Aalto-yliopisto

Matriisilaskenta (TFM)

Laskuharjoitus 6 / vko 49

Alkuviikko: Diagonalisointi

Johdantotehtävä 1: Laske matriisien

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Muodosta ortogonaalinen similaritettimuunnosmatriisi T (so. matriisi, jolle pätee $T^{-1} = T^{\mathrm{T}}$). Kirjoita vastaava lävistäjämatriisi Λ ja totea, että $T^{-1}AT = \Lambda$.

Johdantotehtävä 2: Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$$

ominaisvektoreiden välinen kulma parametrin t funktiona. Mitä tämä kertoo ominaisvektoreiden lineaarisesta riippumattomuudesta?

Vertaisarviointi 3: Tutki matriisin

$$\begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoja ja -vektoreita parametrin α eri arvoilla. Mitä voidaan sanoa niiden reaalisuudesta ja kompleksisuudesta? Montako lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria voidaan löytää?

Vertaisarviointi 4: Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Onko matriisi diagonalisoituva? Ilmoita myönteisessä tapauksessa vastaava diagonaalimatriisi ja similariteettimuunnosmatriisi.

Loppuviikko: Lineaarikuvaus

Johdantotehtävä 5: Lineaarikuvaus $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ kuvaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit x_1, x_2 ja x_3 vektoreille $(0, 2, -1)$, $(1, 2, 3)$ ja $(1, -1, 0)$. Laske vektorin $3x_1 - 2x_2 + x_3$ kuva.

Johdantotehtävä 6: Voiko kuvaus $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ olla lineaarinen, jos

$$F((0,1,1)) = (1,0,0), \quad F((1,0,1)) = (1,1,0), \quad F((1,-1,0)) = (1,1,1)?$$

Johdantotehtävä 7: Lineaarikuvauksella $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on ominaisuudet $F((1,1)) = (3,-1)$ ja $F((2,-1)) = (1,2)$. Laske kuvauksen matriisi (luonnolllisten kantojen suhteen) ja määritä tämän avulla vektorin $(1,-1)$ kuva.

Johdantotehtävä 8: Olkoon F injektiivinen lineaarikuvaus ja vektorit $a_1, \ldots, a_m$ lineaarisesti riippumattomia. Todista, että tällöin myös vektorit $F(a_1), \ldots, F(a_m)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Päteekö tulos, jos F ei ole injektio?

Verkkotehtävät 1: Verkkotehtävien palautus päättyy viikon 50 tiistaina klo 16.