



Aalto-yliopisto  
Sähkötekniikan  
korkeakoulu

# ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

# Luentoviikko 1

## Kurssin esittely

Kurssin toteutus ja henkilökunta

Kurssin sisältö

## Sähkövaraus ja sähkökenttä

Oppimistavoitteet

Sähkövaraus

Johteet, eristeet ja indusoitunut varaus

Coulombin laki

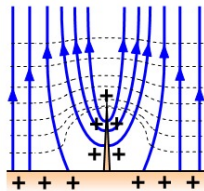
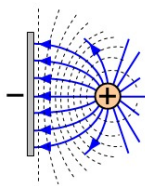
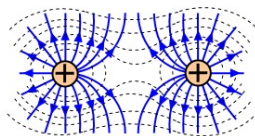
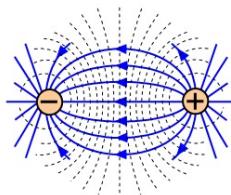
Sähkökenttä ja sähköiset voimat

Sähkökenttälaskut

Kenttäviivat

Sähködipoli

Yhteenveto



(resourcefulphysics.org)

# Kurssin toteutus

## Viikkoaikataulu (vko 9–14, 16–17, 19–21)

|       | ma | ti            | ke            | to             | pe          |
|-------|----|---------------|---------------|----------------|-------------|
| 8-10  |    | ET            |               | H1<br>TU1      | H6<br>U4/U1 |
| 10-12 |    | Luento<br>AS2 | Luento<br>TU2 | H2<br>TU1      | H7<br>U4/U1 |
| 12-14 |    |               |               | H3<br>TU1      | H8<br>U4/U1 |
| 14-16 |    |               |               | H4 + sv<br>TU7 |             |
| 16-18 |    |               |               | H5<br>TU7      |             |

sv = svenskspråkig övningsgrupp i TU6

**Mitoitus:** 5 op on nimellisesti 133 h  
 $\approx 11$  viikkoa  $\times$  12 h/vko(?)

## Kurssin suoritus

|                   |            |
|-------------------|------------|
| Esitehtävät       | 10%        |
| STACK-tehtävät    | 15%        |
| Laskuharjoitukset | 50%        |
| Esseet            | 25%        |
| <hr/> Yhteensä    | <hr/> 100% |

Kurssilla ei ole tenttiä eikä välikokeita.

Tarkemmat tiedot:

[MyCourses/Kurssin toteutus](#)

# Kurssin henkilökunta

**Luennoija** TkT Henrik Wallén, Elektroniikan ja nanotekniikan laitos, huone 2139 (Maarintie 8), henrik.wallén@aalto.fi, työpuh. 050 420 5860

**Assistentit** Roope Hurttia, Tuomas S. Laine, Mika Merano, Akseli Oinaanoja, Tuomas Pajunpää, Rasmus Siljander, Maksym Yarmoshchuk ja Onni Kosomaa (sv)

Laskuharjoitusvuorot MyCoursesissa

Yleisistä asioista kannattaa kysyä luennoilla, harjoituksissa ja [MyCoursesin keskustelupalstalla](#); yksityisemmissä kysymyksissä voi esim. lähettää sähköpostia luennoijalle.

# Esitiedot ja jatkokurssit

## Esitiedot

- ▶ Matematiikan peruskurssit (vektorit ja integraalit)
- ▶ Mekaniikka

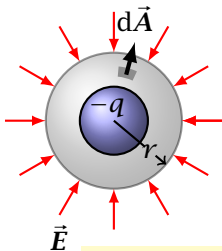
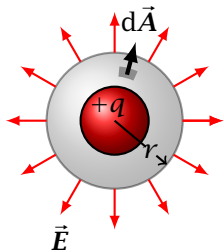
## Jatkokurssit

- ▶ ELEC-C4140 Kenttäteoria
- ▶ ELEC-C3210 Materiaalien ominaisuudet
- ▶ ELEC-C3220 Kvantti-ilmiöt
- ▶ Monella muillakin pääainekursseilla tarvitaan sähkömagnetismin ymmärrystä vaikei ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi ole muodollinen esitietokurssi.

