Talousmatematiikan perusteet

1 Lukujonoista ja sarjoista, finanssimatematiikkaa

1.1 Suhteellinen muutos

- kuinka moninkertainen jokin arvo on lähtöarvoon verrattuna

Prosenttilaskennan kertausta

1. Yksi prosentti (1 %) luvusta a tarkoittaa tämän luvun sadasosaa $\frac{1}{100}\cdot a$.

Silloin p % luvusta a on $\frac{p}{100}\cdot a$.

Esim. Kunnallisveroprosentti on 19 % ja verotettava tulo 86000 €.

Kunnallisveron määrä on silloin

0.19 · 86 000 € = 16 340 €

2. Montako prosenttia luku a on luvusta b?

Esim. a) Tuotteen tukkuhinta on 120 € ja vähittäishinta 180 €. Kuinka monta % vähittäishinta on tukkuhinnasta?

mitä verrataan ↘

$$\frac{180\ €}{120\ €} = \boxed{1.5} \qquad (= \frac{150}{100} = 150 \cdot \frac{1}{100}) = 150\ \%$$

mihin ↗ verrataan

↑ väh.hinta on 1.5-kertainen

b) Kuinka monta % henkilön vuositulosta menee veroihin,

kun tulo on 142000 € ja vero 47000 €?

mitä verrataan ↘

$$\frac{47000\ €}{142000\ €} = \boxed{0.331} \qquad = 33.1\ \%$$

mihin ↗ verrataan

↑ vero on 0.331-kertainen

3. Prosentuaalinen kasvu (väheneminen)

- suhteellinen muutos

Esim. Rahastoon sijoitetaan 20000 € ja vuosikorko on 5 %. Paljonko rahaa on vuoden kuluttua?

Pääoma kasvaa 5 %. → Silloin se 1.05-kertaistuu.

$1.05 \cdot 20000$ € = 21 000 €

b) Auton arvo on 60000 € ja arvellaan, että se vähenee vuosittain 20 %. Mikä on arvo vuoden kuluttua?

Arvo vähenee 20 %. → arvosta jää jäljelle 80 % → se 0.80-kertaistuu.

$0.8 \cdot 60000$ € = 48 000 €

Näissä ratkaisuissa siis päätellään:

- Jos luku a (esim. rahamäärä) kasvaa p %, se muuttuu

  r = $(1+\frac{p}{100})$ – kertaiseksi

- Jos luku a (esim. auton arvo) pienenee p %, se muuttuu

  r = $(1-\frac{p}{100})$ – kertaiseksi

Tällöin peräkkäiset suhteelliset muutokset voidaan yhdistää helposti:

<u>Esim.</u> (jatkoa edelliseen)

a) Rahastoon sijoitetaan 5 % vuosikorolla 20000 € ja korko liitetään pääomaan aina vuoden lopussa. Paljonko rahaa on 1, 2, 3,…, n vuoden kuluttua?

Esim. 3 vuoden jälkeen

1. v. jälkeen ↓ ↓ 3. v. jälkeen

$20000 \cdot 1.05 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 20000 \cdot 1.05^3 = 20000 \cdot 1.1576$

2. v. jälkeen ↑

- arvo 1.1576-kertaistuu ↑
- on 115.76 % alkuperäisestä
– kasvaa 15.76 %

Jatkamalla samalla tavalla ketjuttamista:

Arvo n vuoden kuluttua on 20000 · $\mathbf{1.05^n}$.

b) Alussa 60000 € arvoisen auton arvo vähenee 20 % vuosittain. Paljonko arvosta on jäljellä 1, 2, 3, 4,…, n vuoden kuluttua?

1.v. 2.v. 3.v. n:s v.

$60000 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot \; \ldots \; \cdot 0.8 = 60000 \cdot 0.8^n$

4. Prosentuaalisen eron suuruus

Esim. Eräänä vuonna henkilön vuositulo oli 80000 € ja seuraavana vuonna 95000 €. Montako % tulo oli jälkimmäisenä vuonna **suurempi kuin** ensimmäisenä vuonna?

Ratkaisu 1 Usein lasketaan:

Absoluuttinen kasvu on 95000 – 80000 = 15000 €,

mitä verrataan ↘

joka on $\frac{15000}{80000} \cdot 100\ \% = 18.75\ \%.$

mihin verrataan ↗

Tässäkin tulos saadaan myös arvon suhteellisen muutoksen kautta:

Ratkaisu 2 Jälkimmäisenä vuonna tulo on

$\frac{95000}{80000}$ = 1.1875-kertainen eli on 118.85 % ensimmäisen vuoden tulosta,

joten se suureni 18.75 %.

b) Vuonna 2000 kunnassa oli 32000 ja v.2017 27000 asukasta. Montako % **vähemmän** asukkaita oli v.2017 **kuin** v. 2000?

Ratkaisu 1

Absoluuttinen vähennys on 32000 – 27000 = 5000,

joka on $\frac{5000}{32000} \cdot 100\ \% = 15.625\ \%$.

Tai

Ratkaisu 2 Vuonna 2010 määrä on

$\frac{27000}{32000}$ = 0.84375-kertainen eli on 84.375 % vuoden 2000 määrästä,

joten se pieneni 15.625 %.

Korkojen laskemisesta

<u>Esim.</u> (jatk.) 20000 € talletetaan rahastoon, jossa vuosikorko on 5 %.

Kuinka suuri on kasvanut pääoma a) ½ vuoden, b) 4 kk:n kuluttua?

a) Korko ½ vuodelta on $\frac{6}{12} \cdot 5\ \% = 2.5\ \%$, jolloin

pääoma ½ vuoden kuluttua on 1.025 · 20000 = 20500 €.

b) Samalla tavalla saadaan pääoma 4 kk:n kuluttua

4 kk:n "osuus" ↘ ↙ korko-%

$$\left(1 + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{100}\right) \cdot 20000 \quad \sim \ 1.0166667 \cdot 20000 = 20333.33\ €$$

↑ pääoma

Siis kun

pääoma on K, korkokanta on p % (esim. vuodessa), sijoitusajan osuus koronmaksukaudesta on t (esim. 4/12 vuodesta)

ja korko maksetaan kerralla sijoitusajan lopussa, on korko $\mathbf{\Delta K} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}\,\mathbf{t}\,\mathbf{K}$

ja kasvanut pääoma $\mathbf{K_t} = \mathbf{(1+\frac{p}{100}\,t)\,K}$

ja pääoman suhteellinen muutos eli **korkotekijä** on $\mathbf{r = (1+\frac{p}{100}\,t)}$.

Kun korko liitetään pääomaan korkojaksoittain, saadaan vastaavalla tavalla:

<u>Esim.</u> (jatk. edelliseen) Kuinka suuri on kasvanut pääoma 1, 2, 5.5 vuoden kuluttua?

