-4)(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 8

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Laske AB , AC , BC ja CB .

Vastaus: $AB = B$, $AC = C$ (vrt. $1 \cdot x = x$),

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad CB = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$