# Sähkömagnetiikka ja kenttä

- ▶ On havaittu, että luonnossa esiintyy neljä **perusvuorovaikutusta**:
  - gravitaatiovuorovaikutus** arjesta tuttu painovoima – heikoin, mutta merkittävin voima taivaankappaleiden välillä
  - heikko vuorovaikutus** vaikuttaa atomiytimien beetahajoamisessa
  - sähkömagneettinen vuorovaikutus** merkittävin arjessa koettava vuorovaikutus: atomien ja molekyylien rakenne, kemia, kitka (välittäjähiukkanen fotoni: valo laajassa mielessä)
  - vahva vuorovaikutus** pitää atomiytimet koossa
- ▶ Sähkömagnetiikka tutkii paikoillaan olevien tai liikkuvien **varausten** synnyttämiä sähkömagneettisia kenttiä
- ▶ **Kenttä** on fysikaalisen suureen avaruudellinen jakautuma; se voi olla ajasta riippuva tai aikariippumaton

# Sähkövaraus ja sähkökenttä

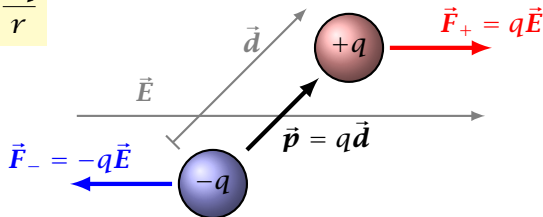


$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

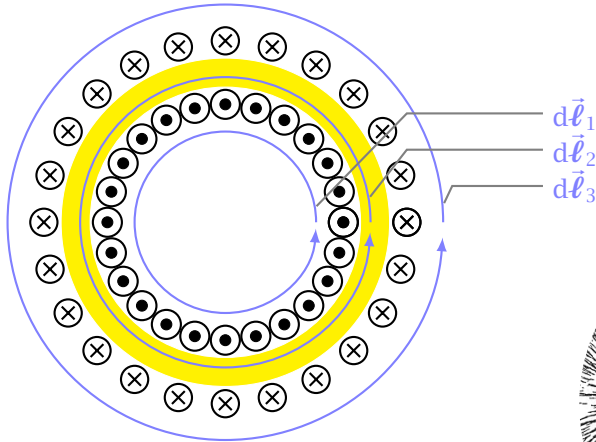
$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}$$

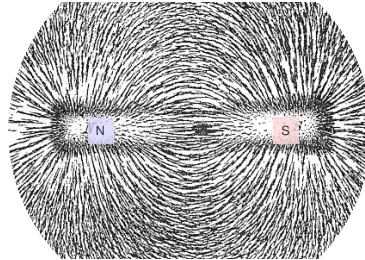


# Virta ja magneettikenttä



Ampèren laki (lävistyslaki)

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}} \Rightarrow$  magneettikenttää vain keltaisessa alueessa



$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B \cos \phi \, dA = \int B_{\perp} \, dA$$



# Sähkömagneettinen induktio ja sähkömotorinen voima

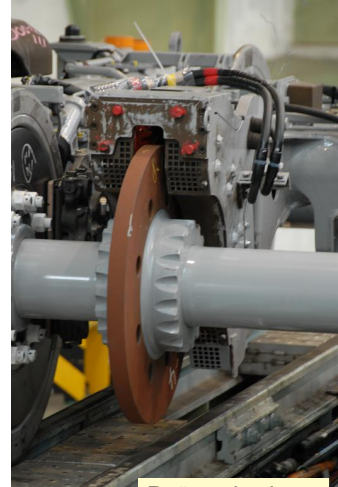
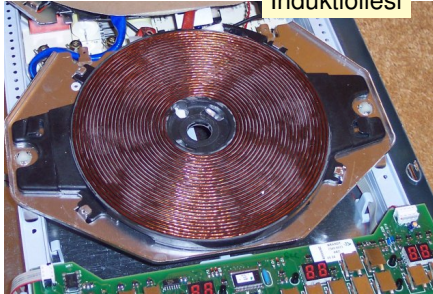
Metallinpaljastin



