

Harjoitus 1: Johdatus matemaattiseen mallintamiseen (Matlab)

MS-C2107 Sovelletun matematiikan tietokonetyöt



Matemaattinen mallintaminen

- Malli on todellisuuden jäljitelmä.
- Fysikaaliset lait, tilastollinen päättely, simulointi ...
- Hyvä malli on mahdollisimman yksinkertainen. Sopiva yksinkertaistuksen aste riippuu käyttötarkoituksesta.
- Mallin avulla systeemiä voidaan tarkastella ilman kokeiden tekemistä.
 - Kokeiden tekeminen systeemistä voi olla liian vaikeaa, kallista, tai mahdotonta.

White Box - Black Box

- **White box** malli: Systemin riippuvuussuhteet tunnetaan.
 - Luonnonlait
 - Fysikaalinen mallintaminen
 - Esim. sähköpiirin mallintaminen
- **Black box** malli: Systemin riippuvuussuhteita ei tunneta, vaan malli sovitetaan mittausdataan.
 - Identifiointi
 - Esim. kansantalouden mallintaminen
- Välimaastossa **Gray Box** mallintaminen
 - Systemin rakenne osittain tunnettu, mittausdataa käytetään parametrien määrittämiseen.

Mallien käyttötarkoituksia 1/2

- Ennustaminen
 - Esim. Kuinka suuri sähkön kulutus tulee olemaan ensi vuonna?
- Optimointi
 - Esim. Mikä on paras mahdollinen tuotannon määrä yritykselle?
- Sääto
 - Esim. Kuinka paperikonetta tulisi ohjata, jotta lopputulos olisi tasalaatuista?

Mallien käyttötarkoituksia 2/2

- Päätöksenteko
 - Esim. Pitäisikö Suomeen rakentaa lisää ydinvoimaa?
- Maailmankuvan muodostaminen
 - Esim. Mitkä tekijät vaikuttavat Suomen kansantalouden kehittymiseen?

Mallien luokittelu 1/2

- Deterministinen - Stokastinen
- Dynaaminen - Staattinen
- Jatkuva-aikainen - diskreettiaikainen
- Keskitetyt parametrit - Jakautuneet parametrit
- Jatkuva-aikainen - Tapahtumaorientoitunut
- Parametrinen - Ei-parametrinen
- Single-input-single-output (SISO) - Multi-input-multi-output (MIMO)
- Lineaarinen - Epälineaarinen
- Aikavariantti - Aikainvariantti
- Aikatasomalli - Taajuustasomalli

Mallien luokittelu 2/2

- Mallit voidaan myös jaotella [aiheen](#) mukaan:

- Matemaattiset mallit esim.

Fysiikassa

Lääketieteessä

Psykologiassa

Taloustieteessä

- TAI [ratkaisutekniikan](#) mukaan:

- Matemaattinen mallintaminen esim.

