

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 9

Olkoon $\mathbf{x} = (-1, -2, -3) \in \mathbb{R}^3$ ja lineaarikuvauksen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ matriisi

$$A_F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} .$$

Silloin

$$\begin{aligned} A_F \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1) + 3(-2) + 4(-3) \\ 5(-1) + 6(-2) + 7(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -38 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

joten $F(-1, -2, -3) = A_F \mathbf{x} = (-20, -38)$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 10

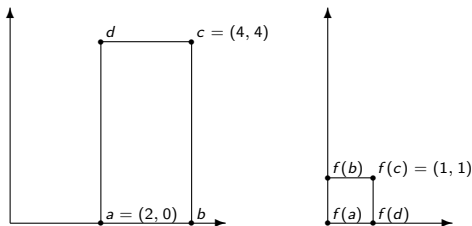
Tason suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja sen kulmat ovat vastapäivään lueteltuina $a = (2, 0)$, b , $c = (4, 4)$ ja d . Suorakulmiolle suoritetaan muunnos f , joka kuvaa sen peilatuksi neliöksi toiseen paikkaan tasossa. Suorakulmion kulmat kuvautuvat muunnoksessa siten, että $f(a) = (0, 0)$ ja $f(c) = (1, 1)$, sivut koordinaattiakselien suuntaiset ja kulmat ovat vastapäivään lueteltaessa $f(a)$, $f(d)$, $f(c)$ ja $f(b)$.

Etsi matriisi, jolla voit esittää muunnoksen, ja selvitä mikä on pisteen $(3, 1)$ kuva muunnoksessa.

Huom: Kyseessä ei ole lineaarikuvauks, mutta käyttämällä ns. homogeenisia koordinaatteja eli kirjoittamalla piste (x, y) muodossa $(x, y, 1)$ se voidaan esittää matriiseilla!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Ratkaisu: Piirretään ensin kuvat:



Muunnoksen voi toteuttaa siirtämällä kuvio ensin siten, että sen piste $(2, 0)$ tulee origoon (matriisi M_1), pienentämällä kuvio puolittamalla x -koordinaattiarvot ja jakamalla y -koordinaattiarvot luvulla 4 (matriisi M_2) ja lopulta peilaamalla suoran $x = y$ suhteen (koordinaattiarvojen vaihto keskenään, matriisi M_3).

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Jotta saisimme myös siirron (joka ei ole lineaarikuvaus tasossa!) esitettyä matriisilla, tarkastellaan pisteen (x, y) sijaan pistettä $(x, y, 1)$. Viimeinen koordinaatti on vain apuna mukana, kaksi ensimmäistä esittävät todellisuudessa tarkasteltavaa tason pistettä.

Nyt siirto $(x, y, 1) \mapsto (x - 2, y, 1)$ voidaan esittää matriisilla seuraavasti:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} .$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriisi, joka kutistaa puoleen x -suunnassa ja neljännekseen y -suunnassa, eli tekee operaation $(x, y, 1) \mapsto (x/2, y/4, 1)$ on

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/2 \\ y/4 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Lopuksi vielä peilaus $(x, y, 1) \mapsto (y, x, 1)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} .$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Koko operaation suorittava matriisi saadaan tekemällä nämä peräjälkeen:

$$\begin{aligned}
 M &= M_3 M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Piste (x, y) kuvautuu siis pisteeksi $(y/4, x/2 - 1)$ ja erityisesti pisteen $(3, 1)$ kuva on $(1/4, 1/2)$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriiseille voidaan lisäksi määritellä laskutoimitus, joka tekee $n \times m$ -matriisista $m \times n$ -matriisin vaihtamalla rivit ja sarakkeet.

Määritelmä 11 (Transpoosi)

Olkoon $\underbrace{A}_{n \times m} = (\alpha_{ij})$. Tällöin matriisin A transpoosi on matriisi

$$A^T = (\gamma_{ij}), \quad \text{missä } \gamma_{ij} = \alpha_{ji}$$

Yhdistetylle kuvaukselle $C = AB$ pätee $C^T = B^T A^T$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 12

Matriisi B on matriisin A *käänteismatriisi*, jos

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

missä I on sopivan kokoinen identiteettimatriisi.
Käänteismatriisia merkitään A^{-1} .

Lause 13

Jos käänteismatriisi on olemassa, niin se on yksikäsitteinen.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Huom.

- Jos matriisi A on kääntyvä, niin myös matriisi A^{-1} on kääntyvä, ja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

- Jos A ja B ovat kääntyviä matriiseja, niin myös AB on kääntyvä, ja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- Jos A on kääntyvä, niin myös A^T on kääntyvä, ja

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Käänteismatriisin laskeminen: Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kääntyvä. Miten lasketaan $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$? Nyt $AA^{-1} = I_n$ eli jos \mathbf{x}_j on matriisin A^{-1} j :s sarake, niin saadaan n kpl lineaarisia yhtälöitä

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ratkotaan nämä n yhtälöä yhtä aikaa Gauss-eliminaatiolla: liittomatriisi

$$[A \mid I_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

muunnetaan liittomatriisiksi $[I_n \mid A^{-1}]$. Siis

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 14

Lasketaan matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} [A \mid I_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] = [I_2 \mid A^{-1}] \end{aligned}$$

Siten $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. (Tarkista kertolaskulla!)

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 15

Mikä on matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

transpoosi?

Esimerkki 16

Etsi matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisit.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Terminologiaa:

- $\underbrace{A}_{n \times n}$ on neliömatriisi; symmetrinen, jos $A = A^T$.
- A on säännöllinen (sanotaan myös kääntyvä), jos käänteismatriisi on olemassa, muutoin singulaarinen.
- $A = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn})$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

on lävistäjä- eli diagonaalimatriisi.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

- Yläkolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j > k$
- Alakolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j < k$
- A on ortogonaalinen, jos $A^{-1} = A^T$.

Esimerkki 17

Laadi 3×3 -esimerkkimatriisit näistä kaikista.