Metallinpaljastimen, induktiolieden ja pyörrevirtajarrun toiminta perustuu muuttuvan magneettikentän indusoimiin pyörrevirtoihin

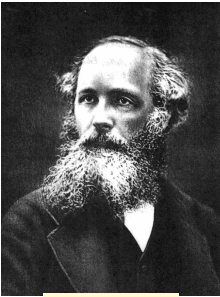
Faradayn laki 
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Induktioliesi



Pyörrevirtajarru

# Sähkömagneettiset aallot



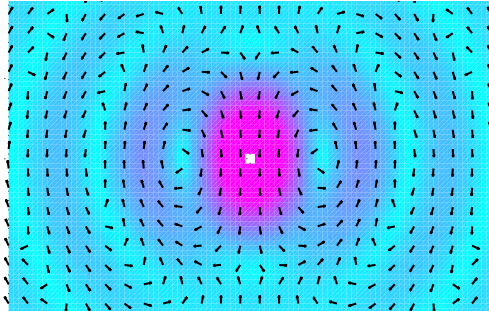
James Clerk Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} \quad (\text{Gaussin laki})$$

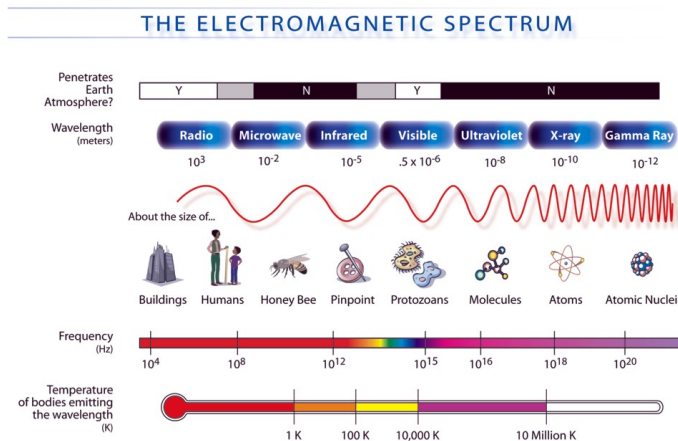
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Gaussin laki magnetismille})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left( I_{\text{encl}} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (\text{Ampèren laki})$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayn laki})$$



# Sähkömagneettinen spektri



Lähde: <https://mysasdata.larc.nasa.gov/science-processes/electromagnetic-diagram/>

# Luentoviikot

1. Sähkövaraus ja sähkökenttä (YF 21)
2. Gaussin laki (YF 22)
3. Sähköpotentiaali (YF 23)
4. Kapasitanssi ja eristeet (YF 24); virta, resistanssi ja sähkömotorinen voima (YF 25)
5. Magneettikenttä ja magneettiset voimat (YF 27)
6. Magneettikentän lähteet (YF 28)  
(Koeviikko)
7. Sähkömagneettinen induktio (YF 29) ja induktanssi (YF 30)
8. Sähkömagneettiset aallot (YF 32)
9. Valon luonne ja eteneminen (YF 33)  
(Wappuviikko)
10. Geometrinen optiikka (YF 34)
11. Interferenssi (YF 35) ja diffraktio (YF 36)

