Luku 5
Newtonin lakien käyttö

Kitka
Tasainen ympyräliike
Väliaineen vastus

Tavoitteet:

- Käyttää Newtonin lakeja yhden kappaleen liikkeeseen
- Selittää ympyräliike Newtonin lakien avulla
- Liittää kitka Newtonin yhtälöiden ratkaisuun

Esitiedot

- Newtonin lait
- paikka, nopeus ja kiihtyvyys ja niiden yhteys

5.1 Kitka ja Newtonin II lain käyttö

Aihealuen tehtävät voidaan jakaa kahteen luokkaan

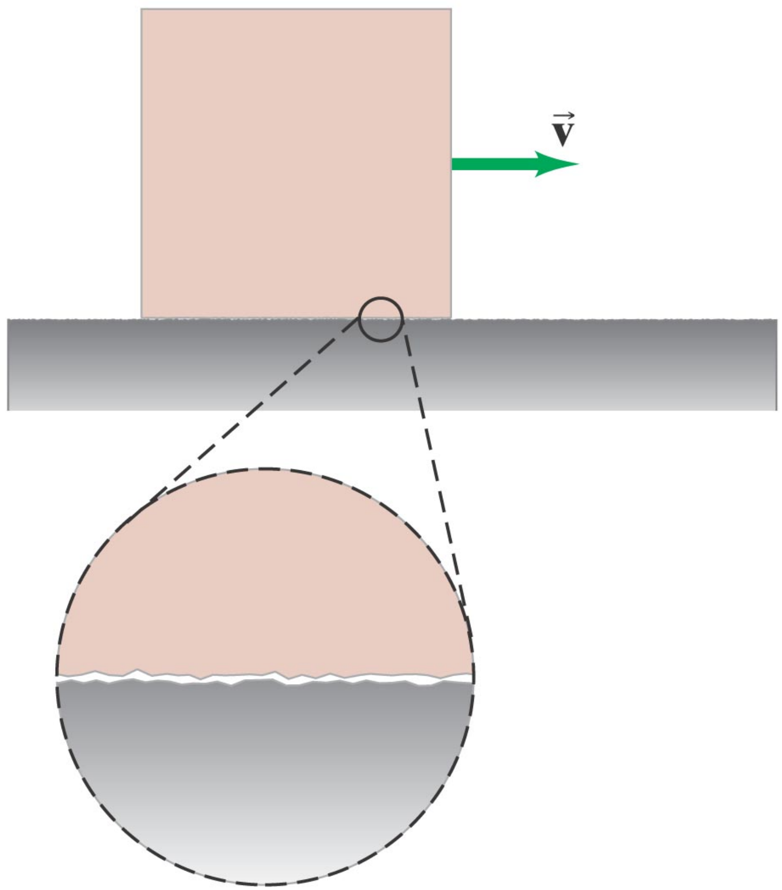
Tasapainotehtävät
Ratkaistavana yleensä jokin kappaleeseen kohdistuva voima

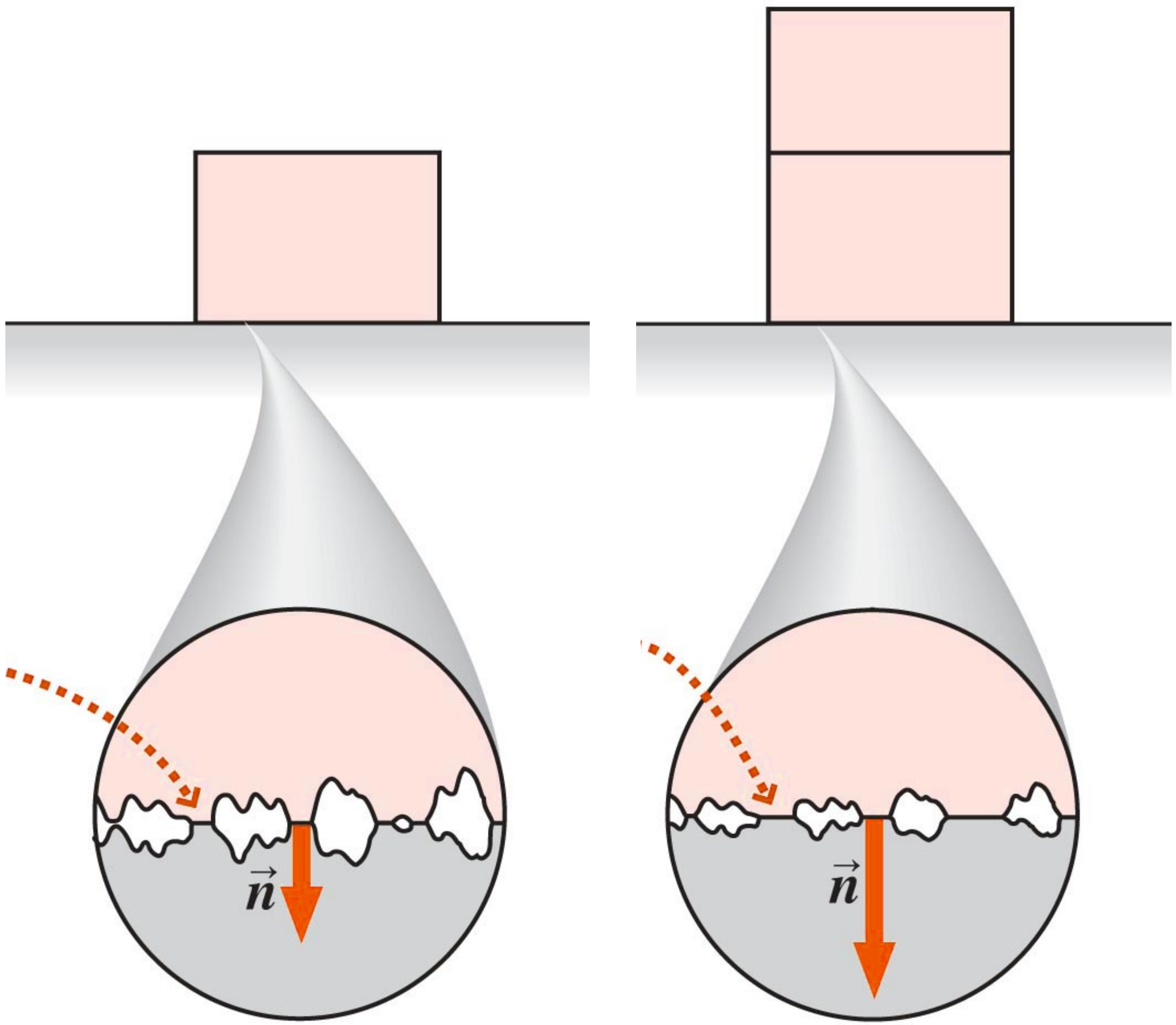
Dynamiikkatehtävät
Ratkaistavana yleensä kappaleen kiihtyvyys tai jokin kappaleeseen kohdistuva voima.

