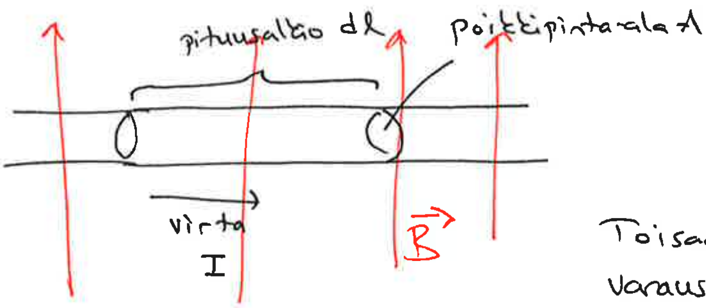
Virtajohdin magneettikentässä

~~Kahden johtimen välinen magneettinen voima~~

Johdin kohtisuorassa magneettikentässä $\vec{B}$:



Ajassa dt A:n läpäisee varausmäärä $dQ = I\cdot dt$.

Toisaalta, jos varaustiheys ρ ja varausten nopeus $|\vec{v}|$ (suuruus)

$$\Rightarrow \quad dQ = \rho \times A \times \underbrace{d\ell}_{|\vec{v}|\cdot dt = v\,dt} = \rho A v\,dt$$

A:n läpäisemä varausmäärä

Magneettikenttä $\vec{B}$: varausmäärään dQ kohdistuva Lorentzin voima on (mikä on sen suunta?)

$$|d\vec{F}| = dQ\cdot \underbrace{v\cdot B}_{\vec{v} \text{ ja } \vec{B} \text{ kohtisuorat}}$$

$$= I\cdot \underbrace{dt\cdot v}_{d\ell}\cdot B = I\,d\ell\,B.$$

Integroidaan yli koko johtimen → koko johtimeen vaikuttava kokonaisvoima

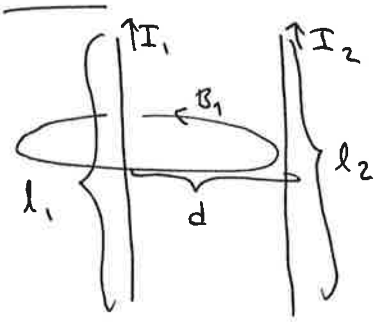
$$|\vec{F}| = \int IB\,d\ell = IB\underbrace{\int d\ell}_{\text{johtimen pituus } \ell} = I\ell B.$$

Jos $\vec{B}$ ei oleteta kohtisuora:

$$\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B}.$$

$I\vec{\ell}$:n suunta = virran suunta

Esim.

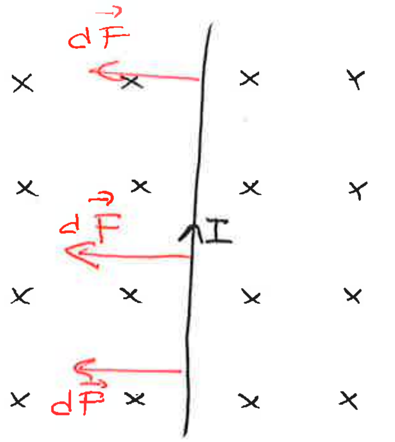


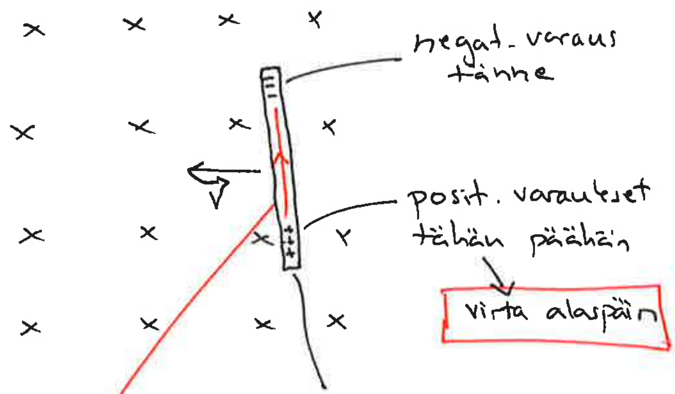
Johdin 1 luo johtimen 2 kohdalle magneettikentän $\vec{B}_1$: $|\vec{B}_1| = B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d}$.