$K_1 = 1.05 \cdot 20000 = 21000$ €

$K_2 = 1.05^2 \cdot 20000 = 22050$ €

$K_{5.5} = 1.05^5 \cdot (1 + \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{100}) \cdot 20000 = 26163.77$ €

Diskonttaus on käänteinen toimenpide edellisen kaltaiselle koron

johdosta kasvaneen pääoman arvon määräämiselle eli **prolongoinnille**:

Esim. On sovittu, että 5000 € korvaus maksetaan vuoden kuluttua. Kuinka suuri on kohtuullinen maksun **arvon alennus** eli **diskontto**,

jos korvaus maksetaankin a) heti, b) 4 kk sovittua aikaisemmin,

kun korkokanta on 6 % vuodessa?

a) Maksettava rahamäärä K_0 kasvaa $1 + \frac{6}{100} = 1.06$-kertaiseksi, jolloin

$1.06 \cdot K_0 = 5000$ € (K_1),

josta saadaan pääoman **nykyarvo**

$K_0 = \frac{5000}{1.06} = 4716.98$ €,

ja oikea diskontto on 5000 - 4716.98 = 283.02 €.

b) Pääoman suhteellinen muutos 4 ”pois jäävän” kuukauden aikana olisi

$1 + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{100} = 1.02$-kertainen.

$1.02 \cdot K_0 = 5000$ € (K_1) jolloin

nykyarvo on $K_0 = \frac{5000}{1.02}$ = 4901.96 € ja diskontto 98.04 €

Siis **korkokannalla** p käytössä olevalle pääomalle oletetaan saatavan p prosentin tuotto ja prolongointi ja diskonttaus ”siirtävät ostovoimaa” ajankohdasta toiseen:

pääoma alussa (t = 0) pääoma ajankohtana t

prolongointi

$\mathbf{K_0}$ $\rightarrow$ $\mathbf{K_t = \left(1+ \frac{p}{100} t\right) K_0}$

diskonttaus

$\mathbf{K_0 = \frac{1}{\left(1+ \frac{p}{100} t\right)} K_t}$ $\leftarrow$ $\mathbf{K_t}$

K_0 on pääoman K_t **nykyarvo** (PV).

Esimerkissä 5000 € diskontataan 4 kk korkokannalla 6 % /v:

1.02-kertaistuu

Nyt 4 kk:n kuluttua

4901.96 € 5000 €

Nimelliskorko on korkokanta, jonka mukaan sovitaan esim. lainan korko laskettavaksi. **Efektiivinen korko** mittaa pääoman kasvunopeutta:

Esim. Lainan vuosikorko on 6 % /v.

Lainaehdoissa sovitaan, että nimellinen kk-korko on 0.5 % /kk.

Kun pääoma kasvaa vuoden 0.5 % kk:ssa, niin se

$1.005^{12} = 1.0617$- kertaistuu ja

efektiivinen korkokanta on 6.17 %.

Esim. Kuinka suuri on ¼- vuosittaisen koron oltava, jotta efektiivinen korko olisi 9 %?

Pääoma K r-kertaistuu 4 kertaa. Silloin

$K \cdot r^4 = K \cdot 1.09$, josta saadaan $r = \sqrt[4]{1.09} \sim 1.0218$

ja ¼ -vuoden koron on oltava 2.18 %.

Mm. lainan takaisinmaksuun liittyvissä kysymyksissä tarvitaan tietoja lukujonoista ja sarjoista.

1.2 Lukujonoista

- (mm. taloudellisia sovelluksia varten) tarvitaan esitys, jonka avulla voidaan esittää jonkin ilmiön systemaattinen kehittyminen (funktio?) (esim. ajan suhteen)

Esim. (jatkoa) 20000 €:n sijoituksen arvo 1., 2., 3., …, n:nnen vuoden **alussa**, kun 5 %:n korko liitetään aina vuoden lopussa pääomaan:

1.v. 2. v. 3. v. … **n:s vuosi**

$20000,\ 2000 \cdot 1.05,\ 20000 \cdot 1.05^2,\ \ldots.\ ,\ \mathbf{20000 \cdot 1.05^{n-1}}$

Saldon suuruudet muodostavat **lukujonon**.

Lukujono on päättyvä tai päättymätön jono reaalilukuja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, joita sanotaan jonon **termeiksi**.

Jos termien määräytyminen voidaan esittää jonkin lausekkeen avulla, voidaan käyttää merkintää

(a_n), missä a_n on sääntö, jonka mukaan n:s termi määräytyy.

Esim. Opiskelija HH saa kotoaan lähtiessään 2000 € ja sen jälkeen kuukausittain 500 €.

HH:n lähtönsä jälkeen yhteensä saamaa rahamäärää 1, 2, 3, …, n kk:n kuluttua kuvaa jono:

1. kk	2. kk	3. kk	4. kk	…	n:s kk
2000	2000+500	2000+2·500	2000+3·500	…	**(2000 + (n-1)500)**

Tässä peräkkäisten termien **absoluuttiset erot** ovat yhtä suuria (500 €).

Tällaista jonoa (a_n) sanotaan **aritmeettiseksi**.

Siis seuraava termi saadaan aina lisäämällä edelliseen sama vakio eli

$\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}$ ja d on vakio.

Kuten esimerkissä

1.	2.	3.	4.	…	n:s
a	$a+1\cdot d$	$a+2\cdot d$	$a+3\cdot d$	…	$\mathbf{a+(n-1)\cdot d}$

Aritmeettisen jonon n:s termi on $\mathbf{a_n = a + (n-1)d}$,

kun a = 1. termi ja d = termien välisen eron suuruus.

<u>Esim.</u> 10000 €:n lainan vuosikorko on 16 % ja sitä lyhennetään 500 € puolivuosittain.

Puolen vuoden korko on 8 % ja maksettavana on 20 kpl 500 €:n lyhennystä.

Maksettavan 1., 2., 3., n:nnen koron suuruutta kuvaa jono:

vuosi-puolikas	1.	2.	3.	…	n:s	…	20.
lainan pääoma	10000 = 20·(500 €)	9500 = 19·500	9000 = 18·500	…	10000-(n-1)500	…	1·500
korko	0.08·(20·500) = 800 € = 20·40 €	0.08·(19·500) = 760 € = 19·40 €	0.08·(18·500) = 720 € = 18·40 €	…	**0.08·(20-(n-1)) ·500** **(20-(n-1)) ·40**	…	0.08·1·500 = 1· 40 €

Jono on aritmeettinen ja d = -40 € (= - 0.08 · 500 €).

<u>Esim.</u> (jatkoa) 20000 €: n sijoituksen arvo 5 % vuosikorolla, kun korko liitetään vuosittain pääomaan:

- Arvoa vuoden n <u>alussa</u> kuvaa jono:

1.v. 2. v. 3. v. … **n:s**

20000, $20000 \cdot 1.05$, $20000 \cdot 1.05^2$, …. , ($\mathbf{20000 \cdot 1.05^{n-1}}$)

- ja vuoden n <u>kuluttua</u> jono:

1.v. 2. v. 3. v. … **n:s**

$20000 \cdot 1.05$, $20000 \cdot 1.05^2$, $20000 \cdot 1.05^3$, …. , $\mathbf{20000 \cdot 1.05^n}$

Nämä jonot eivät ole aritmeettisia, sillä termien väliset erot eivät ole samat.

Seuraava termi on aina edelliseen verrattuna 1.05-kertainen.

Tällaista jonoa (a_n), jossa **peräkkäisten termien suhde on vakio**, sanotaan **geometriseksi**.

Silloin seuraava termi saadaan q–kertaistamalla edellinen termi eli

$\mathbf{a_{n+1} = a_n\, q}$ (q on jonon suhdeluku)

<u>Esim.</u> (jatkoa) 60000 €:n hintaisen auton arvon arvellaan vähenevän aina 20 % edellisen vuoden arvosta.