Kitka aiheutuu alueista, jossa pinnan koskevat toisiinsa.

$$F_{fr} = \mu_k F_N$$

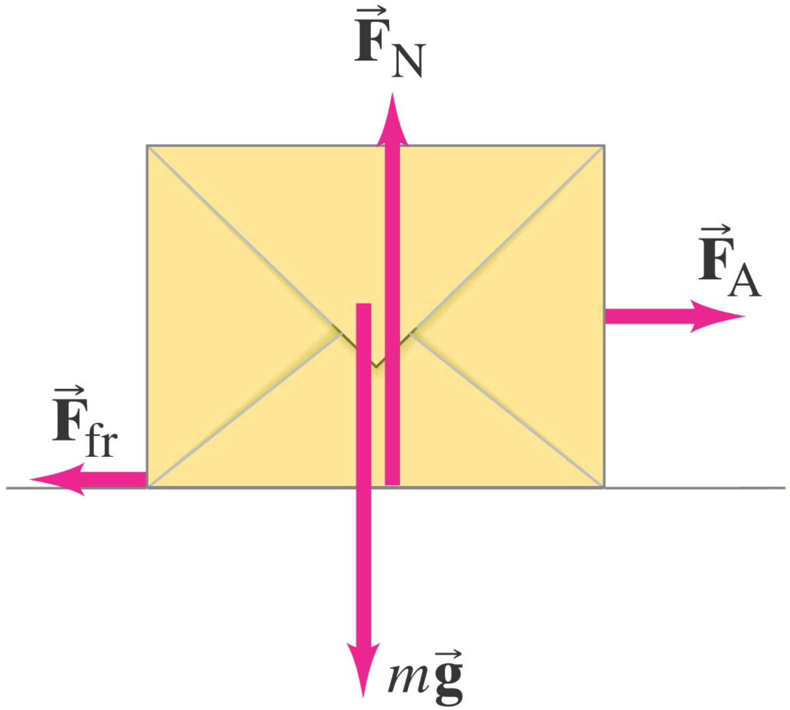
Normaalivoiman kasvaessa
kosketuspinta kasvaa
=> kitka kasvaa





Esimerkki 5.1: Liikekitka ja lepokitka

Laatikko, jonka massa on 10,0 kg, on vaakasuoralla pöydällä, jossa lepokitkakerroin μ_s on 0.40 ja liikekitkakerroin μ_k 0.30. Määritä kitkavoiman suuruus, kun laatikkoa vedetään voimalla F_A a) 0 N, b) 10 N, c) 20 N d) 38 N ja e) 40 N



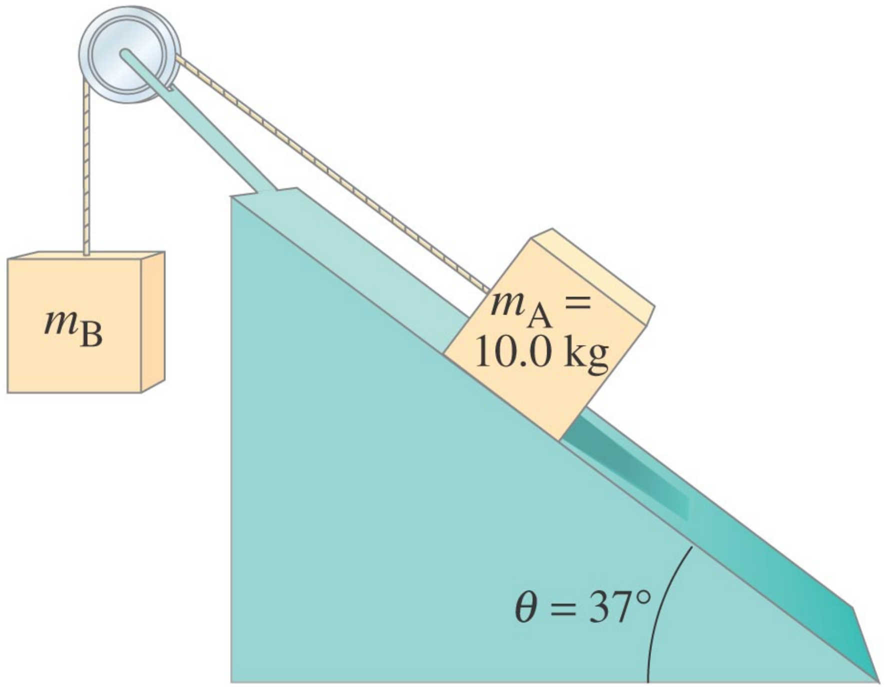
Esimerkkien ratkaisut löytyvät kurssin oppikirjasta

Esimerkki 5.7:

Laatikko, jonka massa on 10,0 kg, on kaltevalla tasolla. Laatikko on kiinnitetty kevyellä narulla narussa roikkuvaan punnukseen, jonka massa on m_b. Naru kulkee kevyen ja kitkattoman väkipyörän yli.

a) Määritä millainen voi olla punnuksen massa, jotta systeemi pysyy paikallaan. Lepokitkakerroin tason ja laatikon välillä on 0,40.

b) Jos liukukitkakerroin tason ja laatikon välillä on 0,30 ja punnuksen massa on 10,0 kg, määritä systeemin kiihtyvyys.