# Sähkövaraus ja sähkökenttä (YF 21)

# Tavoitteena on oppia

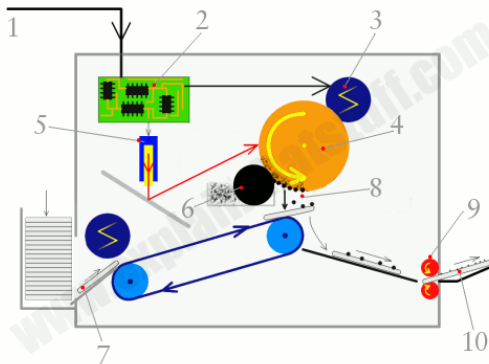
- ▶ sähkövarauksen luonne ja varauksen säilyminen
- ▶ miten kappaleet tulevat sähköisesti varatuiksi
- ▶ miten Coulombin lakia käytetään sähkövarausten välisten voimien laskemiseen
- ▶ sähköisen voiman ja sähkökentän ero
- ▶ varausjoukon synnyttämän sähkökentän laskeminen
- ▶ miten sähkökentän kenttäviivojen ideaa käytetään sähkökenttien kuvaamiseen ja tulkitsemiseen
- ▶ laskemaan sähködipoleiden ominaisuuksia

# Negatiivinen ja positiivinen sähkövaraus

- ▶ Aloitetaan **sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen** tutustuminen tutkimalla meihin nähden liikkumattomien varausten välistä **sähköstaattista voimaa**
- ▶ Antiikin kreikkalaiset havaitsivat jopa 600 vuotta eaa., että villalla hangattu meripihka vetää esineitä puoleensa (kreikan sana **elektron** tarkoittaa meripihkaa [engl. amber])
- ▶ Jos muovitankoja hangataan turkispalalla, tangot alkavat hylkiä toisiaan
- ▶ Jos lasitankoja hangataan silkkikankaalla, tangot alkavat hylkiä toisiaan
- ▶ Hangattu muovitanko vetää hangattua lasitankoa puoleensa
- ▶ Hankausmateriaali vetää puoleensa tankoa, jota sillä on hangattu
- ▶ Benjamin Franklinin perintönä sanomme, että muovitanko varautuu **negatiivisesti** ja lasitanko **positiivisesti** [merkit tavallaan väärin valittu. . .]
- ▶ Havaitsemme, että **samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan** ja **vastakkaismerkkiset vetävät toisiaan puoleensa**

# Sähköstatiikan sovellus: lasertulostin

1. Kuvadata siirtyy tietokoneesta
2. Ohjauspiiri määrittää, miten data pitää esittää paperilla
3. Ohjauspiiri aktivoi koronalangan, joka . . .
4. . . varaa valoherkän rumpun pinnan tasaisesti positiivisella varauksella
5. Ohjauspiiri liikuttaa peiliä, josta heijastuva lasersäde vaihtaa osumiskohdistaan rummulla varauksen negatiiviseksi
6. Rumpua koskettava mustetela peittää rumpun negatiiviset alueet positiivisesti varatuilla mustehiukkasilla; muste peittää nyt oikeat kohdat rummulla
7. Toinen koronalanka varaa paperilokerosta tulevan arkin vahvasti negatiiviseksi
8. Kun paperi tulee rumpun lähelle, positiivisesti varattu muste siirtyy negatiivisesti varatulle paperille; haluttu kuva on keveästi paperissa kiinni
9. Musteinen paperi kulkee kahden kuumen telan välistä (sulatusyksikkö): muste puristuu ja sulaa paperin kuituihin kiinni pysyvästi
10. Vielä lämmin tuloste poistuu kirjoittimesta