Differentiaaliyhtälöillä

Graafeilla

Matemaattisella ohjelmoinnilla

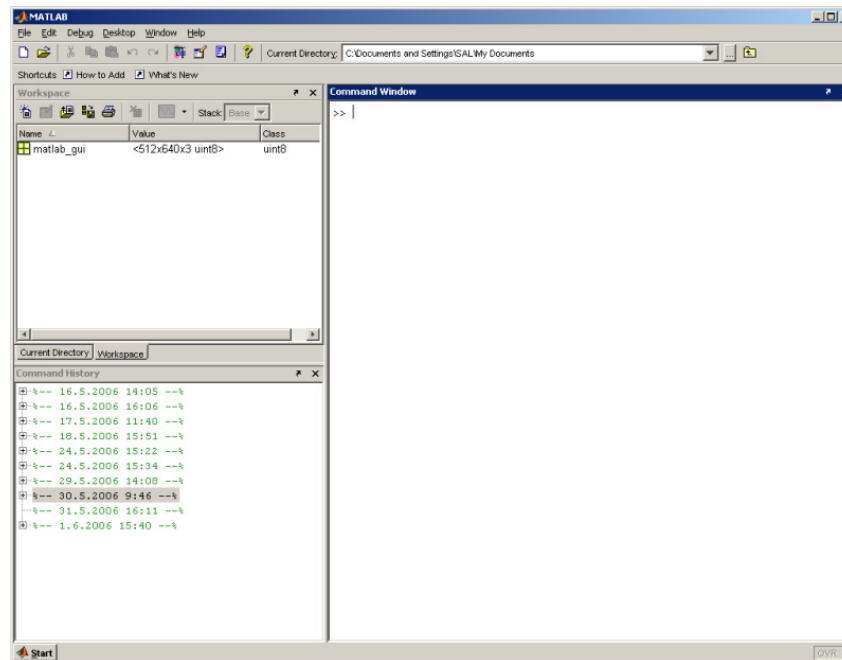
Neuroverkoilla

Mallinrakennuksen vaiheet

- (1) Tehtävän määrittely
- (2) Mallin muodostaminen
 - Puetaan kohdan (1) tehtävä matemaattiselle kielelle.
- (3) Mallin ratkaiseminen
 - Suoraviivaisin osuus, perustuu yleensä hyvin määriteltyyn matemaattiseen teoriaan.
- (4) Validointi
 - Vastaako malli niihin kysymyksiin, johon sen piti vastata?
- (5) Ratkaisun käyttöönotto
 - Toimintaohjeita mallin käyttäjälle.

Matlab

- Matlab (MATrix LABoratory): numeeriseen laskentaan tarkoitettu ohjelma.
- Käytetään laajasti eri insinöörialoilla.



Matlabin käyttöliittymä, toolboxit

- Command Window - Komentoja voidaan syöttää yksi kerrallaan.
- Command History - Aikaisemmin syötetyt komennot.
- Workspace - Työtilaan tallennetut muuttujat.
- Editor - Ns. [m-tiedostojen](#) (funktioiden ja komentojonotiedostojen) muokkaamista varten.
- Help - Minkä tahansa funktion helpin saa auki seuraavasti:
help funktio
- Matlabissa eri sovellusalueille tehtyjä valmiita työkalupaketteja
 - Statistics Toolbox
 - Optimization Toolbox
 - Symbolic Math Toolbox
 - Curve Fitting Toolbox

Matriisien käsittely Matlabissa

- Matriisit ovat perustietorakenne Matlabissa.
- Matriisit syötetään alkioittain hakasulkujen sisään.
- Välilyönti (tai pilkku) erottaa samalla rivillä olevat alkiot.
- Puolipiste erottaa rivit toisistaan.
- Vektorit luodaan vastaavalla tavalla.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Matriisin alkioihin viittaaminen 1/2

- Viittaus sulkujen avulla muodossa (*rivi,sarake*)

A =

1	2	3
4	5	6
7	8	9

```
>> A(2,1)
```

```
ans =
```

```
4
```

- **Huom!** Indeksointi alkaa 1:sta, ei 0:sta (toisin kuin esim. Javassa)

Matriisin alkioihin viittaaminen 2/2

- Voidaan myös viitata useamman alkion muodostamaan alueeseen kaksoispisteen (:) avulla.

```
>> A(1:2,1)
```

```
ans =
```

```
1
```

```
4
```

```
>> A(:,1) % pelkkä kaksoispiste valitsee koko sarakkeen/rivin
```

```
ans =
```

```
1
```

```
4
```

```
7
```

```
>> A(2:end,1) % end viittaa viimeiseen alkioon
```

```
ans =
```

```
4
```

```
7
```

Matriisien muokkaaminen

- Matriiseja voidaan myös luoda liittämällä toisia matriiseja yhteen.

```
>> B=[A A]
```

```
B =
```

```
     1     2     3     1     2     3
     4     5     6     4     5     6
     7     8     9     7     8     9
```

- Tiettyä matriisin alkiota voidaan muuttaa seuraavasti.

```
>> A(1,1)=100
```

```
A =
```

```
   100     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Matriisin transpoosi

- Matriisin transpoosiin käytetään heittomerkkiä (').