Johtimeen 2 kohdistuva voima

$$|\vec{F}_2| = F_2 = I_2\ell_2\cdot B_1 = I_2\ell_2\cdot\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d} = \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}\ell_2 = F_2}$$

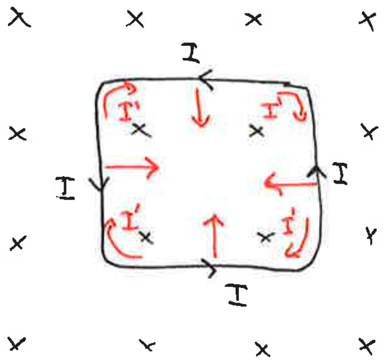
Millainen voima kohdistuu johtimeen / johdinsilmukkaan?





Sauva polarisoituu liikkuessaan magneettikentässä.

Varausjakauma synnyttää sähkökentän, ~~ja virta alaspäin~~ kun $\vec{E}$ ja $\vec{v} \times \vec{B}$ tasapainossa lakkaa "virta" sauvassa.

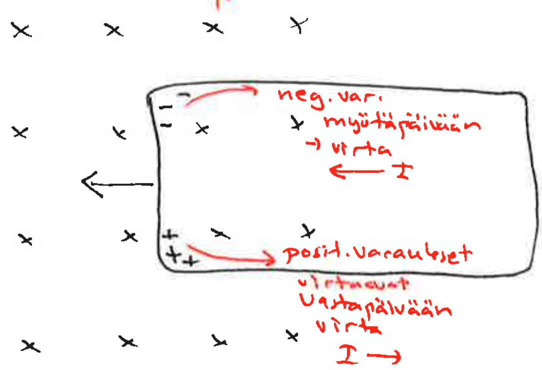


Venyvä lötköpötkö johdinsilmukka (+virta vastapäivään).

kun johdinsilmukka painuu kasaan, indusoituu siihen virta, koska johdinpätkät liikkuvat "poikittain" kentässä

⇒ virta myötäpäivään

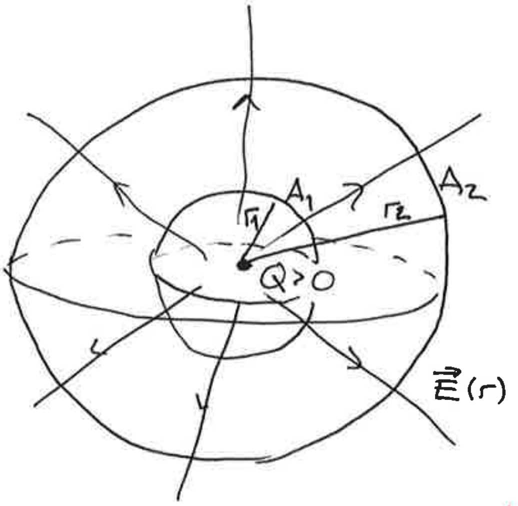
⇒ Kun $|I| = |I'|$, lakkaa virta silmukassa ja silmukan kokoonpainuminen pysähtyy.



Vedetään johdinsilmukka (ilman virtaa) magneettikenttään.

Johdinsilmukkaan indusoituu virta I vastapäivään.