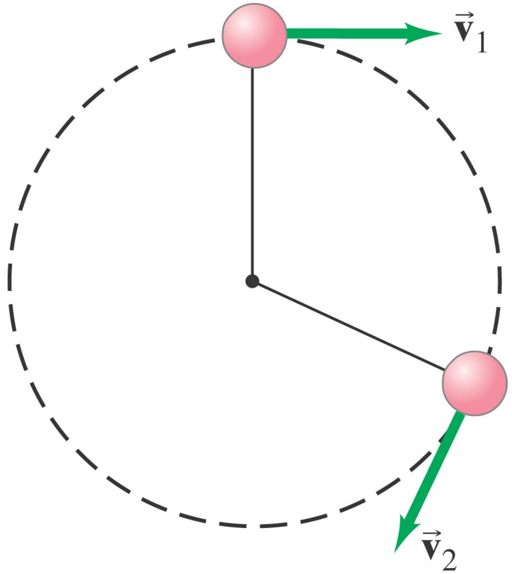


(a)

Tehtävänratkaisuohje

1. Hahmottele tehtävä kuvaksi (ellei annettu tehtävässä)
2. Piirrä voimakuvio jokaiselle kappaleelle erikseen (jos kappaleita on useampia)
   - Mieti, mitkä voimat kappaleeseen vaikuttavat
   - Mieti voimien vaikutuspisteet
   - Piirrä kappaleen X voimakuvioon vain kappaleeseen X vaikuttavat voimat.
2. Katso miten eri voimakuviot yhtyvät.
   - Kontaktissa olevien kahden kappaleen toisiinsa kohdistavien voimien tulee olla itseisarvoiltaan samat.
   - Jos kappaleet on kytketty toisiinsa, tarvitaan kytkentään liittyvä ehto (esim. venymätön köysi).
   - Onko kappaleilla sama nopeuden tai kiihtyvyyden itseisarvo, vaikka suunta olisikin eri?
3. Voit halutessasi valita jokaiselle voimakuviolle oman koordinaatiston.
   - Valitse akselit niin, että laskeminen käy sujuvasti.
4. Varmista, että kuvat vastaavat tilannetta
5. Sovella Newtonin II lakia komponenttimuodossa.
   - Ota huomioon kytkennät kuvien välillä
   - Ratkaise rakentamasi yhtälöt

5.2-3 Tasainen ympyräliike



Nopeus määritellään

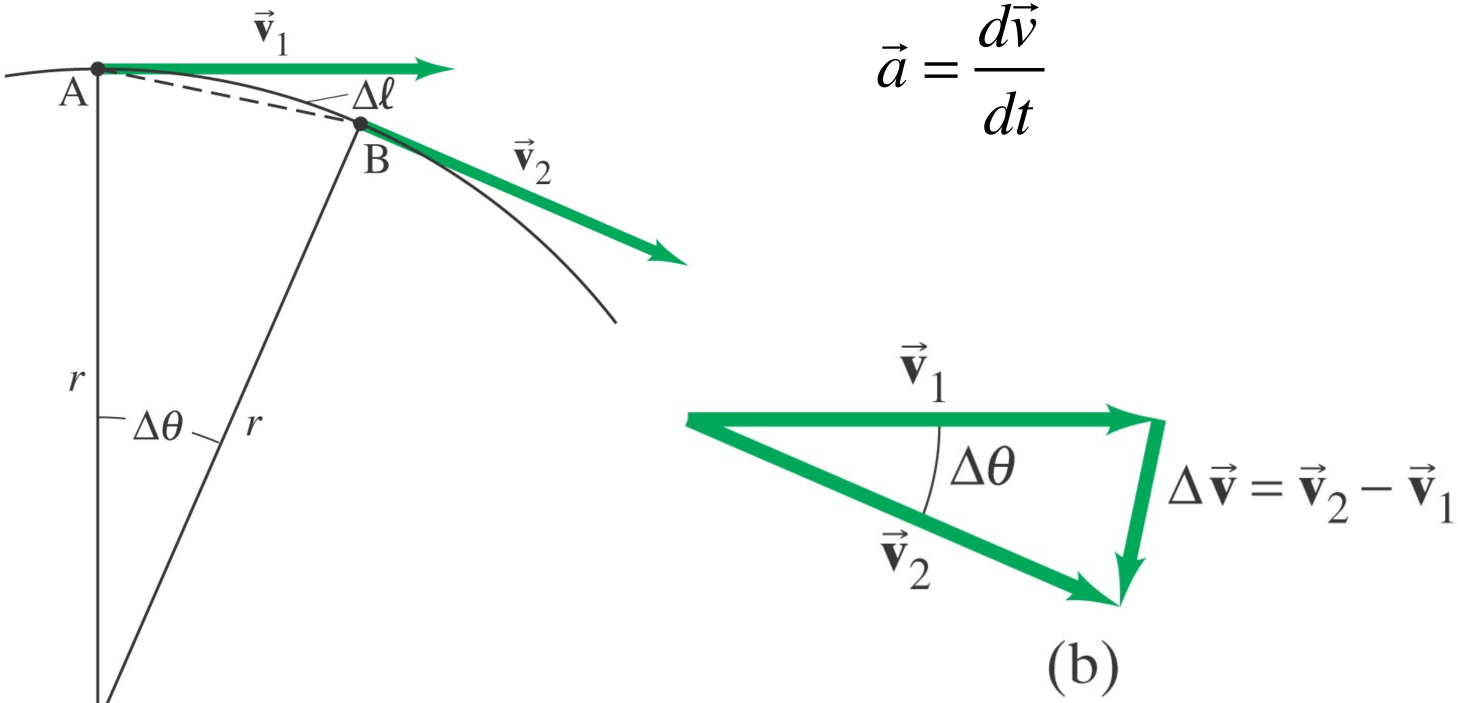
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

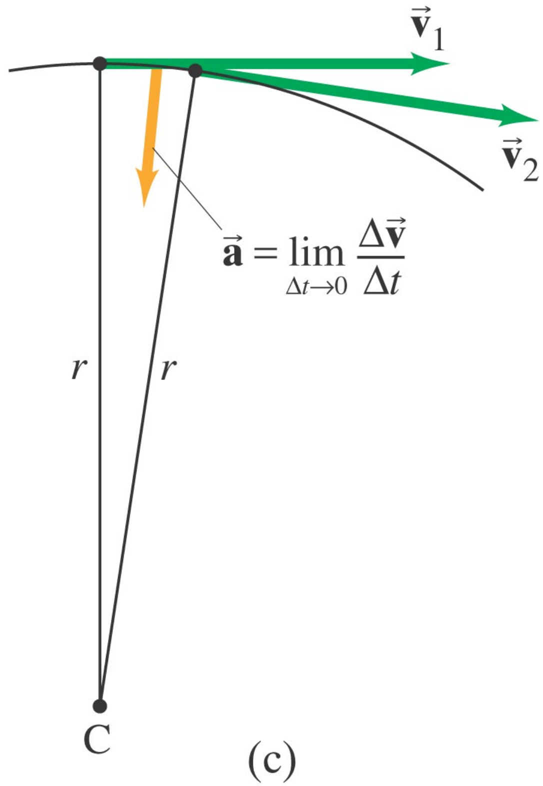
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Kiihtyvyys määritellään

