MS-A0002 Matriisilaskenta

Kertausta

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

1.1 Vektorit

Reaalinen n-ulotteinen avaruus $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, jonka pisteet voidaan mieltää (paikka)vektoreiksi:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ esim.

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Vektoreiden laskutoimituksia

- skalaaritulo eli pistetulo

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b})\\ &= \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.\end{aligned}$$

- vektoritulo eli ristitulo

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\\ &= (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Pistetulon ja vektoritulon sovelluksia:

- kohtisuoruus ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$) ja vektoreiden välinen kulma

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

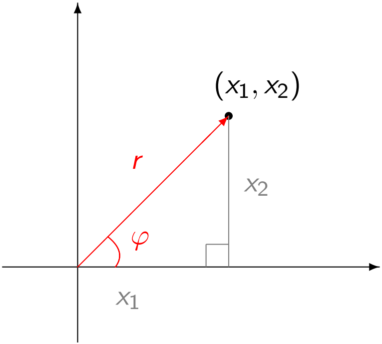
- kohtisuoran vektorin muodostaminen vektoritulolla:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a} \quad \text{ja} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}.$$

- vektoreiden **a** ja **b** virittämän suunnikkaan pinta-ala $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

1.3 Napakoordinaatit

Tason vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ voidaan ilmaista karteesisissa koordinaateissa $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ tai napakoordinaateissa $\mathbf{x} = (r, \varphi)$.



$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

$$x_1 = r\cos\varphi$$

$$x_2 = r\sin\varphi$$

1.4 Kompleksiluvut

Imaginääriyksikkö i on luku, jolle pätee

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Saadaan kompleksilukujen joukko $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Olkoot $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Nyt luvun z

- reaaliosa on $\mathrm{Re}(z) := a \in \mathbb{R}$ ja imaginaariosa on $\mathrm{Im}(z) := b \in \mathbb{R}$.
- kompleksikonjugaatti eli liittoluku on $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$.
- itseisarvo ja argumentti lasketaan kaavoilla

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ja} \quad \tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}.$$

1.4 Kompleksiluvut

Kompleksiluvut voidaan lausua

- Perusmuodossa $z = a + \mathrm{i}b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.
- Napakoordinaateissa (r, φ), missä $r = |z|$ ja $\varphi = \arg(z)$.
- Polaarimuodossa $re^{\mathrm{i}\varphi}$.

Kompleksilukujen tulo ja osamäärä napakoordinaateissa (polaarikoordinaateissa):

$$|zw| = |z||w| \quad \text{ja} \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

ja

$$|z/w| = |z|/|w| \quad \text{ja} \quad \arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w).$$

1.4 Kompleksiluvut

Huom.

- Luku $\bar{z}z = |z|^2$ on aina reaalinen ja siten osamäärä voidaan sieventää laventamalla nimittäjän liittoluvulla

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}.$$

- Erityisesti potenssit on helppo laskea napakoordinaateissa (polaarikoordinaateissa):

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{ja} \quad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

eli $(re^{\mathrm{i}\varphi})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\varphi}$.

1.5 Esimerkkitehtävä

Esimerkki 1 (vanha tenttitehtävä)

a) Laske vektorien $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ skalaaritulo. Mikä on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma?

b) Sievennä kompleksiluku

$$\frac{3 - \mathrm{i}}{1 - 2\,\mathrm{i}}$$

muotoon $x + y\mathrm{i}$, missä x ja y ovat reaalilukuja.

c) Esitä kompleksiluku $(1 + \mathrm{i})^{10}$ napakoordinaateissa siten, että napakulma on välillä $]-\pi, \pi]$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases}$$

voidaan esittää matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Mitä yhtälöryhmän ratkaisu kuvaa?