```
A =
```

```
    1    2    3  
    4    5    6  
    7    8    9
```

```
>> A'
```

```
ans =
```

```
    1    4    7  
    2    5    8  
    3    6    9
```

Peruslaskutoimitukset 1/2

- Yhteen- ja vähennyslasku (+, -)

```
>> C=[1 2;3 4] , D=[5 6;7 8]
```

```
C =
```

```
    1    2  
    3    4
```

```
D =
```

```
    5    6  
    7    8
```

```
>> C+D
```

```
ans =
```

```
    6    8  
   10   12
```

```
>> C-D
```

```
ans =
```

```
   -4   -4  
   -4   -4
```


Peruslaskutoimitukset 2/2

- Kerto- ja jakolasku (*, .*, /, ./)

```
>> C*D % Matriisitulo
```

```
ans =
```

```
    19    22
```

```
    43    50
```

```
>> C.*D % Alkiioittainen tulo
```

```
ans =
```

```
     5    12
```

```
    21    32
```

```
>> C/D % Matriisijakolasku
```

```
(vastaa laskua C*inv(D))
```

```
ans =
```

```
    3.0000   -2.0000
```

```
    2.0000   -1.0000
```

```
>> C./D % Alkiottainen jakolasku
```

```
ans =
```

```
    0.2000    0.3333
```

```
    0.4286    0.5000
```

Käänteismatriisi, lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu

- Matriisin \mathbf{A} käänteismatriisi \mathbf{A}^{-1} on olemassa täsmälleen silloin, kun $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
- Käänteismatriisille pätee:
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ (Yksikkömatriisi).
- Yhtälöryhmän $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu:
 - \mathbf{A} on $n \times n$ matriisi, $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$, $\mathbf{b} = [b_1 \dots b_n]^T$.