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$





Esimerkki 5.9: Kuun kiihtyvyys

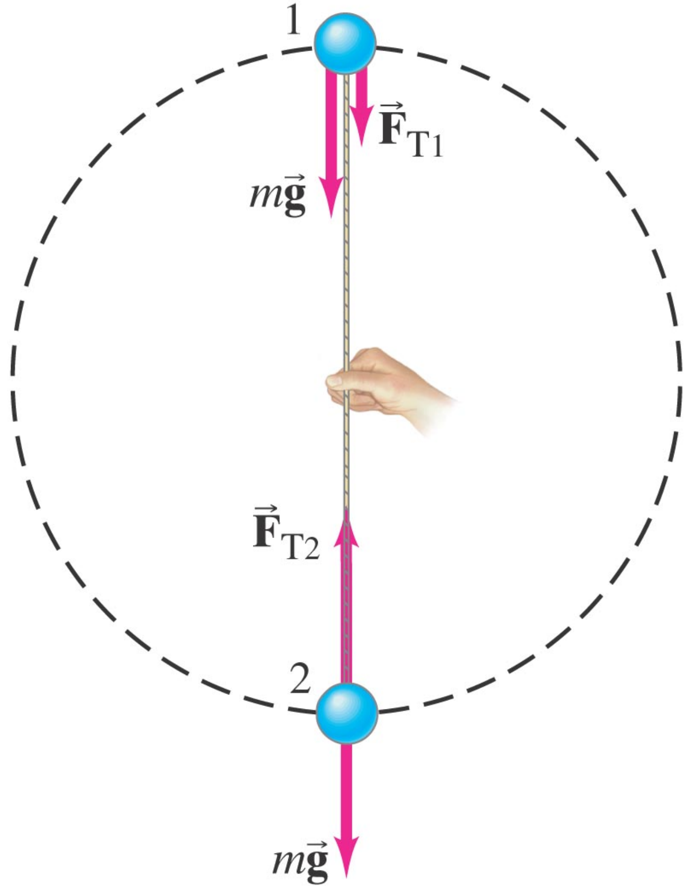
Kuu kiertää Maata lähes ympyränmuotoisella radalla, jonka säde on 384 Mm. Yhden kierroksen vaatima aika on 27,3 d. Määritä Kuun kiihtyvyys ja sen suunta.

Esimerkki 5.12:

Pallo, jonka massa on 0.150 kg on 1.10 m pitkän kevyen narun varassa. Narua pyöritetään niin, että pallo liikkuu pystysuoralla tasolla.

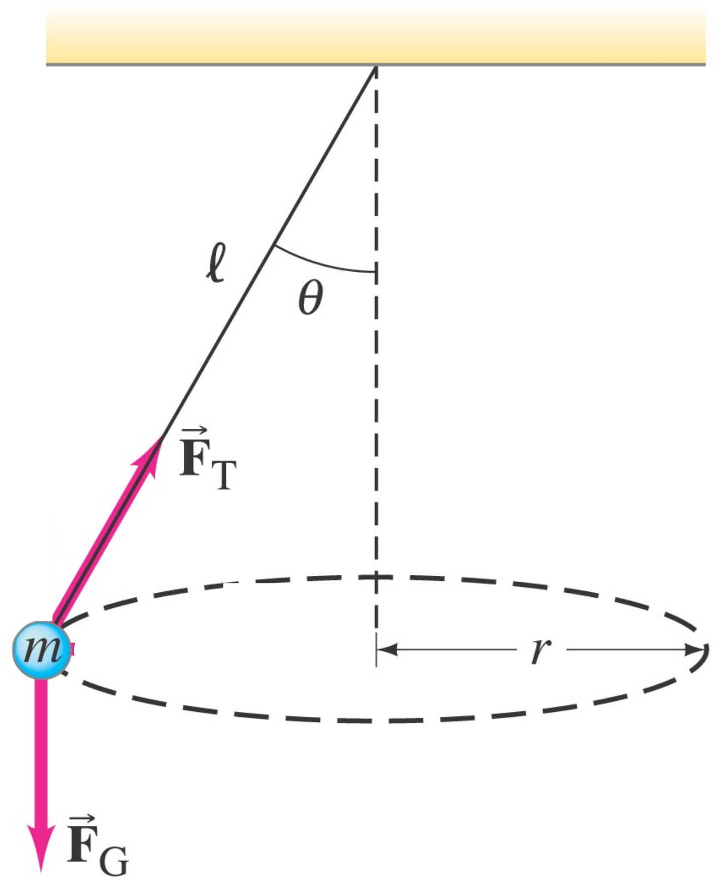
a) Määritä pallon pienin mahdollinen nopeus v_1, jolla se pysyy koko ajan ympyräradalla

b) Palloa pyöritetään Määritä narun jännitysvoima pallon ollessa alimassa pisteessään ja pyörimisnopeuden ollessa $2v_1$.



Esimerkki 5.13:

Pieni pallo, joka on ripustettu kevyen narun varaan, pyörii ympyräradalla vaakatasossa r-säteistä rataa. Naru, jonka pituus on ℓ, muodostaa kulman θ pystysuoran kanssa. Määritä pallon nopeus.



Esimerkki 5.15

Auto ajaa kaarteeseen säilyttäen vauhtinsa vakiona. Määritä kuinka paljon tietä pitää kallistaa kaarteessa, jotta auto pysyy tiellä ilman kitkaa. Sovella tulosta tilanteeseen, jossa tien kaarevuussäde on 50 m ja auton vauhti 50 km/h.

5.6 Väliaineen vastus ja rajanopeus

Kun kappale liikkuu nesteessä tai kaasussa (yleisnimitys fluidi), aine vastustaa kappaleen liikettä. Esimerkiksi kappaleen pudotessa painovoimakentässä, sen liikeyhtälöksi pystysuunnassa voidaan kirjoittaa

$$mg - bv^n(t) = ma(t)$$

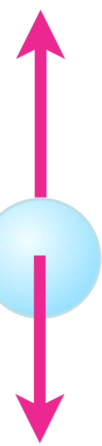
missä vakio b (>0) riippuu kappaleen muodosta ja koosta. Nopeus v ja kiihtyvyys a riippuvat ajasta. Pienillä nopeuksilla, kun väliaine kulkee laminaarisesti kappaleen ympärillä, n=1, mutta nopeuden kasvaessa väliaineeseen syntyy pyörteitä ja virtaus on turbulenttia, jolloin n≈2.

