MS-A0002 Matriisilaskenta

4. Ominaisarvot ja -vektorit

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

4.1 Määritelmät

Tarkastellaan neliömatriiseja. Kun matriisilla kerrotaan vektoria, vektorin suunta ja pituus yleensä muuttuvat. Jotkin vektorit kuitenkin säilyttävät suuntansa. Näitä sanotaan matriisin ominaisvektoreiksi.

Määritelmä 1

Jos $n \times n$-matriisille A pätee

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

jollakin vektorilla $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ja skalaarilla $\lambda \in \mathbb{C}$, niin λ on matriisin A *ominaisarvo* ja $\mathbf{x}$ sitä vastaava *ominaisvektori*.

4.1 Määritelmät

Esimerkki 2

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ovatko $\mathbf{u}$ ja$\mathbf{v}$ matriisin A ominaisvektoreita?

Vastaus: $\mathbf{u}$ on, sillä $A\mathbf{u} = -4\mathbf{u}$. $\mathbf{v}$ ei ole, sillä $A\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}\ \forall\lambda \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 3

Osoita, että 7 on matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvo.

Ratkaisu: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.1 Määritelmät

Lause 4

Erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Sanotaan, että vektorit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ovat *lineaarisesti riippumattomat*, jos mitään niistä ei voida lausua lineaarikombinaationa toisista, eli yhtälön

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

ainoa ratkaisu on $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Todistus.

Hahmotellaan luennolla. □

4.1 Määritelmät

Huomioita

- reaalisia ominaisvektoreita ei aina ole olemassa
- ominaisvektori on määritelmän mukaan nollasta eroava
- ominaisarvo voi olla nolla
- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A(t\mathbf{x}) = \lambda(t\mathbf{x})$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten ominaisvektorin **x** sijaan voidaan puhua **x**:n suuntaisesta *ominaissuorasta* $\{t\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\}$. (Kulkee origon kautta.)
- Jos lineaarikuvauksen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvo $\lambda \neq 0$, niin vastaava ominaissuora kuvautuu itselleen ja ominaisarvo λ ilmoittaa ominaissuoran suuntaisen venytyksen.
- Jos $\lambda < 0$, niin suunnistus ominaissuoralla kääntyy, ts. venytyksen lisäksi lineaarikuvaus peilaa ominaissuoran normaalin suhteen.
- Jos $\lambda = 0$, niin kuvaus litistää ominaissuoran origoksi.

4.2 Laskeminen

Ominaisyhtälö $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ on yhtäpitävästi $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, missä I on identiteettimatriisi.
Tälle löytyy nollasta eroava ratkaisu $\mathbf{x}$ täsmälleen silloin, kun $\det(A - \lambda I) = 0$ jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tarkastellaan esimerkkinä lineaarikuvausta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Muodostetaan lineaarikuvauksen *karakteristinen polynomi* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

4.2 Laskeminen

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4.$$

Haluttiin $\det(A - \lambda I) = 0$ eli $p(\lambda) = 0$:

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1-\lambda)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (1-\lambda) = \pm 2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = -1 \text{ tai } \lambda = 3. \end{aligned}$$

Nämä ovat A:n ominaisarvot. Etsitään niitä vastaavat ominaisvektorit ratkaisemalla $\mathbf{x}$ yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.2 Laskeminen

Kun $\lambda = -1$, niin yhtälö on $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ts.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ts.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eli saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

(Lineaarisesti riippuvat yhtälöt juuri kuten pitääkin, sillä halutaan ratkaisuksi ominaissuora.)

4.2 Laskeminen

Yhtälöparin ratkaisujoukko on $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1\}$. (Suora.) Vastaavasti kun $\lambda = 3$, niin ominaisyhtälö on $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja saadaan yhtälöpari

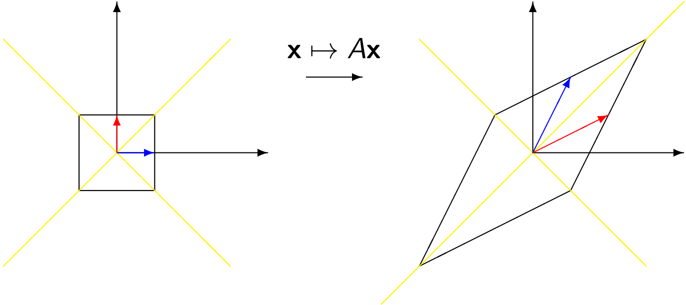
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Jälleen lineaarisesti riippuvat yhtälöt; ratkaisujoukko on suora $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1\}$.

Yhteenveto: ominaisarvoa -1 vastaava ominaissuora on $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1\}$ ja ominaisarvoa 3 vastaava ominaissuora on $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1\}$. Ominaisvektoreita ovat näillä suorilla olevat vektorit, esim. $\begin{pmatrix} 1, \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2 Laskeminen

Nämä tiedot kertovat lineaarikuvauksesta kaiken!



Kuvassa skaalataan ominaissuorien suuntaisesti kertoimilla 3 ja -1.

4.2 Laskeminen

Ominaisarvot ja -vektorit lasketaan siis seuraavasti:

- Muodosta karakteristinen polynomi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Etsi karakteristisen polynomin nollakohdat $p(\lambda) = 0$, nämä ovat ominaisarvot.
- Ratkaise kullakin ominaisarvolla λ_i sitä vastaava ominaisvektori/suora yhtälöstä $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 5

Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ 14 & -8 & 4 \\ 10 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja vastaavat ominaissuorat.

Vastaus: ominaisarvot ovat 1, 2, ja 3, ja vastaavat ominaissuorat ovat $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R}\}$, $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R}\}$ ja $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R}\}$.

4.2 Laskeminen

Esimerkki 6

Matriisin

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 1 ja -1, sillä sen määräämä lineaarikuvaus on peilaus suoran suhteen.

Esimerkki 7

Matriisilla

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ei ole reaalisia ominaisvektoreita, sillä sen määräämä lineaarikuvaus on 90 asteen pyöritys. Ominaisarvot ovat i ja $-\mathrm{i}$.

4.2 Laskeminen

Kuten edellisessä esimerkissäkin nähtiin, reaaliselle matriisille kompleksiset ominaisarvot esiintyvät konjugaattiparina.

Lause 8

Jos reaalisella matriisilla A on kompleksinen ominaisarvo $\lambda = x + y\mathrm{i}$, jota vastaa ominaisvektori $\mathbf{v}$, niin myös $\overline{\lambda} = x - y\mathrm{i}$ on ominaisarvo ja $\overline{\mathbf{v}}$ on sitä vastaava ominaisvektori.

Todistus.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad A\overline{\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{(A\mathbf{v})} = \overline{(\lambda\mathbf{v})} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}. \qquad \square$$

4.2 Laskeminen

Ominaisarvoille pätevät seuraavat tulokset:

- Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.
- Jos $\lambda \neq 0$ on kääntyvän matriisin ominaisarvo, niin $1/\lambda$ on käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvo.
- Kolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot.
- Matriisin determinantti on yhtä kuin sen ominaisarvojen tulo:

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

- Matriisin $A = (a_{ij})$ diagonaalialkioiden summa eli *jälki* (engl. trace) on yhtä kuin sen ominaisarvojen summa:

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$