Gaussin ja Amperen lait — suurien etäisyyksien asymptootit



Gaussin laki (pistevaraukselle)

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} = \vec{E}(r)\hat{r}$

Sama varaus Q pintojen A_1 ja A_2 sisällä $\Rightarrow$ sama vuo

$$\oint_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_{A_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Pinta-ala verrannollinen r:n neliöön:

$$A_1 = 4\pi r_1^2 \propto r_1^2$$
$$A_2 = 4\pi r_2^2 \propto r_2^2$$

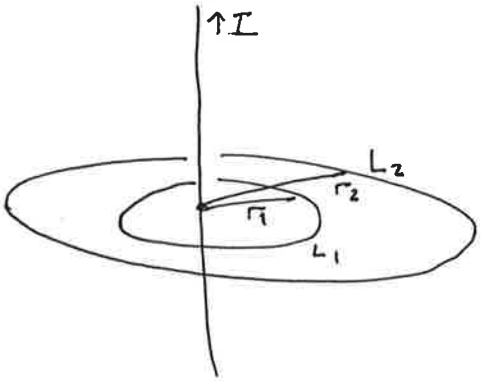
$\Rightarrow$ kentän voimakkuuden on pienennettyvä kuin $1/r^2$ $\Rightarrow$ $|\vec{E}(r)| \propto \frac{1}{r^2}$, r suuri.

(vrt. Coulombin laki) $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$.

Mutta: Gaussin lain antama $\frac{1}{r^2}$ asymptootti pätee vain kolmiulotteisessa tapauksessa. Jos dimensio rajoitettu esim. 2D (kondensaattorilevyjen välissä) tai 1D (johtimen sisällä) muuttuu myös $|\vec{E}|$:n etäisyys-skaalautuminen:
2D:ssä pinta-ala A korvautuu ympyrän kehän pituudella
1D:ssä "pinta-ala A" on vain kaksi pistettä.

Amperen laki

suoralle johtimelle



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Sama virta I polkujen L_1 ja L_2 läpi

$$\rightarrow \oint_{L_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

Polun pituus verrannollinen etäisyyteen r

$$L_1 = 2\pi r_1$$
$$L_2 = 2\pi r_2$$

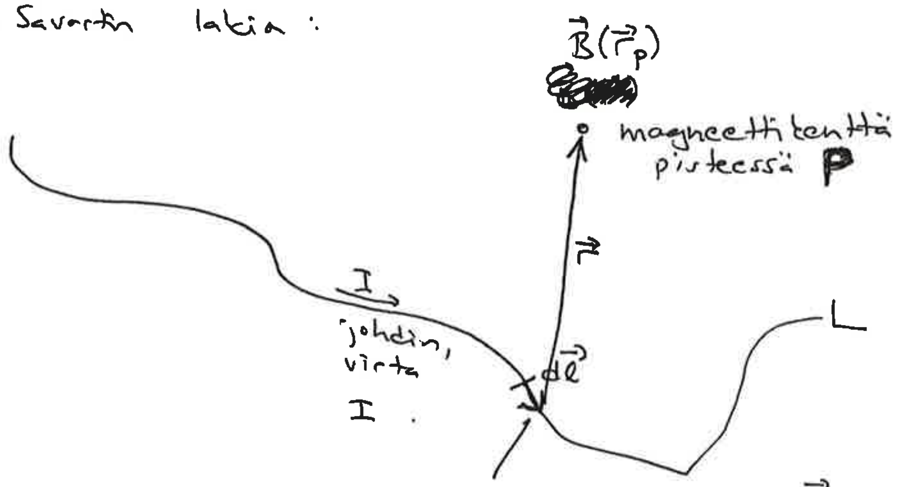
$\Rightarrow$ kentän voimakkuus pienenee kuin $1/r$

$\Rightarrow$ $|\vec{B}(\vec{r})| \propto \frac{1}{r}$, r suuri

Amperen laille ei ole vastaavaa dimensioriippuvuutta:
~~[illegible]~~

Biot-Savartin laki

Jos meillä ei ole riittäviä symmetrioita Amperen lain käyttöön magneettikentän laskemiseen, voidaan käyttää Biot-Savartin lakia:



johtimen viiva-alkion $d\vec{\ell}$ pisteeseen $\vec{r}_p$ ~~indusoima~~ synnyttämä magneettikenttä alkio $d\vec{B}$ on:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savartin laki