Jäljellä olevaa arvoa kuvaa geometrinen jono:

arvo vuoden n **alussa**

1.v.	2. v.	3. v.	…	**n:s**
60000,	$60000\cdot 0.8$,	$20000\cdot 0.8^2$,	….	, **($60000\cdot 0.8^{n-1}$)**

arvo n vuoden **kuluttua**

1.v. 2. v. 3. v. … **n:s**

$60000 \cdot 0.8$, $20000 \cdot 0.8^2$, $20000 \cdot 0.8^3$ …. , **($60000 \cdot 0.8^n$)**

Edellisten esimerkkien tapaan aritmeettinen ja geometrinen jono voivat sopia malleiksi mm. joidenkin taloudellisten ilmiöiden kuvaamiseen:

- **aritmeettinen** jono tilanteeseen, jossa **absoluuttinen muutos on vakio** ja
- **geometrinen** jono tilanteeseen, jossa **suhteellinen muutos on vakio**.

Soveltamista rajoittaa, että termit on määritelty vain n:n arvoja (vuosia tms.) 1, 2, 3, … kohti.

Edellisessä esimerkissä voidaan kysyä, mikä on arvio auton arvolle 2,5 vuoden kulutta. Tähän antaa vastauksen **geometrisen jonon** yleistys **eksponenttifunktio**.

Aritmeettisen jonon (esimerkiksi ajan suhteen jatkuva) yleistys taas on tavallinen **lineaarinen funktio**.

Lukujonon suppeneminen

Esim. (jatkoa edelliseen) Auton arvoa vuoden n alussa kuvaa lukujono

($60000 \cdot 0{,}8^{n-1}$), jonka arvoina saadaan:

vuosi	arvo
1	60000
2	48000
3	38400
4	30720
5	24576
6	19661
7	15729
8	12583
9	10066
10	8053
20	865
50	1

Kun aika n kasvaa, niin auton arvo vähenee ja "lähestyy selvästi" nollaa.
Silloin sanotaan, että arvoa kuvaava lukujono **suppenee** ja sen **raja-arvo** on 0.
Tästä käytetään merkintää:

$$\lim_{n\to\infty} 60000 \cdot 0.8^{n-1}$$

$= 0$

Esim. (jatkoa) 20000 €:n sijoituksen arvoa n vuoden kuluttua kuvaa jono

($20000 \cdot 1.05^n$), jonka arvot taas ”kasvavat rajatta”, kun n kasvaa:

vuosi	arvo
1	21000
2	22050
3	23153
4	24310
5	25526
20	53066
50	229348

Kun aika n "kasvaa rajatta", näyttää sijoituksen arvo "kasvavan äärettömän suureksi". Nyt sanotaan, että jono **hajaantuu** ja käytetään merkintää:

$$\lim_{n \to \infty} 20000 \cdot 1.05^n = \infty$$

Sen lisäksi, että jono

- suppenee eli sen termit lähestyvät äärellistä vakiota tai

- kasvaa (vähenee) rajatta,

voi jono hajaantua myös niin, että jonon termit eivät lähesty mitään vakioarvoa, mutta eivät myöskään lähesty + tai - ääretöntä.

Raja-arvon tarkka matemaattinen käsittely sivuutetaan tässä.

Edellisissä esimerkeissä jonot olivat geometrisia.

Auton arvoa ennakoitaessa oli suhdeluku $q = 0.8 < 1$ ja jono suppenee.

Sijoituksen saldoa kuvaavassa jonossa $q = 1.05 > 1$ ja jono hajaantuu.

Sama pätee myös yleisesti:

Voidaan osoittaa, että **geometrinen jono suppenee täsmälleen silloin, kun $|q| < 1$.**

1.3. Sarjoista

Esim. Opiskelija X ottaa pankista puolivuosittain lainaksi 3000 € ja vuosikorko on 4 %. Lainaa ei lyhennetä opiskeluaikana, mutta kertyneen lainapääoman korko maksetaan puolivuosittain.

Maksettavat korot muodostavat (aritmeettisen) jonon

$0.02\cdot 3000,\ 0.02\cdot (2\cdot 3000),\ 0.2\cdot(3\cdot 3000),\ \ldots\ = 60,\ 120,180,\ \ldots$

eli jonon $(a_n) = (n\cdot 60)$.

Tästä **jonosta (a_n)** saadaan **yhteen laskemalla** maksettujen korkojen **kokonaismäärä s_n** mihin tahansa vuosipuoliskoon n mennessä:

$s_1=60$, $s_2=60+120$, $s_3=60+120+180,\dots$, $s_n=60+120+\dots+n\cdot 60,\dots$

Siis lukujonosta (a_n) saadaan uusi jono (s_n),

missä $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$(= \sum_{i=1}^{n} 60 \cdot i$) edellisessä esimerkissä)

(Merkinnällä $\sum_{i=1}^{n} x_i$ tarkoitetaan summaa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Luetaan: (esim.) ”Summa arvoista x_i, kun i käy yhdestä n:nään.”)

Tällä tavalla (kumulatiivisesti) muodostettua uutta jonoa (s_n) sanotaan lukujonosta (a_n) muodostetuksi **sarjaksi**.

Lauseketta $a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sanotaan **sarjan summaksi**.

Jonon (s_n) termi $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ on sarjan $\mathbf{n}$: $\mathbf{s}$ **osasumma**.

Jos jono (a_n) on aritmeettinen, sanotaan, että myös siitä muodostettu

sarja (s_n) on **aritmeettinen**.

Jos (a_n) on geometrinen, on myös **sarja** (s_n) **geometrinen**.

Esim. (jatkoa edelliseen)

Jono $(a_n) = (60n)$ on aritmeettinen, jolloin myös korkojen summaa

kuvaava sarja (s_n) on aritmeettinen.

Esim. Yritys sitoutuu maksamaan aiheuttamastaan haitasta vuosittain korvauksen, joka on

1. vuonna 5000 € ja seuraavina vuosina 5000 € inflaatioprosentilla korjattuna.

Jos keskimääräiseksi inflaatioprosentiksi arvioidaan 4 %, kuinka suuri tulee olemaan korvauksen vuosittainen (nimellis-)arvo ja maksettujen korvausten yhteenlaskettu määrä 1., 2., 3., …, n:ntenä vuonna?

Vuosittaiset korvaukset muodostavat geometrisen jonon ja niistä lasketut kumulatiiviset korvausmäärät geometrisen sarjan:

$s_1 = 5000$

$s_2 = 5000 + 5000 \cdot 1.04$

$s_3 = 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2$

$s_3 = 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + 5000 \cdot 1.04^3$

…

$s_n = 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + \ldots + 5000 \cdot 1.04^{n-1}$ (= ?)

Jos esim. n = 50, lasku on näin tehtynä pitkä, mutta tässä tapauksessa sitä voidaan lyhentää paljon.

Osasummista

Aritmeettisen sarjan summa on aina (+ tai -)∞, mutta osasummilla on paljon käytännön sovelluksia:

<u>Esim.</u> (jatkoa, opiskelija X:n maksamat korot)

Kun X lainaa puolivuosittain 3000 € 4 % vuosikorolla ja maksaa aina samalla kertyneen lainan koron, korot muodostavat aritmeettisen jonon (60n).