$$F_D \propto v^2$$

$$F_D \propto v$$

Rajanopeus saavutetaan, kun vastustava ja kiihdyttävä voima ovat yhtä suuria

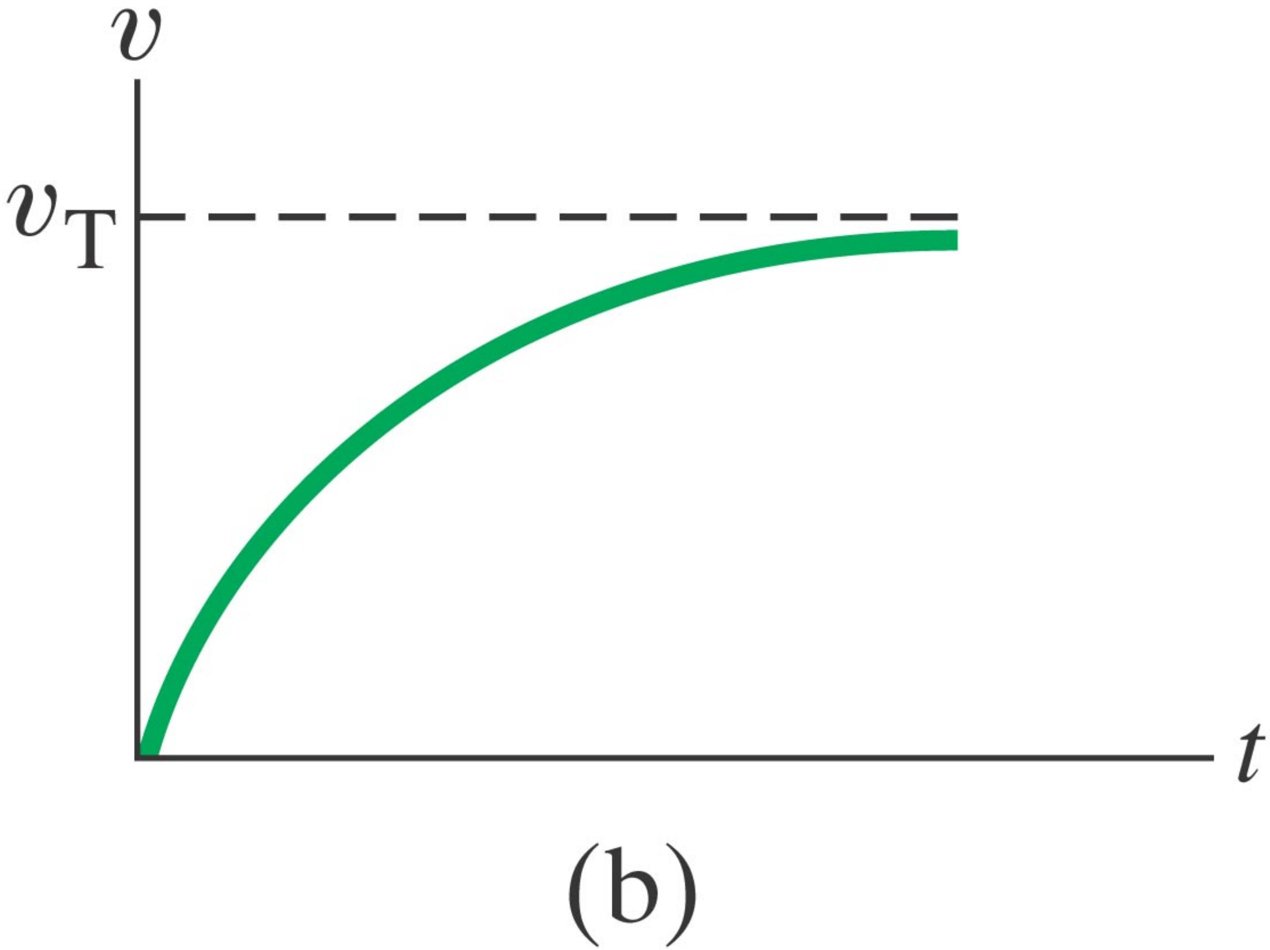
$$v(t \to \infty) = \left(\frac{mg}{c}\right)^{1/n}$$



Esimerkki 5-17

Määritä lauseke kappaleen nopeudelle ajan funktiona, kun se on vapaassa pudotuksessa ja siihen vaikuttaa suoraan nopeuteen verrannollinen voima.

Figure 5.27b



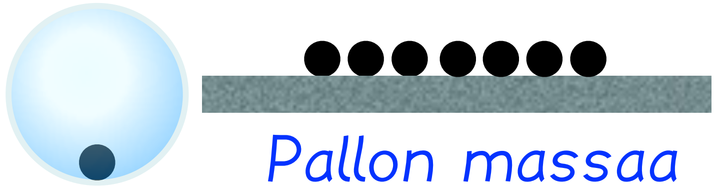
Funktiomittauksesta

ja

virheen arvioinnista

Johdanto laboratoriotöihin

Esimerkki funktiomittauksesta



Pallon massaa muutetaan lisäämällä sen sisälle lyijyhauleja

Mitataan vedessä putoavan pingispallon nopeutta ja tarkastellaan rajanopeutta.

Osoitetaan teorian pätevyys ja valitaan malli

Rajanopeus on $v_T = \dfrac{mg}{b}$ tai $v_T = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$