 - $\Leftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
 - $\Leftrightarrow \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
 - $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
 - Matlabissa: `x=inv(A)*b` tai `x=A \ b`

Peräkkäisistä luvuista koostuvan vektorin luominen

- Kaksoispisteen (`:`) avulla voidaan luoda näitä vektoreita.

```
>> x=10:16
```

```
x =
```

```
    10    11    12    13    14    15    16
```

```
>> y=10:2:16 % alkioden välinen erotus 2
```

```
y =
```

```
    10    12    14    16
```

- Huom! `%` on kommentointimerkki. (Matlab ei suorita sen jälkeen samalla rivillä olevia komentoja.)

Komentojonotiedostojen luominen editorilla

- Komentojonotiedoston (muotoa *.m) avulla voidaan ajaa usea komento peräkkäin. Komentojonotiedosto luodaan editorilla, joka aukeaa vasemman yläkulman kohdasta "New Script" tai Ctrl+N.
- Komentojonotiedoston syntaksi on sama kuin komentorivillä
- Komentojonotiedosto ajetaan kirjoittamalla tiedoston nimi komentoriville tai painamalla editorissa F5
- Komentojonotiedoston muuttujat tallentuvat Matlabin Workspaceen
 - Muuttujat käytettävissä myös komentojonotiedoston suorittamisen päätyttyä
 - Komentojonotiedosto voi käyttää workspacessa olevia muuttujia
 - Huom! Vaarana tallentaa tärkeiden muuttujien päälle

Kuvaajat 1/2

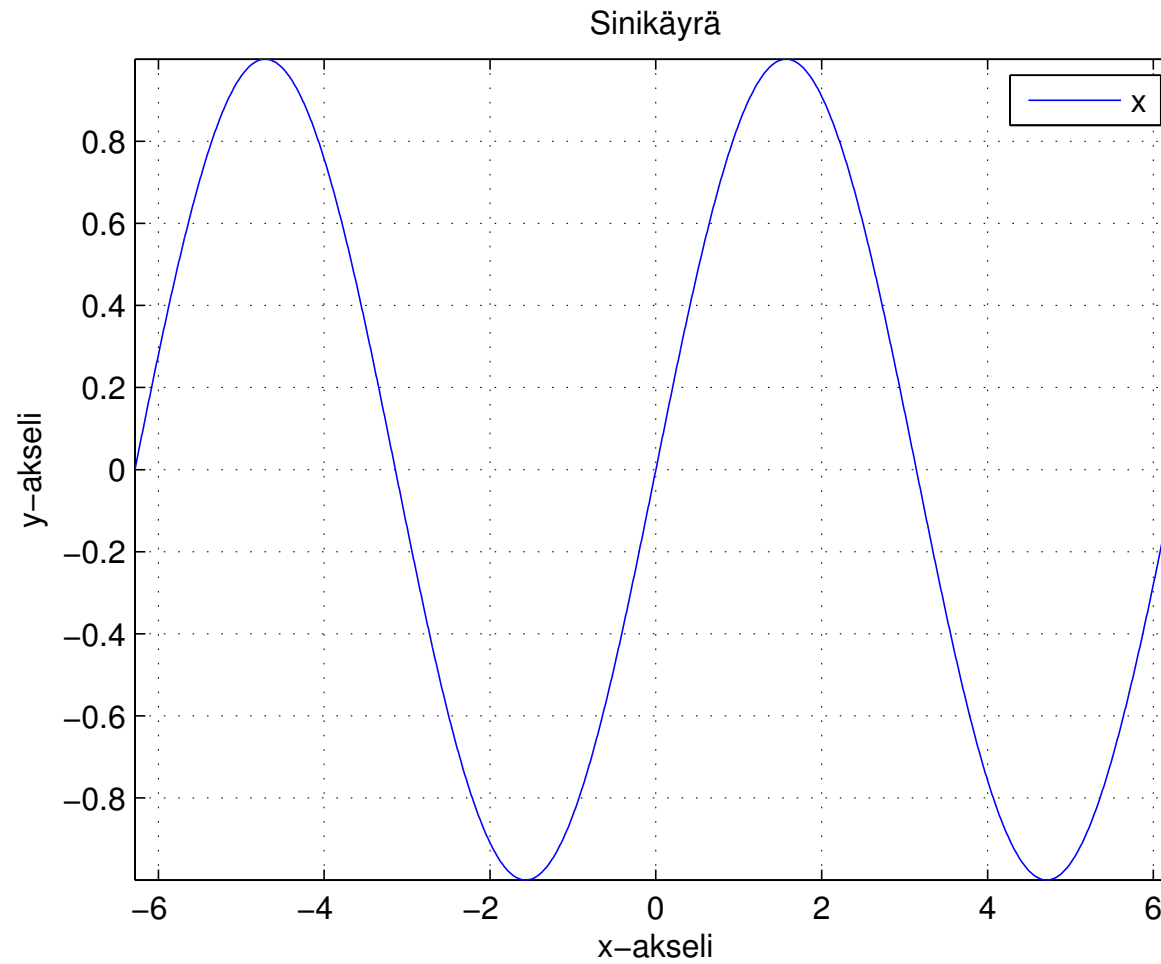
- plot-funktion avulla voidaan piirtää kuvaajia, ks. [help plot](#)