- Kukin rivi on yhtälö tasolle avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x}$ on kaikille tasoille yhteinen piste.
- Matriisi A määrittelee kuvauksen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Etsitään sellaista pistettä $\mathbf{x}$, jonka kuva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Ratkaisu $\mathbf{x}$ on vektorin $\mathbf{b}$ esitys matriisin A sarakkeiden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ avulla:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}.$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Mitä tiedämme ratkaisujen lukumäärästä? Ratkaisuja voi olla

1. 0 kpl (tasot eivät leikkaa). Tällöin matriisi A on singulaarinen.
2. 1 kpl (tasot leikkaavat yhdessä pisteessä). Tällöin matriisi A on säännöllinen ja $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.
3. ∞ kpl (tasot leikkaavat pitkin suoraa tai ovat kaikki samoja). Tällöin matriisi A on singulaarinen.

2.2 Gaussin eliminaatio

Gaussin eliminaatiomenetelmässä matriisiyhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kirjoitetaan liittomatriisina $[A \mid \mathbf{b}]$, jota muokataan rivioperaatioin:

1. lisämällä (painotettu) rivi toiseen riviin
2. vaihtamalla kahden rivin paikkaa keskenään
3. kertomalla yksittäinen rivi vakiolla $c \neq 0$.

2.2 Gaussin eliminaatio

Jos matriisi A on säännöllinen, niin yhtälöryhmästä $[A \mid \mathbf{b}]$ saadaan rivioperaatioin $[I \mid \mathbf{d}]$ ja etsitty ratkaisu on tällöin $\mathbf{x} = \mathbf{d}$.

Jos matriisi A on singulaarinen niin se pyritään saattamaan ns. redusoituun porrasmuotoon:

- jokaisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1
- alemmalla rivillä on alussa (siis vasemmalta lukien) nollia aina useampi kuin ylemmällä.

Jos syntyy ristiriita (liittomatriisissa vasen puoli on nolla mutta oikea puoli ei) niin tällöin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Muussa tapauksessa muuttujat jaetaan vapaisiin ja kiinnitettyihin. Kiinnitetyt muuttujat ratkaistaan vapaiden avulla.

2.3 Esimerkkitehtävä

Esimerkki 2 (vanha tenttitehtävä)

a) Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ Gaussin eliminaatiolla.

b) Piste $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ toteuttaa $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

Onko se kyseisen yhtälöryhmän yksikäsitteinen ratkaisu? Perustele vastauksesi.

3.1 Lineaarikuvaukset

Lineaarikuvaus on kuvaus, joka säilyttää lineaarikombinaatiot:

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

kaikille skalaareille c ja d ja kaikille vektoreille $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$.

Lineaarikuvaukset ovat matriisien määrittämiä kuvauksia:

- Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ määräämä kuvaus $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ on aina lineaarinen.
- Lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ voidaan aina esittää matriisin $A = \big(T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)\big) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avulla.

3.1 Lineaarikuvaukset

Lineaarikuvauksilla on myös geometrinen tulkinta. Esimerkiksi tasossa lineaarikuvaukset (eli kuvaukset $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) ovat

- venytyksiä
- peilauksia
- kiertoja
- projektioita

tai näiden yhdisteitä.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriisitulo määritellään yhdistetyn kuvauksen avulla.

Olkoot $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineaarikuvauksia ja $\underbrace{B}_{n\times q} = (\beta_{ij})$ ja $\underbrace{A}_{p\times n} = (\alpha_{ij})$ niitä esittävät matriisit.

Tällöin $G \circ F$ on kuvaus

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = A(B(x)) = ABx.$$

Matriisitulon $\underbrace{C}_{p\times q} = AB$ alkiot lasketaan kaavalla

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmiä:

- Matriisin A transpoosi A^T saadaan vaihtamalla A:n rivit ja sarakkeet päittäin.
- Matriisin A käänteismatriisi A^{-1} on matriisi, jolle pätee

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

  Jos käänteismatriisi on olemassa, niin A on säännöllinen (tai kääntyvä). Muutoin A on singulaarinen.
- Neliömatriisi A on symmetrinen, jos $A = A^T$.
- Neliömatriisi A on ortogonaalinen, jos $A^{-1} = A^T$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Laskusääntöjä:

- **Käänteismatriisin laskeminen:** Ratkotaan liittomatriisi $[A \mid I]$ Gaussin eliminaatiolla muotoon $[I \mid A^{-1}]$.
- Transpoosille ja käänteismatriisille pätee

$$(A^T)^T = A \quad \text{ja} \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

sekä

$$A^{-T} := (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

- Matriisitulolle saadaan säännöt

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{ja} \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

3.3 Determinantti

Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determinantti

$$|A| = \det(A) \in \mathbb{R}$$

ilmaisee miten paljon matriisia vastaava lineaarikuvaus "skaalaa&peilaa" avaruutta $\mathbb{R}^n$.