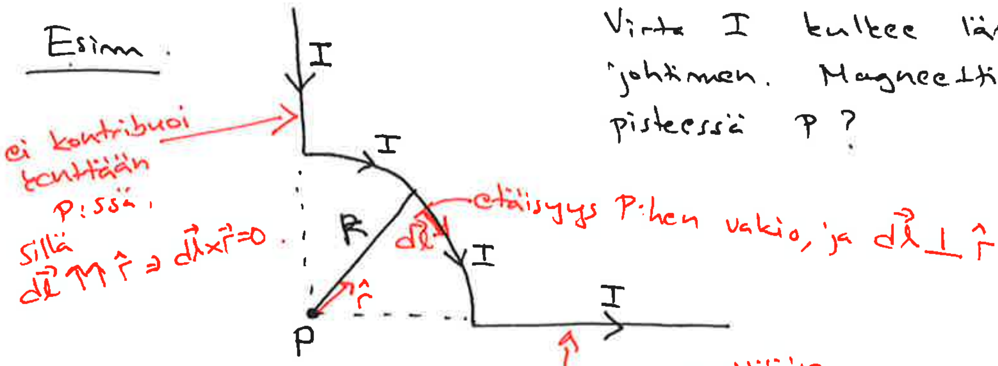
johtimen infinitesimaalinen osa, vektorin suunta virran suunta

johtimen osan $d\vec{\ell}$ etäisyys r ja suunta $\hat{r}$ tarkastelupisteeseen $\vec{r}_p$.

Kokonaiskenttä pisteessä $\vec{r}_p$ saadaan sitten integroimalla yli koko johtimen L.

Esim.

Virta I kulkee läpi oheisen johtimen. Magneettikentän vahvuus pisteessä P?



ei vaikuta kenttään P:ssä sillä $d\vec{\ell} \uparrow\uparrow \hat{r} \Rightarrow d\vec{\ell}\times\hat{r}=0$

$d\vec{\ell}$ ja $\hat{r}$ kohtisuorat $\Rightarrow |d\vec{\ell}\times\hat{r}| = \underbrace{|d\vec{\ell}|}_{d\ell}\cdot\underbrace{|\hat{r}|}_{1} = d\ell$.

Vain kaaren osuus vaikuttaa kenttään: $d\vec{\ell}\times\hat{r} = d\ell \cdot \underbrace{\hat{z}\cdot(-1)}$

ristitulon $d\vec{\ell}\times\hat{r}$ suunta $-\hat{z}$.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2} d\ell(-\hat{z})$$

$r = R$ koko kaaren matkalla

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}}_{\text{vakio koko kaaren matkan}} d\ell(-\hat{z})$$

integroidaan yli kaaren (pituus $2\pi R/4 = \frac{\pi R}{2}$)

$$\Rightarrow |\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\pi R}{2} = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

Varattu hiukkanen magneettikentässä

$$\boxed{\text{Lorentzin voima: } \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

Olkoon $\vec{E} = \vec{0}$: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

magneettinen voima aina $\perp$ liikettä vastaan $\Rightarrow$ työ $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

siirtymä $\uparrow\uparrow \vec{v}$

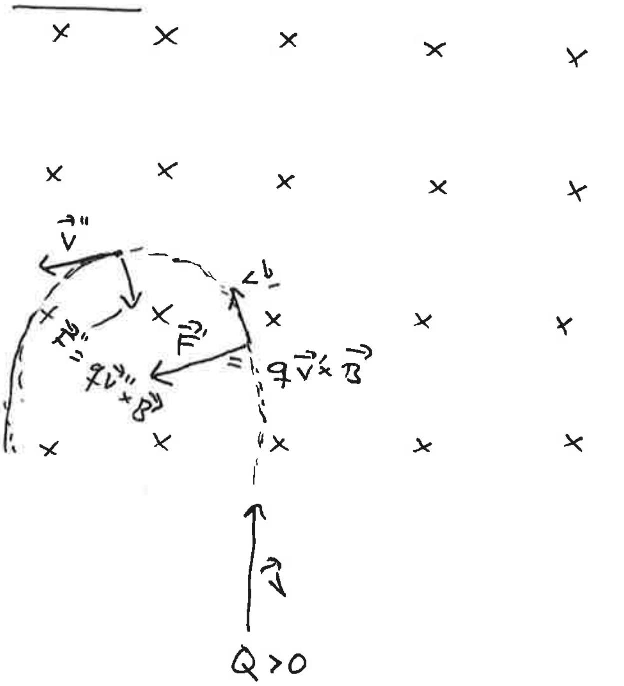
$\Rightarrow$ $dW = 0$.