Kun X opiskelee 10 vuotta, ovat maksetut korot:

erä n	korko 60n	erä n	korko 60n	keski-korko
1	60	20	1200	630
2	120	19	1140	630
3	180	18	1080	630
4	240	17	1020	630
5	300	16	960	630
6	360	15	900	630
7	420	14	840	630
8	480	13	780	630
9	540	12	720	630
10	600	11	660	630

Yhteensä korkoja maksetaan

S_{20} = 60+120+180+...+1080+1140+1200.

Kun yhteenlaskettavat järjestetään ”laidoilta sisäänpäin” uudelleen saadaan

s_{20} = (60+1200)+(120+1140)+…+(600+660) = 1260 + 1260 +…+1260

Silloin keskimääräinen korko vuosipuolikasta kohti on

(esim. (60+1200)/2 =)1260/2 = 630 €.

Kun vuosipuoliskoja on 20, niin maksettujen korkojen muodostaman aritmeettisen sarjan 20 osasumma on

$$s_{20} = 20 \cdot 630 = 20 \cdot \frac{60 + 1200}{2} = 12600 \text{ €}.$$

Siis selvästi **aritmeettisessa sarjassa n:s osasumma** on

$$\mathbf{s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}.$$

Esim. Ekonomisti E alkaa kuntoilla vuoden alussa.

1. viikolla hän harjoittelee 120 min ja lisää aikaa joka viikko 5 min.

Paljonko E harjoittelee koko vuoden (52 viikkoa) aikana?

Harjoitteluajoista muodostuu aritmeettinen jono (d=5), josta saatavan sarjan 5. osasumma on

1. v. 2. v. 3. v. 4. v. … 52. v.

$s_{52} = 120 + 120+5 + 120+2\cdot 5 + 120+3\cdot 5 + \ldots + 120 + (52-1)\cdot 5$

$= 120 + 125 + 130 + 135 + \ldots + 375$

$= 52 \cdot \frac{120+375}{2} = 12870 \text{ min} = 214.5 \text{ h.}$

Esim. (jatkoa, yrityksen maksettava inflaatiokorjattu korvaus)

Sovitaan, että korvausta maksetaan 15 vuoden ajan. Lisäksi vaihtoehtoina ovat maksutavat:

1) 1. korvaus 5000 € maksetaan heti ja sen jälkeen aina vuoden kuluttua arvioidulla inflaatiolla 4 % edellisestä vuodesta korotettu määrä tai

2) 1. korvaus 5000 € maksetaankin vasta 1. korvausvuoden lopussa kuitenkin 4 %:lla korotettuna ja seuraavat korvaukset vastaavalla tavalla kuin edellä.

Kuinka paljon suurempi on korvausten (nimellis-) kokonaismäärä jälkimmäisellä tavalla maksettuna?

1) Kokonaiskorvaus on geometrisen sarjan 15. osasumma

1. 2. 3. 15.

$s_{15} = 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + \ldots + 5000 \cdot 1.04^{14}$

2) Toisella tavalla maksettaessa jokainen korvaus on 4 % suurempi:

1. 2. 3. 14. 15.

$5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + 5000 \cdot 1.04^3 + \ldots + 5000 \cdot 1.04^{14} + 5000 \cdot 1.04^{15}$

$= 1.04 \cdot (5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + \ldots + 5000 \cdot 1.04^{14}) = 1.04 \cdot s_{15}$.

Kokonaiskorvauksen ero on

$1.04 \cdot s_{15} - s_{15} =$

$(\cancel{5000 \cdot 1.04} + \cancel{5000 \cdot 1.04^2} + \ldots + \cancel{5000 \cdot 1.04^{14}} + \mathbf{5000 \cdot 1.04^{15}})$

$- (\mathbf{5000} + \cancel{5000 \cdot 1.04} + \cancel{5000 \cdot 1.04^2} + \ldots + \cancel{5000 \cdot 1.04^{14}})$

____

$= 5000 \cdot 1.04^{15} - 5000$ (=4004.72 €)

Tästä saadaan yhtälö

$1.04 \cdot s_{15} - s_{15} = 5000 \cdot 1.04^{15} - 5000$

$\Leftrightarrow$

$s_{15}(1.04 - 1) = 5000 \cdot (1.04^{15} - 1)$,

josta ratkeaa

$$s_{15} = \frac{5000 * (1.04^{15} - 1)}{1.04 - 1} = 100117.94 \text{ €}.$$

Jos laskussa on **1. termi a** (=5000 €), termien **lukumäärä n** (= 15) ja niiden välinen **suhteellinen muutos q** (=1.04) ja lopuksi vielä lavennetaan -1:llä, saadaan samalla tavalla yleinen sääntö

geometrisen sarjan osasumman laskemiseksi:

$$\mathbf{s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}}.$$

<u>Esim.</u> (jatkoa edelliseen) Sovelluksissa on oltava huolellinen, mitä ”kaavaan” sijoitetaan:

Jälkimmäisellä tavalla maksettavien korvausten kokonaismäärä on myös geometrisen sarjan 15. osasumma, mutta nyt on

1. 2. 3. 14. 15.

$5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + 5000 \cdot 1.04^3 + \ldots + 5000 \cdot 1.04^{14} + 5000 \cdot 1.04^{15}$

$= \frac{5000 \cdot 1.04 \cdot (1.04^{15} - 1)}{1.04 - 1} = 104122.66$ €

Sarjan suppeneminen

Esim. Henkilö vuokraa tontin. Vuokrasopimus on ”ikuinen” ja vuokrasta sovitaan, että se on 1. vuonna 2000 € ja se pienenee sen jälkeen aina vuosittain 10 % edellisestä vuokrasta.

Kuinka suuri on maksettavien vuokrien kokonaismäärä 5, 10, 50, 100, 200 vuoden kuluttua?

Vuosittain maksettavat vuokrat muodostavat geometrisen jonon

1.	2.	3.		n:s
2000	**$2000 \cdot 0.9$**	**$2000 \cdot 0.9^2$**	**…**	**$2000 \cdot 0.9^{n-1}$**

ja kertynyt vuokrien määrä vuonna n saadaan geometrisen sarjan **osasummana:**

	Vuokra	Kertymä
1	2000,00	2000
2	1800,00	3800
5	1312,20	8190
10	774,84	13026
20	270,17	17568
50	11,45	19897
100	0,06	19999

Esim. 50 vuodessa vuokria kertyy:

$s_{50} = 2000 + 2000 \cdot 0.9 + 2000 \cdot 0.94^2 + \ldots + 2000 \cdot 0.9^{49}$

$$= \frac{2000*(1-0.9^{50})}{1-0.9} \sim 19897 \text{ €}$$

Näyttää, että vuokrien kokonaismäärä ei kasva enää ”merkittävästi”, kun aikaa kuluu ”riittävästi”. Osasummat näyttävät lähestyvän eli **suppenevan** kohti kiinteää arvoa 20000 €.

Sarjaa $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sanotaan **suppenevaksi**, jos sen osasummien jono (s_n) suppenee ja raja-arvoa

$$\mathbf{s} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{s_n} \quad (= a_1 + a_{2+\ldots})$$

sanotaan **sarjan summaksi**.