# Aineen rakenne

- ▶ ”Tavallinen” aine koostuu atomeista ja molekyyleistä
- ▶ Aineen rakenne ja ominaisuudet ovat pääsääntöisesti seurausta sähköisistä vuorovaikutuksista
- ▶ Atomit koostuvat keveistä negatiivisista elektroneista ja raskaammista positiivisista protoneista sekä sähköisesti neutraaleista neutroneista
- ▶ Protonit ja neutronit muodostavat tiiviin ytimen (jota vahva vuorovaikutus pitää koossa)
  - ▶ Halkaisija luokkaa  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
- ▶ Ydintä ympäröi elektronipilvi (joka pysyy atomissa kiinni sähköisen vetovoiman ansiosta)
  - ▶ Ulottuu noin  $100 \text{ pm} = 10^{-10} \text{ m}$ :n päähän ytimestä
- ▶ Protonin tai neutronin massa on noin 2000 kertaa elektronin massa (gravitaation vaikutus ei silti atomin rakenteessa näy – miksi?)

# Varauksen säilyminen

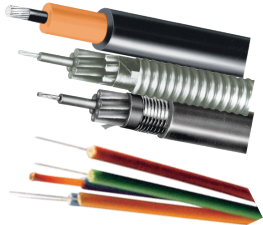
- ▶ Neutraalissa atomissa on yhtä paljon elektroneja ja protoneja
  - ▶ koska elektronin ja protonin varaukset ovat yhtäsuuret mutta vastakkaismerkkiset, neutraalissa atomissa nettovaraus on nolla
- ▶ Protonien lukumäärä ilmaisee alkuaineen järjestysluvun (atomiluvun, engl. atomic number)
  - ▶ Jos poistetaan yksi tai useampi elektroni, saadaan positiivinen ioni [ioni]
  - ▶ Negatiivisella ionilla taas on ylimääräisiä elektroneja
  - ▶ Nettovarauksen määrä on hyvin pieni ( $\sim 10^{-12}$ ) osa varatun kappaleen kokonaisvarauksesta
- ▶ Varauksen säilymlaki (rikkumaton havainto):

*Sähkövarausten summa suljetussa järjestelmässä on vakio.*

- ▶ Sähkövaraus on kvantittunut: havaittava varausmäärä on elektronin (tai protonin) varauksen monikerta (paitsi kvarkeilla, mutta...)
  - = elektronin tai protonin varauksen suuruus on luontainen varauksen yksikkö, alkeisvaraus

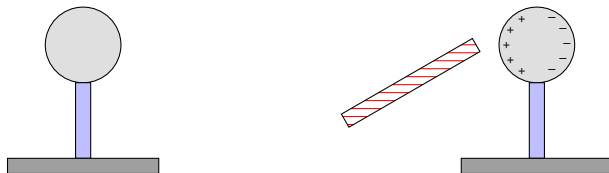
# Johteet ja eristeet

- Johde** Atomien uloimmat elektronit liikkuvat helposti paikasta toiseen materiaalissa (esim. kuparilanka). Tyypillisesti metallit ovat hyviä johteita. Siirtävät varausta paikasta toiseen.
- Eriste** Aineessa ei ole lainkaan tai on niukasti vapaita elektroneja, jotka voisivat liikkua. Esimerkiksi posliini, muovit, lasi.
- Puolijohde** Johteen ja eristeen välimuoto. Esimerkiksi galliumarsenidi (yhdiste) ja pii. Aineen **seostamisella** voi vaikuttaa sen sähköisiin ominaisuuksiin.



# Sähköstaattinen induktio

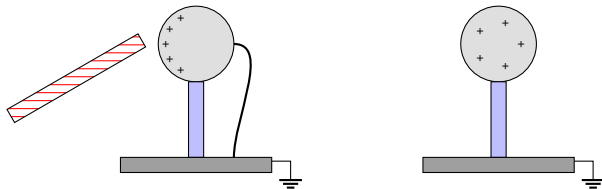
- ▶ Varauksia voi siirtää koskettamalla kappaletta varatulla esineellä (esim. koskettamalla metallipalloa varatulla muovisauvalla)
- ▶ Entä jos tuodaan **negatiivisesti** varattu sauva johtavan (ja "irrationaalisen") metallipallon lähelle **koskettamatta sitä**?
  - ▶ Samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan
  - ⇒ pallon vapaita elektroneita siirtyy toiselle puolelle
  - ⇒ sauvan puolelle jää positiivinen nettovaraus
  - = **sähköstaattinen induktio** tai **varaaminen induktion avulla**



Sähkömagneettinen induktio on eri ilmiö, johon palataan luentoviikolla 7.