$\Rightarrow$ magneettikenttä ei tee työtä varaukseen

$\Rightarrow$ hiukkasen vauhti $|\vec{v}|$ ei muutu, mutta suunta muuttuu

Mutta huomaa: myöhemmin huomaamme että ajasta riippuva magneettikenttä synnyttää sähkökentän joka puolestaan muuttaa varauksen nopeutta. $\Rightarrow$ ajasta riippuva magneettikenttä tekee työtä.

Esim.



Varatun hiukkasen rata (tasossa) ~~kaa~~ homogeenisessa magneettikentässä ympyrärata:

keskihakuvoima

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\frac{v^2}{r}\hat{z}$$

$\Rightarrow$ säde r:

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{r} \quad ; \quad v_\perp \text{ on } \vec{B}\text{:tä vastaan kohtisuora komponentti}$$

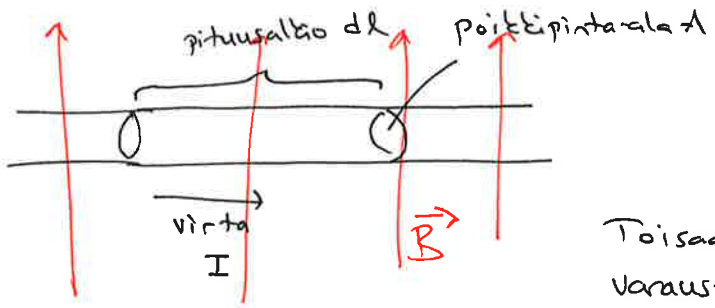
$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{mv_\perp}{qB}}$$

Jos nopeus $\vec{v}$ ei ole kohtisuorassa $\vec{B}$:tä vastaan, on rata spiraali (ulos/sisään tasosta).

Virtajohdin magneettikentässä

~~Kahden johtimen välinen magneettinen voima~~

Johdin kohtisuorassa magneettikentässä $\vec{B}$:



Ajassa dt A:n läpäisee varausmäärä $dQ = I \cdot dt$.

Toisaalta, jos varaustiheys ρ ja varausten nopeus $|\vec{v}|$ (suuruus)

$$\Rightarrow \underbrace{dQ}_{\text{A:n läpäisevä varausmäärä}} = \rho \times A \times \underbrace{dl}_{|\vec{v}| \cdot dt = vdt} = \rho A v dt$$

Magneettikentässä $\vec{B}$: varausmäärään dQ kohdistuva Lorentzin voima on (mikä on sen suunta?)

$$|d\vec{F}| = dQ \cdot \underbrace{v \cdot B}_{\vec{v} \text{ ja } \vec{B} \text{ kohtisuorat}}$$

$$= I \cdot \underbrace{dt \cdot v}_{dl} \cdot B = I \, dl \, B.$$

Integroidaan yli koko johtimen → koko johtimeen vaikuttava kokonaisvoima

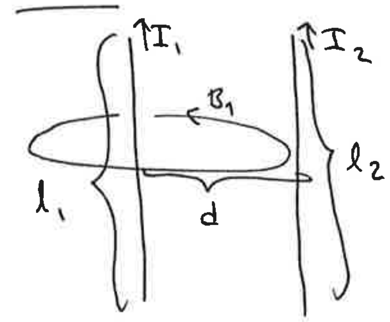
$$|\vec{F}| = \int IB \, dl = IB \underbrace{\int dl}_{\text{johtimen pituus } l} = IlB.$$

Jos $\vec{B}$ ei oletaan kohtisuora:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}.$$

$I\vec{l}$:n suunta = virran suunta

Esim.