Jos sarja ei suppene, sitä sanotaan **hajaantuvaksi**.

Jotta sarja $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ suppenee, on termien a_n tietenkin oltava ”merkityksettömän pieniä”, kun n kasvaa, eli

välttämätön ehto sarjan suppenemiselle on, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tämä ehto ei kuitenkaan ole riittävä. On mahdollista, että jono (a_n) suppenee (, mutta ei ”riittävän voimakkaasti”,) ja sarja kuitenkin hajaantuu.

Voidaan osoittaa, että **geometrinen sarja**

$s = a + aq + aq^2 + \dots$

suppenee täsmälleen silloin, kun $\mathbf{|q| < 1}$ ja sen summa on

$$\mathbf{s = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}}.$$

<u>Esim.</u> (jatkoa edelliseen) Paljonko vuokraa kertyy yhteensä, kun ”vuokra-ajalla ei ole ylärajaa”? (Mikään ei tietysti, kestä ikuisesti, mutta näin saadaan yläraja vuokrien kertymälle, jos aikaa ei ole määrätty.)

$s = 2000 + 2000\cdot 0.9 + 2000\cdot 0.9^2 + \dots = \frac{2000}{1-0.9} = 20000$ €.

Sovelluksia korkojen laskemiseen

Esim. (jatkoa) Opiskelija X oli ottanut 10 vuoden ajan puolivuosittain 3000 € lainaa 4 % vuosikorolla. Kertyneen pääoman korko maksettiin aina vuosipuoliskon lopussa.

1) Opiskeluaikana maksettujen korkojen kokonaismäärä saatiin edellä aritmeettisen sarjan osasummana laskemalla aina puolivuosittain siihen asti **yhteensä kertyneen pääoman korko** ja nämä kaikki yhteen.

2) Samaan tulokseen päästään myös hahmottamalla tilanne toisella tavalla: **Jokaisen lainatun 3000 €:n erän korkokustannukset lasketaan erikseen** koko laina-ajalta ja nämä yhteen:

Lainattu 3000 €:n erä	Laina-aika vuosi-puoliskoina	Erästä yhteensä maksettava korkokustannus	
1.	20	20·0.02·3000	= 1200 (=20·60)
2.	19	19·0.02·3000	= 1140
3.	18	18·0.02·3000	= 1080
…	…	…	…
20.	1	1·0.02·3000	= 60

$s_{20} = 20 \cdot \frac{1200+60}{2} = 12600$ €.

Tässä on samantekevää, kummalla tavalla tehtävä hahmotetaan.
Tilanne voi kuitenkin olla myös toisenlainen:

Esim. (jatkoa edelliseen) Paljonko korkoja kertyy koko 10 vuoden laina-ajalta, kun korkoja ei maksetakaan opiskeluaikana, vaan ne liitetään puolivuosittain lainan pääomaan?

1) Jos tehtävä hahmottaan ensimmäisellä tavalla, kaikki 20 korkoa on laskettava erikseen.

2) Lasku lyhenee jälkimmäisellä tavalla:

Lainattu 3000 €:n erä	1.	2.	…	19.	20.
Laina-aika (vuosi-puolikkaina)	20	19	…	2	1
Erästä maksettava takaisin	$3000 \cdot 1.02^{20}$	$3000 \cdot 1.02^{19}$	…	$3000 \cdot 1.02^{2}$	$3000 \cdot 1.02^{1}$

Lainatuista eristä kertyneiden pääomien summa on geometrisen sarjan 20. osasumma

($a = 3000 \cdot 1.02^1$, $q = 1.02$, $n = 20$ ja termit järjestetty uudelleen)

$s_{20} = 3000 \cdot 1.02^1 + \ldots + 3000 \cdot 1.02^{19} + 3000 \cdot 1.02^{20}$

$$= \frac{(3000 \cdot 1.02)(1-1.02^{20})}{1-1.02} = 74349.95 \text{ €}$$

ja siitä korot 74349.95 – 60000 = 14349.95 €.

Annuiteettimenetelmä

Esim. Opiskelija X:llä on **velkaa** 60000 € (**K**).

Takaisinmaksusta sovitaan pankin kanssa, että

- laina maksetaan kuukausittain 20 vuodessa,
- vuosikorko on 3.6 % ja
- joka kuukausi pankille maksetaan saman suuruinen erä b €.

Kuinka suuri on maksuerä b?

Maksu**eriä** on $20 \cdot 12 = 240$ kpl (**n**).

Kuukausikorko on 0.3 %, jolloin jäljellä olevan lainapääoman suhteellinen muutos eli **korkotekijä** on **r** = $1 + 0.3/100 = 1.003$.

Jäljellä olevan velan määrä 1., 2., 3.,…, 240. kuukauden lopussa on:

1. kk: $1.003 \cdot 60000 - b$

$\downarrow$

2. kk: $1.003 \cdot (1.003 \cdot 60000 - b) - b = 1.003^2 \cdot 60000 - 1.003b - b$

$\swarrow$

3.kk: $1.003 \cdot (1.003^2 \cdot 60000 - 1.003b - b) - b =$

$= 1.003^3 \cdot 60000 - 1.003^2\, b - 1.003b - b$

jne.

Jäljellä olevan velkamäärän lausekkeessa on aina geometrisen sarjan osasumma.

Kun 20 vuotta on kulunut, maksetaan **viimeinen b:n suuruinen erä**, jolloin

240. kk: $1.003^{240} \cdot 60000 - 1.003^{239}b - 1.003^{238}b - \ldots - 1.003b - b = \mathbf{0}$

$\Longleftrightarrow$

$1.003^{240} \cdot 60000 - b\,(1 + 1.003 + 1.003^{2} + \ldots + 1.003^{238} + 1.003^{239}) = \mathbf{0}$

Tästä saadaan yhtälö

$1.003^{240} \cdot 60000 - b\,\dfrac{1 \cdot (1 - 1.003^{240})}{1 - 1.003} = 0,$

mistä ratkaistaan

$$\mathrm{b} = \frac{1.003^{240} \cdot 60000 \cdot (1.003 - 1)}{1.003^{240} - 1} = 351.07\ \text{€/kk}$$

Korkokustannukset ovat

$240 \cdot 351.07 - 60000 = 24256.80$ €.

Jos edellisessä laskussa käytetään merkintöjä:

lainasumma on K (=60000 €), maksuerien määrä on n (=240) ja

korkotekijä r = (1 + p/100) (=1.003), saadaan samalla tavalla yleinen sääntö

annuiteettilainan maksuerän suuruudelle:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r^n K(r-1)}}{\mathbf{r^n - 1}}$$

Jakso, jolle annuiteetti lasketaan voi olla kuukausi, vuosineljännes jne.

Esim. (jatkoa edelliseen) Kuinka suuri on maksuerän suuruus, kun 60000 €: n laina maksetaan puolivuosittain annuiteettiperiaatteella 20 vuodessa ja vuosikorko on 3.6 %?