g on putoamiskiihtyvyys ja
b/c on parametri

Esimerkki funktiomittauksesta

Mittaukset

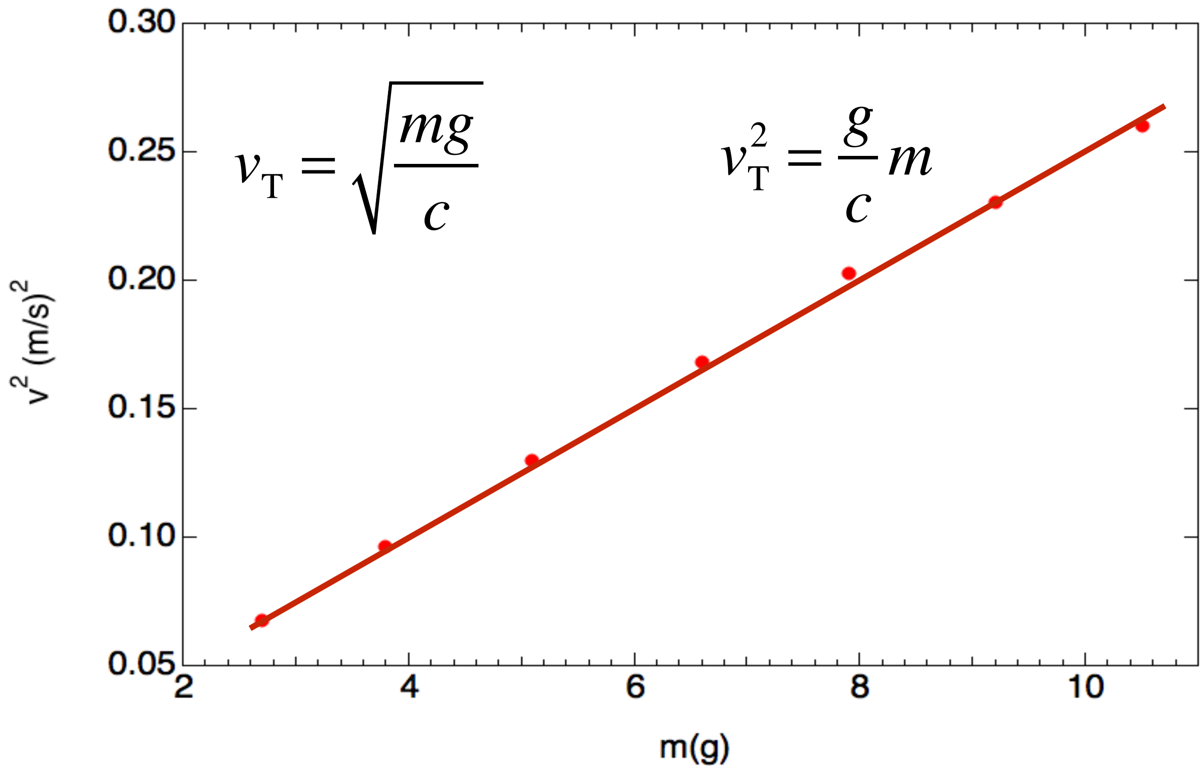
m (g)	v (m/s)
2,7	0,26
3,8	0,31
5,1	0,36
6,6	0,41
7,9	0,45

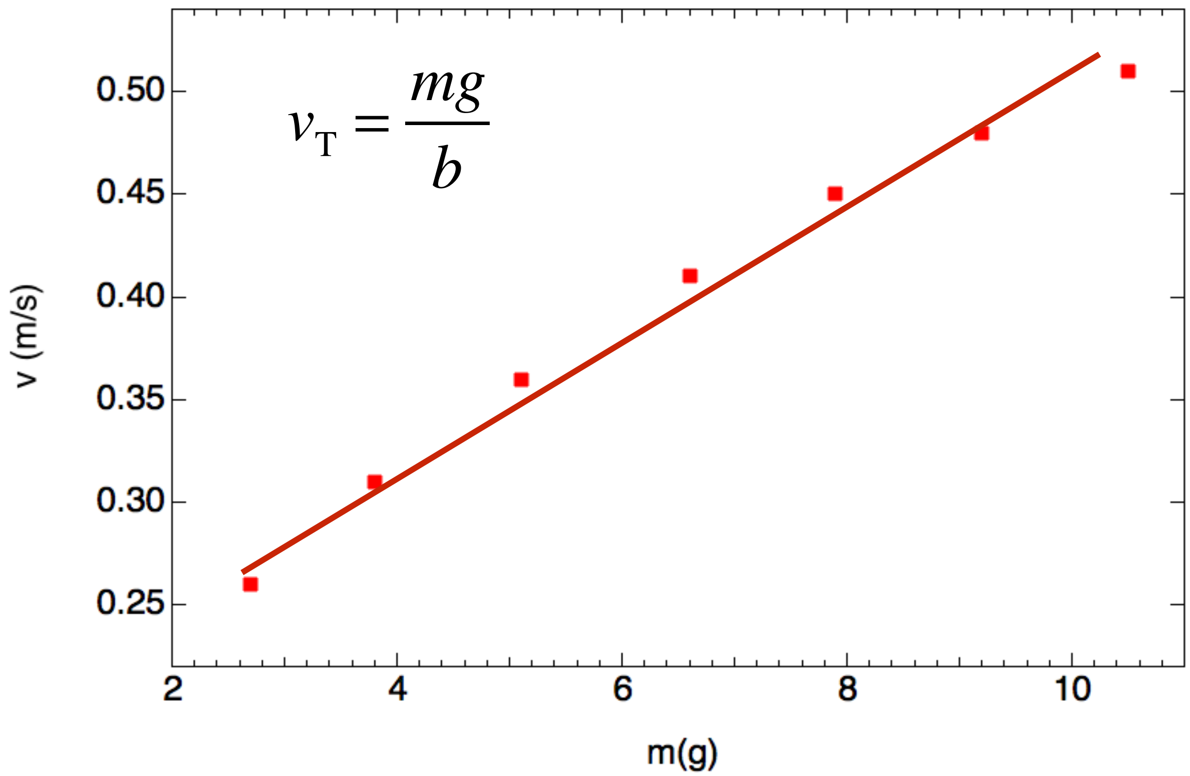
Esimerkki

Neliöidään nopeus

m (g)	v (m/s)
2,7	0,26
3,8	0,31
5,1	0,36
6,6	0,41
7,9	0,45

Sovitetaan suora ja katsotaan kumpi malli sopii paremmin.