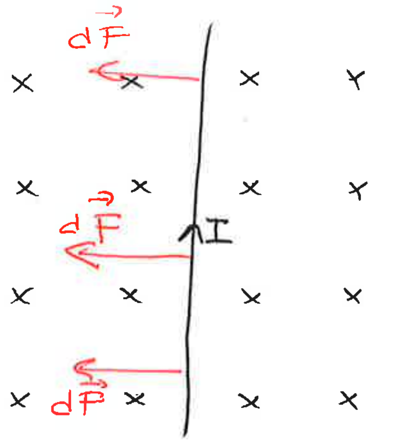


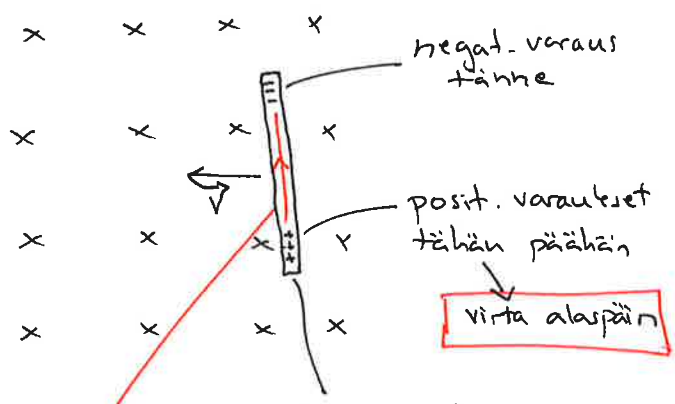
Johdin 1 luo johtimen 2 kohdalle magneettikentän $\vec{B}_1$: $|\vec{B}_1| = B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$.

Johtimeen 2 kohdistuva voima

$$|\vec{F}_2| = F_2 = I_2 l_2 \cdot B_1 = I_2 l_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} = \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l_2 = F_2}$$

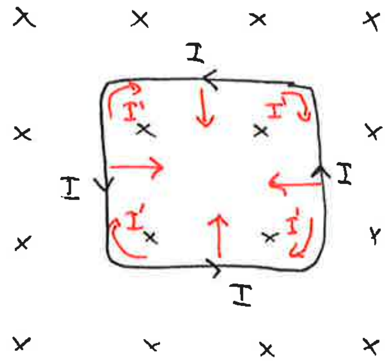
Millainen voima kohdistuu johtimeen / johdinsilmukkaan?





Sauva polarisoituu liikkuessaan magneettikentässä.

Varausjakauma synnyttää sähkökentän, ~~[illegible] virtaa alaspäin~~ kun $\vec{E}$ ja $\vec{v} \times \vec{B}$ tasapainossa lakkaa "virta" sauvassa.

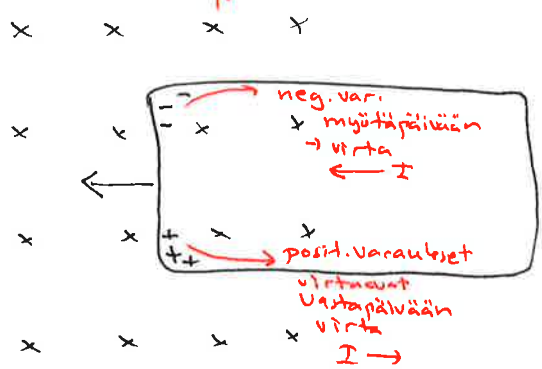


Venyvä lötköpötkö johdinsilmukka (+ virta vastapäivään).

kun johdinsilmukka painuu kasaan, indusoituu siihen virta, koska johdinpätkät liikkuvat "poikittain" kentässä

⇒ virta myötäpäivään

⇒ Kun $|I| = |I'|$, lakkaa virta silmukassa ja silmukan kokoonpainuminen pysähtyy.



Vedetään johdinsilmukka (ilman virtaa) magneettikenttään.

Johdinsilmukkaan indusoituu virta I vastapäivään.