$n = 20 \cdot 2 = 40$ erää ja $r = 1 + \frac{1.8}{100} = 1.018$

$$b = \frac{1.018^{40} \cdot 60000 \cdot (1.003-1)}{1.018^{40}-1} = 2117.145$$

Korkokulut koko 20 vuoden laina-ajalta ovat:

$40 \cdot 2117.145 - 60000 = 24686$ €

Esim. (jatkoa) Kuinka suuret ovat korkokulut, jos **pääoman lyhennykset ovat yhtä suuria:**

Lainaa lyhennetään $\frac{60000}{40}$ = 1500 € puolivuosittain, jolloin

maksettavat korot muodostavat aritmeettisen sarjan osasumman:

$$\begin{array}{lllll} & 1. & 2. & 3. & 40. \\ & 0.018\cdot 60000 & +\, 0.018\cdot 58500 & +\, 0.018\cdot 57000 & +\, \ldots +\, 0.018\cdot 1500 \\ = & 0.018\cdot(40\cdot 1500) & +\, 0.018\cdot(39\cdot 1500) & +\, 0.018\cdot(38\cdot 1500) & +\, \ldots +\, 0.018\cdot 1500 \\ = & 40\cdot 27 & +\, 39\cdot 27 & +\, 38\cdot 27 & +\, \ldots +\, 1\cdot 27 \end{array}$$

$$= 40\cdot\frac{0.018\cdot 60000+0.018\cdot 1500}{2} = 22140$$

- Sarjojen teorialla on edellisten kaltaisten suorien sovellusten lisäksi välillistä merkitystä käytännön laskemiseen.

- Polynomifunktiota ”monimutkaisempien” (mm. potenssi-, eksponentti-, logaritmi-, trigonometristen) funktioiden numeeristen arvojen laskeminen perustuu näiden funktioiden ”operatiiviseen määrittelyyn” sarjakehitelmien(?) avulla.

Esimerkiksi, mistä saadaan $\sqrt[3]{2}$, sin2, …, jne.?

1.4 Hinta- ja volyymi-indekseistä

- Kuinka suuri on (esim. keskimääräisen kotitalouden käyttämien hyödykkeiden) **hintatason** ja (kulutettujen) määrien eli **volyymin suhteellinen muutos** valitun perusajankohdan ja vertailuajankohdan välillä?

Esim. Ekonomisti E käyttää terveysvaikutteisia luonnontuotteita:

Kuntojuomaa (KJ), Terveysuutetta (TU) ja Ihmepillereitä (IP).

Hän seuraa näiden hyödykkeiden hintoja ja viikon aikana kuluttamiaan määriä noin vuoden välein. Vuosina 2009, 2010 ja 2011 tulokset olivat:

	Hinnat			Määrät		
Vuosi	KJ (€/dl)	TU (€/g)	IP (€/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)
2009	0,40	0,50	1,40	35	60	30
2010	0,80	0,60	2,00	50	70	25
2011	0,30	0,80	4,00	120	90	50

Kun verrataan vuoteen 2009 eli **perusajanjaksona** on vuosi 2009, ovat hintojen suhteelliset muutokset eli **hintasuhteet**:

Hintasuhteet

Vuosi	KJ	TU	IP
2009	0,40/0,40=1.000	1.000	1.000
2010	0,80/0,40=2.000	1.200	1.429
2011	0,30/0,40=0,750	1.600	2.857

Yksittäisten hintasuhteiden tulkinnassa ei ole ongelmia.

Esim. vuoteen 2009 verrattuna Kuntojuoman hinta 2-kertaistui ensimmäisen vuoden aikana, mutta oli v. 2011 vain 75 % lähtötasosta.

Sen sijaan yksikäsitteistä oikeaa vastausta ei ole kysymykseen:

Kuinka suuri on näiden terveystuotteiden **hintatason**
(kaikki kolme hyödykettä samaan aikaan tarkasteltuna)
suhteellinen muutos?

Esim. **perusvuodesta** 2009 ensimmäiseen **tarkasteluvuoteen** 2010 olivat yksittäisten hyödykkeiden hintojen suhteelliset muutokset:

KJ: **2.000** TU: **1.200** IP: **1.429**

- Luonnollinen ajatus on, että **jokin keskiarvo** näistä **hintasuhteista** on ”oikea” vastaus kysymykseen.

Näihin kysymyksiin saadaankin kohtalaisen kelvolli**sia** vastauksia tilastotieteen keinoin

erilaisia keskiarvotyyppejä ja hintasuhteiden arvojen sopivaa painottamista tutkimalla. Tähän suuntaan ei kuitenkaan edetä nyt.

Toinen lähestymistapa **hintatason suhteellisen muutoksen** mittaamiseen on
(tässä terveysvalmiste-) **korin arvon suhteellisen muutoksen** laskeminen:

Kuinka suuri on tässä hintatason suhteellinen muutos **perusvuodesta** 2009 **tarkasteluvuoteen** 2010?

Vertailun pohjaksi valitaan tässä ensin **perusvuoden** 2009 ”**hyödykekori**”:

Kuntojuomaa **35 dl**, Terveysuutetta **60 g** ja Ihmepillereitä **30 kpl**.

Tämän perusvuoden 2009 **korin arvo** perusvuoden 2009 hinnoin on:

$0.40 \cdot 35 + 0.50 \cdot 60 + 1.40 \cdot 30 = 86$ €

Saman perusvuonna 2009 kulutetun **korin** ostamiseen tarvittava rahamäärä olisi vuonna 2010:

$\cdot\ 35 + \qquad \cdot\ 60 + \qquad \cdot\ 30 = 124$ €

Koska kori pysyy samana, niin sen ostamiseen tarvittavan rahasumman muutos aiheutuu näiden hyödykkeiden **”hintatason”** muuttumisesta.

Perusvuoden 2009 **korin arvon suhteellinen muutos** tarkasteluvuoteen 2010 on

$$\frac{124\ €}{86\ €} \sim 1.442 = 144.2\ \%$$

ja tämä arvo tulkitaan **(määritellään) hintatason suhteelliseksi muutokseksi** näiden vuosien välillä.

Tulos on hintasuhteiden välissä ja on siten ”järkevä” yhteenveto niistä.

Edellä laskettu hintatason suhteellinen muutos on esimerkki ***Laspeyres´n hintaindeksistä:***

$$\mathbf{P_{t_0}^{t}(La)} = \frac{\sum \mathbf{p_{it} q_{i0}}}{\sum \mathbf{p_{i0}\, q_{i0}}} \text{ , missä}$$

$q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ ovat perusajanjakson t_0 määrät,

$p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}$ perusajanjakson t_0 hinnat ja

$p_{1t}, p_{2t}, \ldots, p_{nt}$ tarkasteluajanjakson t hinnat.

Laspeyres´n hintaindeksi siis

- **mittaa** perusajanjakson korin arvon suhteellista muutosta tarkasteluajanjaksoon mennessä

- ja sen arvo **tulkitaan** hintatason suhteelliseksi muutokseksi.

Esim. (jatkoa edelliseen) Kun perusvuotena on edelleen v. 2009, on Laspeyres`n hintaindeksin arvo vuodelle 2011:

$$P_{2009}^{2011}(La) = \frac{0.30 \cdot 35 + 0.80 \cdot 60 + 4.00 \cdot 30}{0.40 \cdot 35 + 0.50 \cdot 60 + 1.40 \cdot 30} = \frac{178.50}{86} \sim 2.076 = 207.6\ \%$$

Myös tämä arvo on hintasuhteiden välissä.