Jos A on singulaarinen, niin $\det(A) = 0$. Jos A on säännöllinen, niin $\det(A) \neq 0$.

Lisäksi

$$\det(A^T) = \det(A) \quad \text{ja} \quad \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3.3 Determinantti

Isojen matriisien determinantit lasketaan purkamalla ne pienempiin osiin alideterminanttisäännöllä.

Laskusäännöt pienille matriiseille:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

ja

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

3.4 Esimerkkitehtävä

Esimerkki 3 (muokattu vanhasta tenttitehtävästä)

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Muodosta matriisit $A^T A$ ja AA^T.

b) Onko A säännöllinen? Jos on, niin laske A:n käänteismatriisi.

Ominaisarvoyhtälö

Skalaari $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ominaisarvo, jos on olemassa vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ siten että

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Vektori $\mathbf{x}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

Ominaisvektorin $\mathbf{x}$ sijaan voidaan myös puhua $\mathbf{x}$:n suuntaisesta ominaissuorasta $\{t\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\}$, joka kulkee origon kautta.

4.2 Laskeminen

Ominaisarvoyhtälö voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ominaisvektori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa täsmälleen silloin, kun $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ominaisarvot ja -vektorit lasketaan seuraavasti:

- Muodosta karakteristinen polynomi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Etsi karakteristisen polynomin nollakohdat $p(\lambda) = 0$, nämä ovat ominaisarvot.
- Ratkaise kullakin ominaisarvolla λ_i sitä vastaava ominaisvektori/-suora yhtälöstä $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.2 Laskeminen

Huom.

- Erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.
- Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.
- Matriisin determinantti on yhtä kuin sen ominaisarvojen tulo:

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

- Matriisin $A = (a_{ij})$ diagonaalialkioiden summa eli jälki on yhtä kuin sen ominaisarvojen summa:

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

4.3 Kertaluvut

Matriisin A ominaisarvolle λ voidaan määrittää:

- algebrallinen kertaluku $m_a(\lambda)$: karakteristisen polynomin $p(\lambda)$ juuren λ kertaluku
- geometrinen kertaluku $m_g(\lambda)$: lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien lukumäärä (ominaisarvoa λ vastaavan ominaisavaruuden dimensio).

Geometrinen kertaluku ei koskaan voi olla suurempi kuin algebrallinen kertaluku. Toisin sanoen $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

4.4 Sovelluksia

Mihin ominaisarvoja tarvitaan?

- Matriisin keskeisten ominaisuuksien tutkiminen: mitkä vektorit säilyttävät suuntansa?
- Potenssien laskeminen: Jos $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, niin $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.
- Markov ketjut.
- Matriisihajotelmat: diagonalisointi ja singulaariarvohajotelma.

4.5 Esimerkkitehtävä

Esimerkki 4 (muokattu vanhasta tenttitehtävästä)

a) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriisi, jolle pätee $A^2 = A$. Voiko $\lambda = 2$ olla A:n ominaisarvo? Perustele vastauksesi.

b) Todista, että säännölliselle matriisille $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pätee $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

c) Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voidaan diagonalisoida, eli kirjoittaa muodossa $A = S\Lambda S^{-1}$, missä $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on diagonaalimatriisi, joka sisältää A:n ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Osoita, että $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Huomaa myös esimerkki 5 jäljempänä.

5.1 Diagonalisointi

Jos matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, niin se voidaan diagonalisoida eli kirjoittaa muodossa

$$A = S \Lambda S^{-1},$$

missä Λ on diagonaalimatriisi.

Matriisin Λ diagonaalialkiot ovat A:n ominaisarvot ja matriisin S sarakkeet ovat niitä vastaavat ominaisvektorit.

5.1 Diagonalisointi

Huom. Diagonaalisoituvalle matriisille on helppo laskea potensseja:

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1},$$

missä $k \in \mathbb{Z}$ ja

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Tapauksessa $k = -1$ saadaan käänteismatriisi A^{-1}.