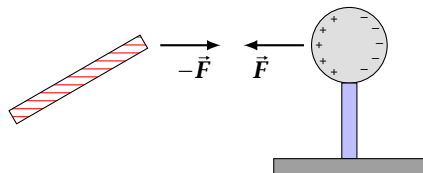
## Sähköstaattinen induktio (jatkoa)

- ▶ Metallipallon vapaat elektronit siirtyvät, kunnes syntyy tasapaino
  - = pallon elektroneihin sauvan varauksesta aiheutuva voima on yhtä suuri kuin indusoituneiden varausten elektroneihin aiheuttama voima
- ▶ **Maadoitetaan** pallon oikea puoli
  - ⇒ elektronit siirtyvät pois (maa on "loputon" varausvarasto)
- ▶ Maadoituksen ja sauvan poiston jälkeen palloon **jää positiivinen nettovaraus**



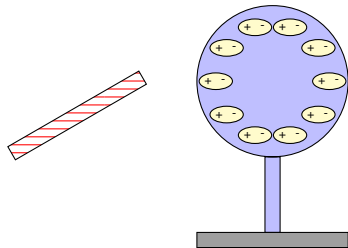
## Varauksien aiheuttama voima

- ▶ Varattu kappale aiheuttaa voiman neutraaliin kappaleeseen
- ▶ Esim. metallipallo ja negatiivisesti varattu sauva
- ▶ Pallon positiiviset varaukset lähempänä sauvaa kuin negatiiviset  
⇒ sauva vetää palloa puoleensa



# Polarisaatio

- ▶ Varattu kappale siirtää hieman neutraalin eristeenkin varauksia  
= polarisaatio  $\Rightarrow$  vetovoima
- ▶ Vetovoima on sama riippumatta varatun kappaleen varauksen merkistä



# Coulombin laki

- ▶ Charles Augustin de Coulomb 1784–5:

Kahden pistemäisen varauksen välinen voima on verrannollinen varausten suuruksien tuloon ja kääntäen verrannollinen varausten etäisyyden neliöön.

- ▶ Aikaisemmin oli havaittu, että samanmerkkisten varausten välillä on hylkimisvoima ja erimerkkisten varausten välillä vetovoima
- ▶ Jos pistevaraukset  $q_1$  ja  $q_2$  ovat etäisyydellä  $r$  toisistaan, niihin vaikuttavan voiman suuruus

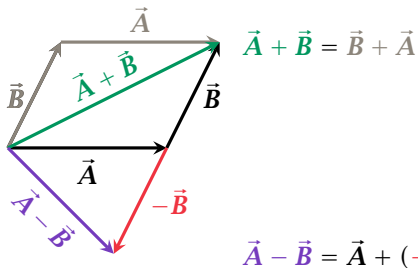
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

- ▶ verrannollisuuskerroin  $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$  on **tyhjiön permittiivisyys** (ilma käy yleensä tyhjiöstä);  $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9.0 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$
- ▶  $q_{1,2} = n_{1,2}e$ , missä alkeisvaraus  $e \approx 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$  (yleensä  $n_{1,2} \gg 1$ )
- ▶ Coulombin voimalle pätee **superpositioperiaate** eli voimien **vektorisummaus** ja **Newtonin III laki**



# Vektorisummaus [kertaus]

Muista, että vektorilla on aina suuruus ja suunta.