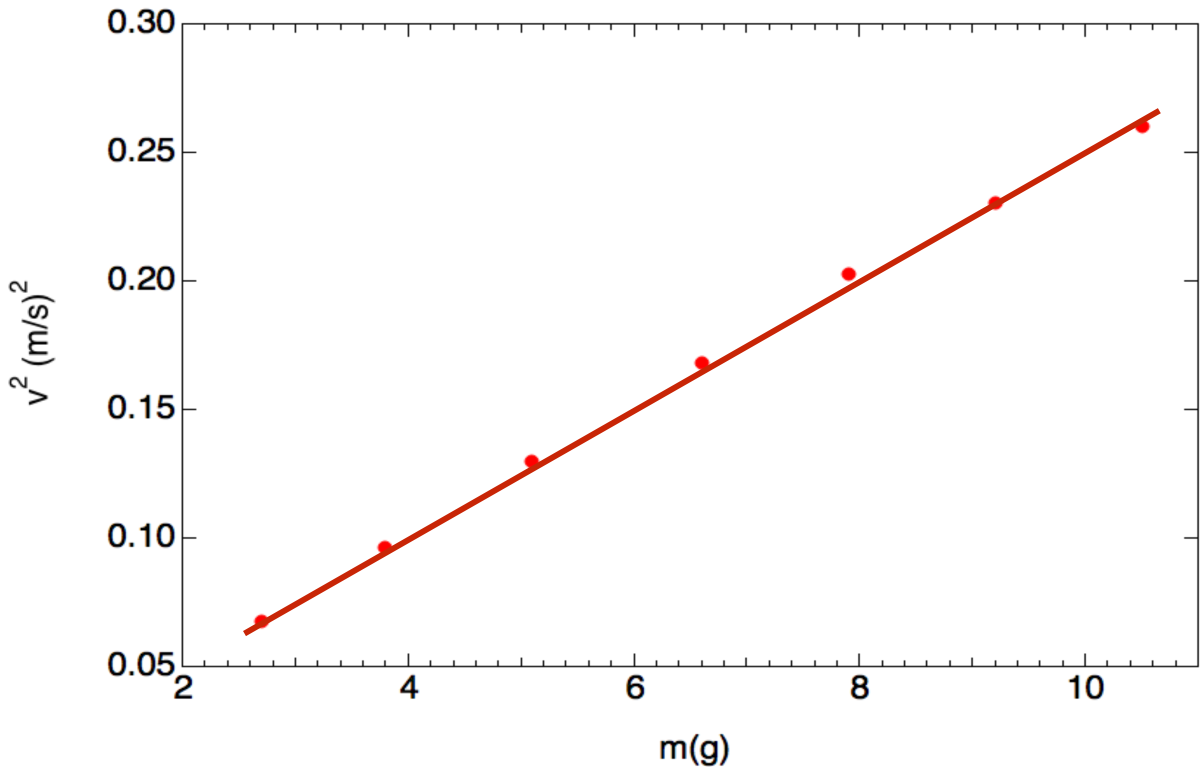


Esimerkki funktiomittauksesta

Sovitetaan suora (lineaarinen regressio)

$$y = kx + b$$

Sovitus voidaan tehdä piirtämällä, mutta tämän kurssin laboratroriotöissä suositaan pienimmän neliösumman (PNS) menetelmää



PNS löytyy esim.

- Excel (Trendline, Data analysis > Regression)
- Matlab (suora.m),
- Origin (Linear Fit)

Miksi piirtää suora ? (eikä lasketa pisteittäin)

- Suora testaa mallia
- Karkeat virheet jää huomaamatta
- Systemaattinen virhe voi vääristää tulosta

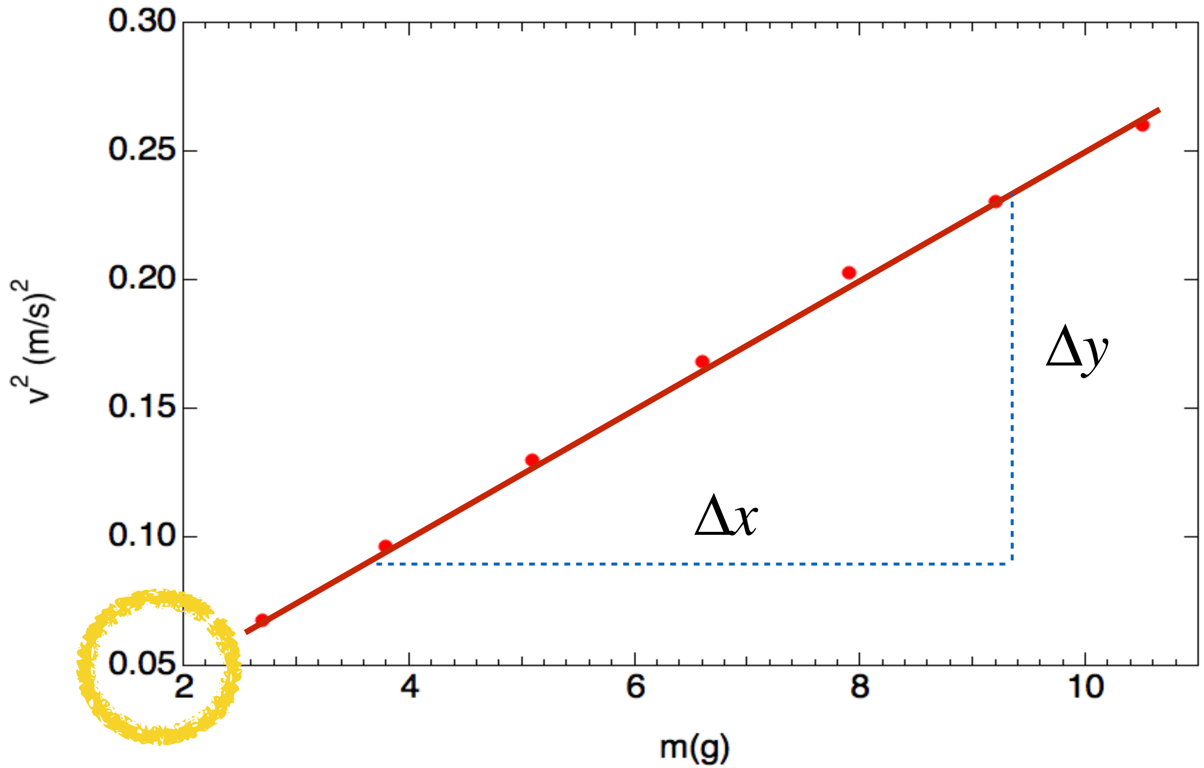
Esimerkki funktiomittauksesta

Sovitus antaa kulmakertoimen $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$k = 24{,}839 \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kgs}^2}$$

ja vakiotermin

$$b = 0{,}0023995 \ \mathrm{m/s}$$



PNS-menetelmä antaa myös virherajat, joten voidaan kirjoittaa

$$k = (24{,}839 \pm 0{,}363)\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kgs}^2}$$