Ei ole mitenkään itsestään selvää, että edellä käytetty perusvuoden hyödykekori on juuri ”oikea” vertailun lähtökohta.
Yhtä hyvin voidaan vertailun pohjana käyttää tarkasteluajanjakson ”koria”:

Esim. (jatkoa) Kuinka suuri on hintatason suhteellinen muutos vuodesta 2009 vuoteen 2010?

Nyt **määrät vakioidaan** vertailua varten
tarkasteluvuoden 2010 **määriksi**.

Kuntojuoma **50** dl, Terveysuute **70** g ja Ihmepillerit **25** kpl.

Tämän korin arvo perusvuoden 2009 hinnoin olisi

$0.40 \cdot 50 + 0.50 \cdot 70 + 1.40 \cdot 25 = 90$ €

ja on tarkasteluvuoden 2010 hinnoin

$? \cdot 50 + \ ? \cdot 70 + \ ? \cdot 25 = 132$ €

Kun ”kori” taas pysyy samana, aiheutuu sen ostamiseen tarvittavan rahamäärän muutos hintojen muuttumisesta. Vastaavasti kuin edellä näiden rahasummien suhde

$$\frac{132\ €}{90\ €} \sim 1.467$$

- **kuvaa täsmälleen** tämän **tarkasteluvuoden korin** **arvon suhteellista muutosta**, mutta

- mutta sen **voidaan tulkita** mittaavan **hintatason suhteellista muutosta** eli se on myös (asiaa hieman eri näkökulmasta asiaa tarkastelevan) hintaindeksin arvo.

Kun määrät vakioidaan tarkasteluvuoden määriksi, sanotaan tätä Indeksiä ***Paaschen hintaindeksiksi***:

$$\boldsymbol{P_{t_0}^{t}(Pa)} = \frac{\sum \boldsymbol{p_{it} q_{it}}}{\sum \boldsymbol{p_{i0}\ q_{it}}}\ \text{, missä}$$

q_{1t}, q_{2t}, … ,q_{nt} ovat tarkasteluajanjakson t määrät,

p_{10}, p_{20}, …, p_{n0} perusajanjakson t_0 hinnat ja

p_{1t}, p_{2t}, …, p_{nt} tarkasteluajanjakson t hinnat.

Edellä vuodelle 2010 hieman eri näkökulmista hintatason suhteellista muutosta mittaavat arvot

$\mathrm{P}_{2009}^{2010}(\mathrm{La}) = 1.442$ ja $\mathrm{P}_{2009}^{2010}(\mathrm{Pa}) = 1.467$

ovat hyvin saman suuruiset.

Laspeyres`n mukaan hintataso on 1.442-kertaistunut ja Paaschen indeksi näyttää (melko poikkeuksellisesti suurempaa) 46.7 %:n kasvua.

Siis

- Huonot uutiset: ”Hintatason” suhteellinen muutos

ei ole yksikäsitteisesti määriteltävissä ja mitattavissa

- Hyvät uutiset: Erilaisista ”järkevistä” lähtökohdista saatavat

tulokset ovat melko saman suuruisia.

Esim. (jatkoa) Perusvuotena on edelleen 2009.

Laskettaessa Paaschen indeksiä vuodelle 2011 on kori myös tältä vuodelta:

Kuntojuoma **120** dl, Terveysuute **90** g ja Ihmepillerit **50** kpl.

$$\mathrm{P}_{2009}^{2011}(\mathrm{Pa}) = \frac{0.30 \cdot 120 + 0.80 \cdot 90 + 4.00 \cdot 50}{0.40 \cdot 120 + 0.50 \cdot 90 + 1.40 \cdot 50} = \frac{308\ €}{163\ €} \sim 1.890$$

Edellä laskettiin $\mathrm{P}_{2009}^{2011}(\mathrm{La}) = 2.076$

Nyt ero on vähän suurempi.

Erot voivat kuitenkin olla myös paljon suurempia, jos hintojen ja määrien muutokset ovat hyvin voimakkaita.

”Hintatason suhteellisen muutoksen” mittaamisen ongelmaan

- **periaatteessa** Laspeyres ja Paasche ovat samanarvoisia, mutta

- **käytännössä** indeksi on Laspeyres`n indeksi on käyttökelpoisempi.

Esimerkiksi hintatason muutosta kotitalouksien näkökulmasta kuvaava **kuluttajahintaindeksi** lasketaan kuukausittain Laspeyres`n menetelmällä,

koska kotitalouksien keskimäärin kuluttamaa määräkoria, jossa on monta sataa keskeisintä hyödykettä, ei tarvitse (eikä voida) uusia jokaiselle kuukaudelle. Kori uusitaan noin viiden vuoden välein.

Indeksiteoreettisesti ja (ehkä myös) intuitiivisesti hyvä kompromissi näistä samanarvoisista ratkaisuista on $\boldsymbol{Fisherin\ hintaindeksi}$, joka on niiden geometrinen keskiarvo:

$$\boldsymbol{P_{t_0}^{t}(F) = \sqrt{P_{t_0}^{t}(La)P_{t_0}^{t}(Pa)}}$$

<u>Esim.</u> (jatkoa)

$$\mathrm{P}_{2009}^{2010}(\mathrm{F}) = \sqrt{1.442 \cdot 1.467} \sim 1.454$$

ja

$$\mathrm{P}_{2009}^{2011}(\mathrm{F}) = \sqrt{\ ? \quad \cdot \quad ?\quad} \sim 1.981$$

Volyymi- eli määräindeksit

mittaavat (esim. kulutettujen) **määrien suhteellista** muutosta.

Lähtökohta on tässä periaatteessa ongelmallisempi kuin hintojen muuttumista tutkittaessa, missä joka hyödykkeen kohdalla tarkastellaan suoraan ostamiseen tarvittavan rahamäärän muuttumista. Tutkittavat määrät voivat sen sijaan olla kappaleita, kiloja, litroja kilowattitunteja yms.

Ratkaisut ovat kuitenkin vastaavanlaiset kuin hintatason suhteellista muutosta mitattaessa:

Esim. (jatkoa) Terveysvalmisteiden hinnat ja kulutetut määrät ovat:

	Hinnat			Määrät		
Vuosi	KJ (€/dl)	TU (€/g)	IP (€/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)
2009	0,40	0,50	1,40	35	60	30
2010	0,80	0,60	2,00	50	70	25
2011	0,30	0,80	4,00	120	90	50

Kun perusvuotena on 2009, ovat määrien suhteelliset muutokset eli **määräsuhteet**:

Vuosi	KJ	TU	IP
2009	35/35 = 1.000	1.000	1.000
2010	$50/35 \sim$1.429	1.167	0.833
2011	$120/35\sim$3.429	1.500	1.667

Kulutettujen määrien suhteellista muutosta mitattaessa on tässäkin käyttökelpoinen ratkaisu ”jonkinlainen” määräsuhteiden ”sopivasti” painotettu keskiarvo. Tähän suuntaan ei jatketa myöskään tässä.

Vaihtoehtoinen ratkaisu on symmetrinen edellä käytetyn ”kori”-ajatuksen kanssa, jossa tilanne kapitalisoidaan tutkimalla hyödykkeiden ostamiseen tarvittavan rahamäärän muutosta:

- Hintatason muutosta tutkittaessa **vakioidaan** ostettava **määräkori**, jonka arvon muutos lasketaan muuttuvassa hintatilanteessa.

