3.3 Determinantti

Idea: Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determinantti $\det(A) \in \mathbb{R}$ ilmaisee miten paljon matriisia vastaava lineaarikuvaus “skaalaa&peilaa” avaruutta $\mathbb{R}^n$: Kuution

$$[0,1]^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \; \forall j : \; x_j \in [0,1]\}$$

“*n-tilavuus*” on 1 (1-til.=pituus, 2-til.=pinta-ala, 3-til.=tavallinen tilavuus, ...) ja A:n sarakkeiden virittämän “särmiön”

$$A[0,1]^n = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0,1]^n\}$$

n-tilavuus on $|\det(A)|$ (determinantin etumerkki kertoo peilautumisista).
Determinantin laskemiseen tarvitaan neljä lakia:

3.3 Determinantti

Laki 1:

$$\det(I_n) = 1.$$

Tulkinta 1: Identiteettikuvaus $x \mapsto I_n(x) = x$ ei muuta n-tilavuutta tai suuntia.

Laki 2:

$$\textit{Matriisin sarake } t - \textit{kertaistuu} \quad \Rightarrow \quad \textit{determinantti } t - \textit{kertaistuu}.$$

Tulkinta 2: "Särmiön n-tilavuus" t-kertaistuu yhden särmän t-kertaistuessa.

3.3 Determinantti

Esimerkki 18

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\S 2}{=} (-2)(3) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\S 1}{=} -6.$$

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{\S 2}{=} (6)(5)(4) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\S 1}{=} 120.$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \overset{\S 2}{=} (0) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

3.3 Determinantti

Laki 3: *Jos matriisissa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on (ainakin) kaksi samaa saraketta, niin*

$$\det(A) = 0.$$

Tulkinta 3: Tällöin särmiö $A[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ on "litistynyt" ja sen n-tilavuus on 0.

Esimerkki 19

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \overset{\S 3}{=} 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \overset{\S 3}{=} 0, \quad \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{\S 3}{=} 0.$$

3.3 Determinantti

Laki 4: *Olkoon* A_j *matriisin* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ j*:s sarake. Kun* $A_k = B_k + C_k$ *jollakin* $k \in \{1, \ldots, n\}$*, niin*

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_{k-1} & B_k + C_k & A_{k+1} & \ldots & A_n \end{bmatrix} \\ = \; & \det \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_{k-1} & B_k & A_{k+1} & \ldots & A_n \end{bmatrix} \\ + \; & \det \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_{k-1} & C_k & A_{k+1} & \ldots & A_n \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Tulkinta 4: Särmiön yhden särmän summaus näkyy n-tilavuudessa summana.

3.3 Determinantti

Esimerkki 20

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\S 3}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\overset{\S 3, \S 1}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1,
\end{aligned}
$$

joten $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1.$

3.3 Determinantti

Esimerkki 21 (lasketaan luennolla)

Laske matriisin $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ determinantti lakien §1-§4 avulla.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\overset{§4}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&\overset{§4}{=} \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \\
&\overset{§2}{=} ad\det(I) + ab\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + bc\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + cd\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{§1\&§3}{=} ad + 0 - bc + 0,
\end{aligned}$$

sillä äsken laskettiin $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$.

3.3 Determinantti

Lait $1, 2, 3, 4$ ovat ristiriidattomat ja riittävät determinantin laskemiseen. Käytännössä determinantit kuitenkin lasketaan käsin

- muistamalla, että

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

- ja purkamalla matriisi 2×2-osiin *alideterminanttisäännöllä*

$$\det(A) = (-1)^k \sum_i (-1)^i A_{ki} \det(A^{*ki}),$$

missä k on jokin rivinumero ja A^{*ki} matriisi A, josta on poistettu rivi k ja sarake i.

3.3 Determinantti

Determinanttia merkitään myös lyhyesti pystyviivoilla:

$$|M| := \det(M), \text{ kun } M \text{ on matriisi.}$$

Esimerkki 22

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg).\end{aligned}$$

3.3 Determinantti

Huom. Myös 3×3-matriisin determinantille on muistisääntö:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

"alamäkeen positiivisina, ylämäkeen negatiivisina".

Esimerkki 23

Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ determinantti.

Vastaus: $\det(A) = 42$

3.3 Determinantti

Lause 24

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Silloin*

$$\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0 \qquad \text{ja} \qquad \det(A^T) = \det(A).$$

Lause 25

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

3.3 Determinantti

Esimerkki 26

Millä kertoimia $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ koskevalla ehdolla matriisilla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ on käänteismatriisi?

Mikä silloin on käänteismatriisi A^{-1}?

Tarkista, että $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.