```
>> x=-2*pi:0.1:2*pi; % Luodaan x-vektori
>> y=sin(x);        % Luodaan y-vektori
>> plot(x,y);       % Piirretään kuvaaja
                    (vaaka-akselilla x, pystyakselilla y)

>> grid on         % Kuvaajan ruudukko päälle
>> axis tight      % Akselit ilman tyhjää tilaa laidoilla
>> title('Sinikäyrä') % Kuvaajan otsikko
>> xlabel('x-akseli') % Tunniste x-akselille
>> ylabel('y-akseli') % Tunniste y-akselille
>> legend('x')     % Kuvateksti
```

- Edelliset komennot voisi myös kirjoittaa perätysten yhteen komentojonotiedostoon

Kuvaajat 2/2



Tehtävä A: tutustuminen Matlabiin

Saat ohjeita komentojen käyttämiseen komennolla `help`. Esimerkiksi `help inv`. Käytä helppiä hyväksesi aina kun et pääse muuten eteenpäin.

1. Luo muutama matriisi, esim. $A=[1 \ 2 \ 3;3 \ 2 \ 1;4 \ 5 \ 6]$, $B=[1 \ 2 \ 3;4 \ 5 \ 6;7 \ 8 \ 9]$, $C=\text{eye}(3)$, $D=\text{ones}(3,2)$ ja $E=\text{zeros}(2,3)$. Kokeile matriisien yhteen- ja kertolaskua esimerkiksi matriiseilla A ja B. Kokeile myös komentoja `det`, `inv`, `diag`, `size` ja `eig`.

👉 Mitä tekee funktio `eig`?

👉 Mitä tekee komento `clear all`?

2. Luo vektorit $a=[1 \ 2 \ 3]$ ja $b=[1 \ 5 \ 9]$.

👉 Mitä saat vastaukseksi seuraavista laskutoimituksista?

$a*b'$, $a'*b$, $a.*b$, $a.*a$, $a.^2$

3. Luo vektori jossa on luvut $1, 3, 5, \dots, 99$ kahdella eri tavalla: kaksoispisteen käytöllä ja `linspace`-komennolla.
 4. Piirrä funktion $\sin(x)$ kuvaaja välillä $x \in [-\pi, \pi]$. Piirrä samaan kuvaan funktio $\cos(2x)$. Käytä piirtämiseen funktioita `figure`, `plot`, `axis`, `grid`, ja `hold on`. Lisää kuvaan myös `legend`, sekä `title`, ja piirrä kuvaajat eri tyyllisillä viivoilla.
- ✎ Millä komennolla saat monta kuvaajaa samaan koordinaatistoon?
- ✎ Mitä tekee komento `close all`?

Tehtävä B: populaatiomalli

Suomen väkiluku on 1900- ja 2000-luvuilla kehittynyt oheisen taulukon mukaisesti.

Vuosi	Väestö (milj.)	Vuosi	Väestö (milj.)
1900	2.656	1960	4.446
1910	2.943	1970	4.706
1920	3.148	1980	4.788
1930	3.463	1990	4.999
1940	3.696	2000	5.181
1950	4.030	2010	5.375

1. Aloita näin: luo kaksi vektoria, jossa toisessa vuodet ja toisessa väestömäärät.

2. Tehtävänäsi on sovittaa polynomi väkilukuaineistoon. Sovita siihen `polyfit`-funktiota käyttäen muutamia polynomeja, joiden asteluku vaihtee välillä 0–9, ja tutki polynomien avulla saatavia väestöennusteita vuoteen 2040 saakka. Piirrä muodostamiesi polynomien kuvaajia pisteistöön. Polynomien arvot saat funktiolla `polyval`.



- Vinkki: Luo tehtävää varten oma komentojonotiedosto

✎ Mitä tapahtuu, kun polynomien astelukua kasvatetaan?
Paraneeko sekä sopivuus pisteistöön että ennuste?

✎ Monennenko asteen polynomilla ennustaisit Suomen väkiluvun kehitystä vuodesta 2010 lähtien? Miksi?


Kotitehtävä: osakeanalyysi

- MyCoursesissa on kahden osakkeen päivittäiset hintatiedot (xls-tiedostot) tietyltä ajanjaksolta:
 - New Yorkin pörssissä noteerattu IBM, ja
 - NASDAQ-pörssissä noteerattu Microsoft.
- Tällaisia ajan suhteen arvoja saavia muuttujia kutsutaan yleisesti aikasarjoiksi.
- Tehtävänäsi on tarkastella Matlabilla *silmämääräisesti* miten paljon IBM:n ja Microsoftin osakekursseilla on keskinäistä riippuvuutta, ja miten paljon ne vaihtelevat Dow Jones Industrial Average -indeksin (DJIA) tahdissa.
- DJIA-arvot löytyvät myös MyCourses-sivulta.

- Vinkki: Tarvittaessa excelissä desimaalierottimen (piste tai pilkku) voi vaihtaa kohdasta File -> Options ->Advanced
1. Piirrä samaan kuvaikkunaan mutta eri kuviin (subplot, plot) kolme eri aikasarjaa: IBM:n ja Microsoftin osakekurssi sekä DJIA-indeksin arvo ajanjaksolla 2.1.2013 - 9.8.2013. Käännä tarvittaessa aikasarjat oikeinpäin flipud-komennolla. Vaaka-akseleilla tulee olla pörssipäivien indeksit (sitte että 2.1.2013 on pörssipäivä nro 1). Osakkeiden kohdalla pystyakseleilla tulee olla dollarimääräinen hinta (arvo pörssin sulkemishetkellä), indeksin kohdalla voit miettiä itse mitä siihen kirjoitat.
 Liitä kuva vastauksiisi.
 Kommentoi kurssien samankaltaisuuksia ja eroja.

2. Piirrä samaan kuvaikkunaan mutta eri kuviin kolme hajontakuviota (subplot, scatter): IBM:n hinta Microsoftin hintaa vasten, ja erikseen IBM:n hinta DJIA-indeksiä vasten ja Microsoftin hinta DJIA-indeksiä vasten. Nimeä akselit sopivasti. Voit vahvistaa silmämääräisiä havaintojasi laskemalla Pearsonin korrelaatiokertoimet (corr) eri aikasarjojen välillä. Laita kunkin hajontakuvion otsikoksi tämän korrelaatiokertoimen arvo.

 Liitä kuva vastauksiisi.

 Kommentoi miten paljon osakkeiden hinnat korreloivat keskenään ja miten paljon indeksin kanssa.