5.3 SVD

(a) Alkuperäinen kuva, 463 KB

(b) SVD:llä pakattu kuva, 77 KB

5.3 SVD

Kuten edellä huomattiin, vain neliömatriisin voi diagonalisoida – olettaen, että sillä on täysi määrä riippumattomia ominaisvektoreita. Kaikille matriiseille voidaan kuitenkin tehdä singulaariarvohajotelma (Singular Value Decomposition).

SVD:n ideana on purkaa lineaarikuvaus kolmeen osaan: unitaariseen kuvaukseen, venytykseen ja toiseen unitaariseen kuvaukseen. (Unitaariset kuvaukset voi usein tulkita kierroiksi.)

SVD:tä käytetään mm. signaalinkäsittelyssä ja tilastotieteessä. Siihen perustuvat esimerkiksi eräät kuvanpakkausmenetelmät sekä Googlen hakukoneen toiminta. SVD liittyy läheisesti ns. pääkomponenttianalyysiin, jossa tavoitteena on löytää monidimensioisesta datasta ne komponentit, joilla sen keskeisimmät piirteet voidaan esittää menettämättä oleellista informaatiota.

5.3 SVD

Lause 10 (SVD)

Matriisille $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ on olemassa hajotelma

$$A = U\Sigma V^T,$$

missä U on $m \times m$-ulotteinen ortogonaalinen matriisi, V on $n \times n$-ulotteinen ortogonaalinen matriisi ja Σ on $m \times n$-ulotteinen diagonaalimatriisi, joka sisältää matriisin A singulaariarvot.

Muistutus: Matriisi on ortogonaalinen, jos käänteismatriisi on sen transpoosi: $U^{-1} = U^T$. Tällöin sen sarakevektorit ovat ortonormaaleja. (Reaaliselle matriisille ortogonaalisuus ja unitaarisuus ovat sama asia.)

5.3 SVD

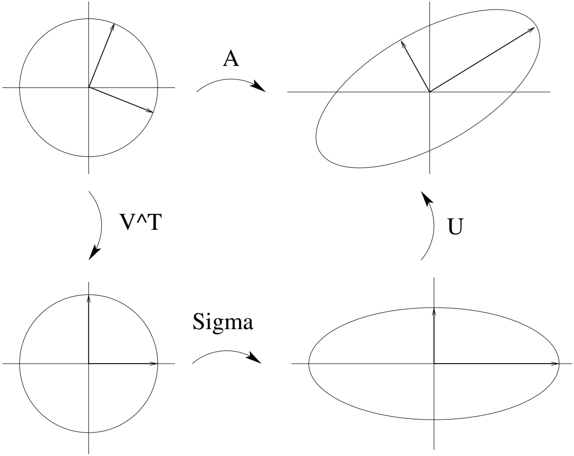


Figure: A = kierto + venytys + kierto

5.3 SVD

Huom.

- Vain matriisi Σ on yksikäsitteinen (kun singulaariarvot asetetaan diagonaalille suurimmasta pienimpään), muita voi löytyä useita.
- Luku $\sigma > 0$ on matriisin A singulaariarvo, jos on olemassa vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ siten, että $A\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}$ ja $A^T\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}$.
- Jos σ on matriisin A singulaariarvo, niin σ^2 on matriisin A^TA ominaisarvo.
- SVD on olemassa myös kompleksisille matriiseille. Tällöin transpoosin V^T sijaan tarvitaan konjugaattitranspoosi V^* ja U ja V ovat unitaarisia, eli $V^{-1} = V^*$, $U^{-1} = U^*$.

5.3 SVD

SVD voidaan laskea seuraavien tietojen perusteella:

- Matriisin Σ diagonaalialkiot σ_j ovat matriisin $A^T A$ ominaisarvojen positiiviset neliöjuuret.
- Matriisin V sarakevektorit $\mathbf{v}_j$ (eli V^T:n rivit) ovat matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Matriisin U sarakevektorit $\mathbf{u}_j$ ovat matriisin AA^T yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Jos $\sigma_j \neq 0$, niin sarakevektori $\mathbf{u}_j = A\mathbf{v}_j / \sigma_j$.