- Volyymin muutosta tutkittaessa taas **vakioidaan hinnat**, joiden vallitessa lasketaan muuttuvan määräkorin arvo:

Esim. (jatkoa) Terveysvalmisteiden kulutuksen volyymin suhteellinen muutos verrattuna perusvuoteen 2009:

Perusvuonna 2009 olivat yksikköhinnat

KJ **0.40** €/dl, TU **0,50** €/g ja IP **1.40** €/kpl.

Perusvuonna 2009 kulutetun korin arvo oli:

0.40·35 + **0.50**·60 + **1.40**·30 = 86 €

Jos **hinnat** olisivat olleet **samat** tarkasteluvuonna 2010, olisi silloin kulutetun korin ostamiseen tarvittu

0.40· ? + **0.50**· ? + **1.40**· ? = 90 €

Kun hinnat on vakioitu, aiheutuu ostamiseen tarvittavan rahasumman muutos määrien muuttumisesta,

ja suhde $\frac{90\ €}{86\ €} \sim 1.047$

tulkitaan (määritellään) kulutuksen **volyymin suhteelliseksi muutokseksi**

ja määrittelee **volyymi-indeksin** arvon.

Kun **hintataso vakioidaan perusvuoden tasoon**, sanotaan edellä lasketulla tavalla saatavaa **määrien suhteellista muutosta** kuvaavaa indeksiä

Laspeyres`n volyymi-indeksiksi:

$$\boldsymbol{Q_{t_0}^{t}(La)} = \frac{\sum \boldsymbol{p_{i0} q_{it}}}{\sum \boldsymbol{p_{i0}\, q_{i0}}} \text{, missä}$$

$q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ ovat perusajanjakson t_0 määrät,

$q_{1t}, q_{2t}, \ldots, q_{nt}$ tarkasteluajanjakson t määrät ja

$p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}$ perusajanjakson t_0 (vakioidut) hinnat.

Esim. (jatkoa) Laspeyres´n volyymi-indeksin arvo vuodelle 2011:

$$\mathrm{Q}_{2009}^{2011}(\mathrm{La}) = \frac{0.40 \cdot 120 + 0.50 \cdot 90 + 1.40 \cdot 50}{0.40 \cdot 35 + 0.50 \cdot 60 + 1.40 \cdot 30} = \frac{163\ €}{86\ €} \sim 1.895$$

Paaschen menetelmässä hinnat vakioidaan tarkasteluvuoden tasoon:

Esim. (jatkoa) Perusvuotena on 2009 ja tarkasteluvuotena 2010.

Vuonna 2010 (havainnointiviikon aikana) kulutetusta korista maksetaan

0.80 · 50 + **0.60** · 70 + **2.00** · 25 = 132 €.

Jos hinnat olisivat myös perusvuonna samat, maksaisi perusvuoden 2009 kori

0.80 · ? + **0.60** · ? + **2.00** · ? = 124 €.

Kun hinnat on vakioitu, johtuu tässäkin kulutuksen arvon muutos määrien muuttumisesta ja suhde

132€/124€ ~ 1.065

voidaan tulkita kulutuksen **volyymin suhteelliseksi muutokseksi** ja määrittelee näin (hieman eri näkökulmasta) **volyymi-indeksin** arvon.

Arvo on

- määräsuhteisiin verrattuna niiden välissä ja

- Laspeyres´n indeksiin verrattuna melko saman suuruinen (tässäkin poikkeuksellisesti suurempi)

Kun **hintataso vakioidaan tarkasteluajanjakson tasoon**, sanotaan edellä lasketulla tavalla saatavaa **volyymin suhteellista muutosta** kuvaavaa indeksiä

Paaschen volyymi-indeksiksi:

$$\boldsymbol{Q_{t_0}^{t}(Pa)} = \frac{\sum \boldsymbol{p_{it} q_{it}}}{\sum \boldsymbol{p_{it}\, q_{i0}}} \text{, missä}$$

$q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ ovat perusajanjakson t_0 määrät,

$q_{1t}, q_{2t}, \ldots, q_{nt}$ tarkasteluajanjakson t määrät ja

$p_{1t}, p_{2t}, \ldots, p_{nt}$ tarkasteluajanjakson t (vakioidut) hinnat.

<u>Esim.</u> (jatkoa) Paaschen volyymi-indeksin arvo vuodelle 2011:

Vakioidut hinnat ovat: KJ 0.30 €/dl, TU 0.80 €/g, IP 4.00 €/kpl

$$\mathrm{Q}_{2009}^{2011}(\mathrm{Pa}) = \frac{0.30 \cdot 120 + 0.80 \cdot 90 + 4.00 \cdot 50}{0.30 \cdot 35 + 0.80 \cdot 60 + 4.00 \cdot 30} = \frac{308\ €}{178.50\ €} \sim 1.725$$

- Jos kaikki hinta- ja määrätiedot ovat käytettävissä, ovat Laspeyres´n ja Paaschen volyymi-indeksit yhtä hyviä määrien suhteellisen muutoksen mittareita.

- Suurten hyödykekokonaisuuksin kuten teollisuustuotannon, viennin, tuonnin jne. volyymin muutosta kuvataan Paaschen indeksin avulla, joka saadaan ”sivutuotteena” Laspeyres´n hintaindeksin avulla. Tämä aikasarjan deflatointiin perustuva laskutapa sivuutetaan tässä.

Hyvä kompromissi Laspeyres´n ja Paaschen indekseistä on taas niiden geometrinen keskiarvo:

Fisherin volyymi-indeksi:

$$\boldsymbol{Q_{t_0}^{t}(F) = \sqrt{Q_{t_0}^{t}(La)Q_{t_0}^{t}(Pa)}}$$

<u>Esim.</u> (jatkoa)

$\mathrm{Q}_{2009}^{2010}(\mathrm{F}) = \sqrt{1.047 \cdot 1.065} \sim 1.056$

ja

$\mathrm{Q}_{2009}^{2011}(\mathrm{F}) = \sqrt{\;?\quad \cdot \quad ?\;} \sim 1.808$

Yhteenveto ”kori”-hahmotukseen perustuvista indekseistä:

Hintaindeksin perusmalli on: $\boldsymbol{P_{t_0}^{t}}(?) = \dfrac{\sum p_{it} \boldsymbol{q_{i?}}}{\sum p_{i0} \boldsymbol{q_{i?}}}$, missä

$q_{1t?}$ $q_{2t?}$ ... ,$q_{nt?}$ ovat (jollakin järkevällä tavalla) vakioidut määrät.

1) Laspeyres: perusajankohdan määrät

2) Paasche: tarkasteluajanjakson määrät

3) Jokin muu määrien vakiointi?

Volyymi-indeksin perusmalli on: $\boldsymbol{Q_{t_0}^{t}}(?) = \dfrac{\sum \boldsymbol{p_{i?}} q_{it}}{\sum \boldsymbol{p_{i?}} q_{i0}}$, missä

$p_{1?}$, $p_{2?}$, ..., $p_{n?}$ ovat (jollakin järkevällä tavalla) vakioidut hinnat.

1) Laspeyres: perusajanjakson hinnat

2) Paasche: tarkasteluajanjakson hinnat

3) Jokin muu hintojen vakiointi?