$$b = (0{,}0023995 \pm 0{,}00256) \ \mathrm{m/s}$$

PNS-menetelmällä voi sovittaa myös muita funktioita

Vertailua voi tehdä myös

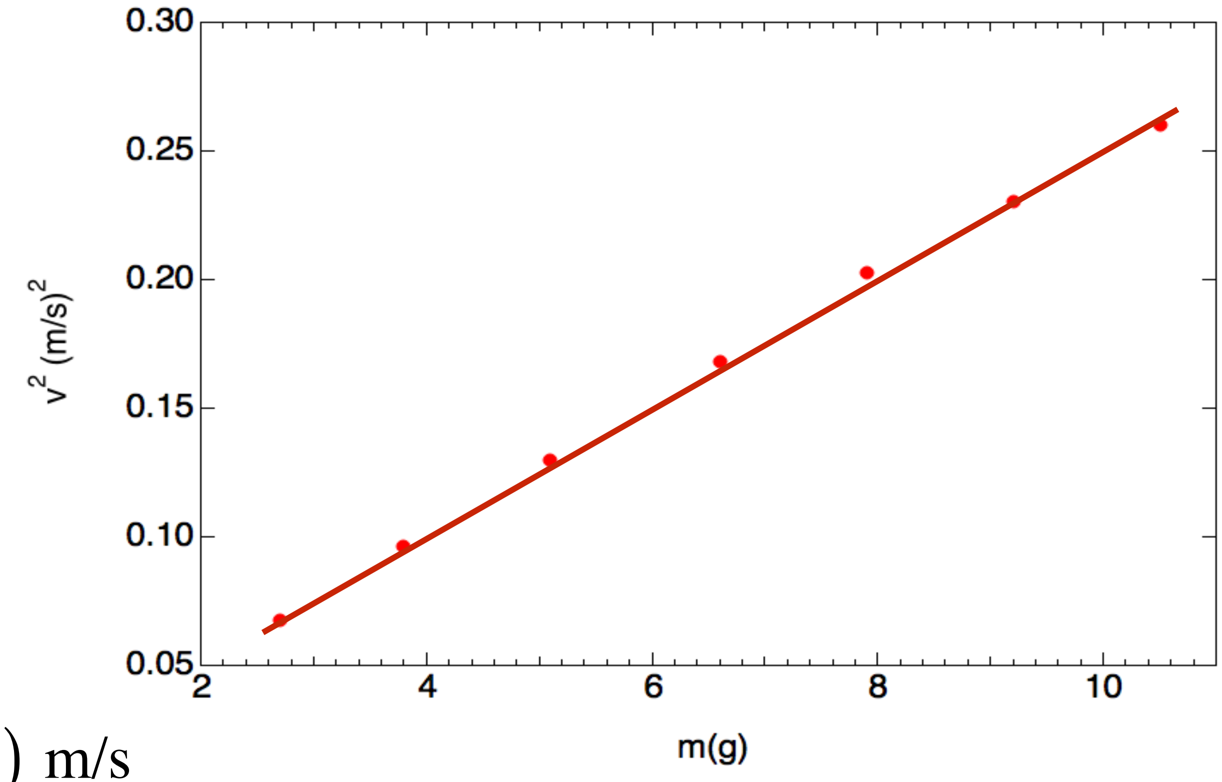
- *Sovittamalla jotain muuta funktiota kuin suoraa*
- *Laskemalla teorian mukaisen käyrän ja piirtämällä sen yhdessä mittaustulosten kanssa*

Esimerkki funktiomittauksesta

Samaistetaan teoriaan

$$\boxed{v_T^2} = \boxed{\frac{g}{c}}\boxed{m}$$

$$y = k \cdot x + \boxed{b}$$



Teorian mukaan b=0
Vakiotermi on silti hyvä olla mukana, sillä se kertoo systemaattisesta virheestä $b = (0{,}002 \pm 0{,}003)$ m/s

$$k = \frac{g}{c} \Rightarrow c = \frac{g}{k} \quad \Rightarrow c = \frac{9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}}{24{,}839\ \mathrm{m\,kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}} \approx 0{,}394943\ \mathrm{kg/m}$$

Esimerkki funktiomittauksesta

Lasketaan tuloksen virhearvio

Käytetään kokonaisdifferentiaalia, eli lasketaan funktion osittaisderivaatta (herkkyys) jokaisen muuttujan suhteen ja kerrotaan kunkin muuttujan virheellä.
Kahden muuttujan tapauksessa esim. f = f(x,y)

$$\Delta f(x,y) = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \Delta y$$

Tässä esimerkissä kyseessä on kahden muuttujan funktio

$$f = c(g,k) = \frac{g}{k}$$

Esimerkki funktiomittauksesta

Lasketaan tuloksen virhearvio

Käytetään kokonaisdifferentiaalia, eli lasketaan funktion osittaisderivaatta (herkkyys) jokaisen muuttujan suhteen ja kerrotaan kunkin muuttujan virheellä.
Kahden muuttujan tapauksessa esim. f = f(x,y)

$$\Delta f(x,y) = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \Delta y$$

Tässä esimerkissä kyseessä on kahden muuttujan funktio

$$f = c(g,k) = \frac{g}{k}$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial g}\right| \Delta g + \left|\frac{\partial c}{\partial k}\right| \Delta k$$

Esimerkki funktiomittauksesta

Lasketaan $$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial g}\right|\Delta g + \left|\frac{\partial c}{\partial k}\right|\Delta k$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{g}{k}\right)\right|\Delta g + \left|\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{g}{k}\right)\right|\Delta k$$

$$\Delta c = \left|\frac{1}{k}\right|\Delta g + \left|\frac{-1\cdot g}{k^2}\right|\Delta k$$

$$\Delta c = \frac{1}{k}\Delta g + \frac{g}{k^2}\Delta k$$

tämän voi jo laskea

$$\Delta c = \frac{g}{k}\frac{\Delta g}{g} + \frac{g}{k}\frac{\Delta k}{k}$$

$$\Delta c = \frac{g}{k}\left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta k}{k}\right) = c\left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta k}{k}\right)$$

Saadaan

$$\Delta c \approx 0{,}394943\ \mathrm{kg/m}\left(\frac{0{,}01\ \mathrm{m/s^2}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} + \frac{0{,}363\ \mathrm{kg/m}}{24{,}839\ \mathrm{kg/m}}\right) \approx 0{,}006174\ \mathrm{kg/m}$$

Huomio osittaisderivaatan laskemisesta

Kirjoitetaan suhteellisen virheen lauseke

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta k}{k}$$

Jos derivoitava lauseke sisältää vain kerto-, jako- ja potenssilaskuja, suhteellinen virhe saadaan laskettua helposti.

Esimerkiksi $f = \frac{x^2}{ab^4} y^{1/3}$

$$\frac{\Delta f}{f} = 2\frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{3}\frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta a}{a} + 4\frac{\Delta b}{b}$$

Esimerkki funktiomittauksesta

Lopputulos $c = (0{,}395 \pm 0{,}006)$ kg/m

Virhetermiin vain yksi merkitsevä numero ja lopputuloksen pyöristys sen mukaisesti

Mitä muistaa tästä kurssin laboratoriotöitä varten?

- Laadi graafiset esitykset huolella
- Funktiomittaus
  - Funktiomittaus antaa yleensä parempia tuloksia kuin toistomittaus
  - Kulmakertoimen hyödyntäminen
  - Sovittaminen
- Virhearviointi
  - Suhteellisen virheen laskeminen
  - Saatu virheen suuruusluokka määrittää lopputuloksen tarkkuuden