Huom. Matriisit $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ja $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ovat aina symmetrisiä, joten niillä on täysi määrä ortogonaalisia ominaisvektoreita. Koko SVD:n idea perustuu tähän.

5.3 SVD

Esimerkki 11

Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Ratkaisu: Matriisin $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ovat 50 ja 0, joten singulaariarvot ovat $\sigma_1 = \sqrt{50}$, $\sigma_2 = 0$. Matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit ovat $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

5.3 SVD

Nyt $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{v}_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{5} \\ 15/\sqrt{5} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. Koska $\sigma_2 = 0$, vektoria $\mathbf{u}_2$ ei saada samalla tavalla, vaan se täytyy laskea matriisin AA^T yksikköpituisena ominaisvektorina: $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 45 \end{pmatrix}$, ja sen ominaisarvoa 0 vastaava yksikköpituinen ominaisvektori on $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. Näin ollen hajotelma on

$$
\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^T \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(Tarkista kertolaskulla!)

5.3 SVD

Alkuperäistä $n \times n$ matriisia voidaan approksimoida SVD:n avulla ottamalla k ensimmäistä saraketta matriisista U, $k \times k$ osa diagonaalimatriisin Σ vasemmasta yläkulmasta ja k ensimmäistä riviä matriisista V^T, eli ensimmäistä k:ta singulaariarvoa vastaava osuus.

Huom: Singulaariarvot oli valittu suuruusjärjestykseen, suurimmasta pienimpään.

Näin saadaan alkuperäistä matriisia approksimoiva matriisi, "jonka rangi on k".

5.3 SVD

Esimerkki 12

Äskeisen esimerkin matriisille saadaan approksimaatio

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
\approx & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

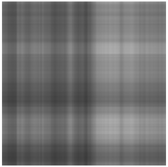
5.3 SVD

Esimerkki 13

Testikuvassa on 512×512 pikseliä, eli se voidaan esittää 512×512-matriisilla, pikselin väri antaa arvon ko. alkiolle matriisissa. Tälle matriisille voidaan tehdä singulaariarvohajotelma, ja approksimoida sitten kuvaa ottamalla hajotelmasta k:ta ensimmäistä singulaariarvoa vastaava osuus. Huomataan, että vähempikin määrä dataa riittää kuvan esittämiseen tunnistattavasti ja jopa silmämääräisesti riittävän tarkasti.

Seuraavalla sivulla kuvat, kun $k = 1, 10, 20, 50, 100$ ja 200 sekä alkuperäinen kuva.

5.3 SVD



(a) $k = 1$

(b) $k = 10$

(c) $k = 20$

(d) $k = 50$

(e) $k = 100$

(f) $k = 200$

(g) $k = 512$

5.3 SVD

Kun alkuperäisen $m \times n$-matriisin sijaan käytetään SVD:stä k ensimmäistä singulaariarvoa, tarvittavien lukujen määrä on

$$k + km + kn,$$

eli k singulaariarvoa, niistä vastaavat k ensimmäistä sarakevektoria (pituus m) matriisista U ja k ensimmäistä rivivektoria (pituus n) matriisista V^T.

Neliömatriisille $n \times n$ tämä tarkoittaa, että jos $k < n^2/(1 + 2n)$, niin datan määrä pieneni. Edellä testikuvalle $n = 512$, joten $k < 255$ vähentää datamäärää.

5.3 SVD

Esimerkki 14

On saatu seuraava singulaariarvohajotelma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Approksimoi kyseessä olevaa matriisia kahden ja sitten kolmen singulaariarvon avulla. Mitä saat? Miksi? Laske myös alkuperäinen matriisi.

5.3 SVD

Esimerkki 15

Käy läpi SVD:hen perustuva hahmontunnistusdemo Matlabilla. Demon ohjeet ovat jaossa kurssin MyCourses-sivulla.

Huomattiin siis, että SVD:n avulla voidaan poimia datasta olennainen ja päästä turhasta "kohinasta" eroon, pienentäen samalla käsiteltävää datamäärää merkittävästi.

SVD:n muut sovellukset jätämme myöhempiin kursseihin, tämä kurssi päättyy tähän!

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.