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Terminologiaa:

- Matriisin $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ konjugaattitranspoosi $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ on matriisi, jolle $(A^*)_{kj} = \overline{A_{jk}}$.
- Matriisi $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on symmetrinen, jos $A^* = A$ (vertaa tapaukseen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $A^T = A$).
- Matriisi $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on normaali, jos $A^* A = AA^*$.
- Matriisi $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on unitaarinen, jos $U^* = U^{-1}$.
- Kompleksisille vektoreille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ pistetulo on

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \overline{\mathbf{v}_i}.$$

5.2 Unitaarinen diagonalisointi

Eräs diagonalisoinnin erikoistapauksista on unitaarinen diagonalisointi.

Jos matriisi $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on normaali, niin se voidaan diagonalisoida unitaarisesti eli kirjoittaa muodossa

$$A = U \Lambda U^*,$$

missä $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on unitaarinen ja $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonaalinen.

Matriisin Λ diagonaalialkiot ovat (kuten aiemminkin) A:n ominaisarvot ja matriisin U sarakkeet ovat niitä vastaavat yksikköpituiset ja ortogonaaliset ominaisvektorit.

5.3 SVD

Mille tahansa matriisille $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ löytyy singulaariarvohajotelma (eli SVD)

$$A = U \Sigma V^T,$$

missä $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ja $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ovat ortogonaalisia matriiseja ja $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ on diagonaalimatriisi, joka sisältää matriisin A singulaariarvot.

Kompleksiselle matriisille $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ saadaan vastaavasti $A = U \Sigma V^*$, jolloin U ja V ovat unitaarisia matriiseja.

5.3 SVD

Luku $\sigma > 0$ on matriisin A singulaariarvo, jos sille pätee

$$A\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u} \quad \text{ja} \quad A^T\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}$$

joillakin vektoreilla $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$.

Huom.

- Singulaariarvot asetetaan diagonaalille suurimmasta pienimpään. Tällöin matriisi Σ on yksikäsitteinen.
- Matriisit U ja V eivät ole yksikäsitteisiä.

5.3 SVD

SVD:n laskeminen:

- Matriisin Σ diagonaalialkiot σ_j (siis A:n singulaariarvot) ovat matriisin $A^T A$ ominaisarvojen positiiviset neliöjuuret.
- Matriisin V sarakevektorit $\mathbf{v}_j$ (eli V^T:n rivit) ovat matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Matriisin U sarakevektorit $\mathbf{u}_j$ ovat matriisin AA^T yksikköpituiset ominaisvektorit.
- Toisaalta myös $\mathbf{u}_j = A\mathbf{v}_j / \sigma_j$, kun $\sigma_j \neq 0$.

5.3 SVD

Alkuperäistä $m \times n$ matriisia voidaan approksimoida SVD:n avulla ottamalla k ensimmäistä saraketta matriisista U, $k \times k$ osa diagonaalimatriisin Σ vasemmasta yläkulmasta ja k ensimmäistä riviä matriisista V^T. Näin saadaan alkuperäistä matriisia approksimoiva matriisi, "jonka rangi on k".

Tällaisen approksimaation esittämiseen tarvittavien lukujen määrä on

$$k + km + kn.$$

5.4 Esimerkkitehtäviä

Esimerkki 5 (vanha tenttitehtävä)

Diagonalisoi matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tarkista vastauksesi matriisikertolaskulla. Vihje: Yksi B:n ominaisarvoista on nolla.

5.4 Esimerkkitehtäviä

Esimerkki 6 (muokattu vanhasta tenttitehtävästä)

Matriisilla A on singulaariarvohajotelma

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ 14 & 19 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

a) Aseta hajotelmaan oikeille paikoilleen A:n singulaariarvot 15, 3 ja 30. Laske hajotelman avulla matriisille A "rangia 2" oleva approksimaatio, jossa jätät merkityksettömimmän singulaariarvon huomiotta.

b) Kerro, mistä osista matriisin singulaariarvohajotelma koostuu ja miten se voidaan laskea.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.