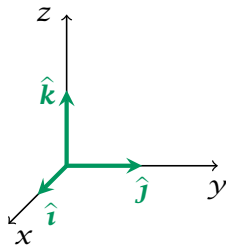
Komponenttimuodossa:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

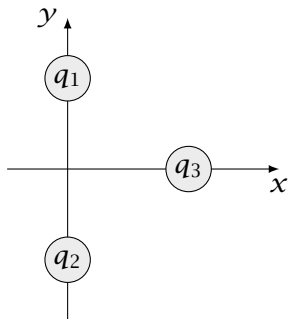
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$$

Tällä kurssilla karteesisen eli tavallisen  $(x, y, z)$ -koordinaatiston **kantavektorit** ovat  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .



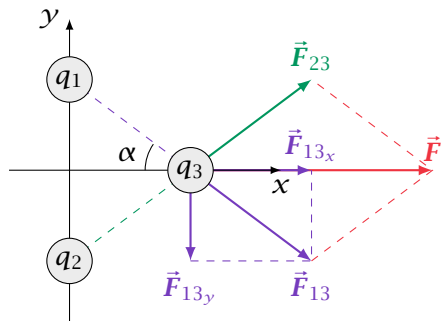
## Esimerkki

Kaksi pistevarausta on  $y$ -akselilla:  $q_1 = 2.0 \mu\text{C}$  kohdassa  $y_1 = 0.30 \text{ m}$  ja  $q_2 = 2.0 \mu\text{C}$  kohdassa  $y_2 = -0.30 \text{ m}$ . Laske voima, jonka varaukset aiheuttavat varaukseen  $q_3 = 4.0 \mu\text{C}$ , kun  $x_3 = 0.40 \text{ m}$ .



# Ratkaisu

Kaksi pistevarausta on  $y$ -akselilla:  $q_1 = 2.0 \mu\text{C}$  kohdassa  $y_1 = 0.30 \text{ m}$  ja  $q_2 = 2.0 \mu\text{C}$  kohdassa  $y_2 = -0.30 \text{ m}$ . Laske voima, jonka varaukset aiheuttavat varaukseen  $q_3 = 4.0 \mu\text{C}$ , kun  $x_3 = 0.40 \text{ m}$ .



Voima  $q_1$  kohdistaa  $q_3$

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} = F_{13} \hat{r}_{13} = 0.29 \text{ N} \hat{r}_{13}$$

Komponentit

$$\vec{F}_{13x} = F_{13} \cos(\alpha) \hat{i} = 0.23 \text{ N} \hat{i}$$

$$\vec{F}_{13y} = -F_{13} \sin(\alpha) \hat{j} = -0.17 \text{ N} \hat{j}$$

Symmetrian takia

$$\vec{F}_{23,y} = 0.17 \text{ N} \hat{j}, \quad \vec{F}_{23,x} = 0.23 \text{ N} \hat{i}$$

Kokonaisvoima

$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 2 \cdot 0.23 \text{ N} \hat{i} = 0.46 \text{ N} \hat{i}$$

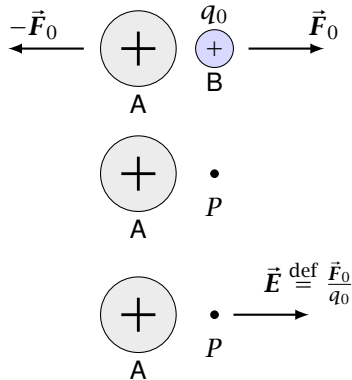
# Sähkökenttä

## Coulombin lain tulkintaa

Varaus A aiheuttaa voiman  $\vec{F}_0$  pistevaraukseen B

Kun B poistetaan, voidaan ajatella että varaus A tuottaa **sähkökentän**  $\vec{E}$  pisteeseen P (varauksen B paikalle)

Jos nyt sijoitetaan pistemäinen testivaraus  $q_0$  pisteeseen P, aiheuttaa sähkökenttä  $\vec{E}$  varaukseen voiman, joka on verrannollinen kenttään ja varaukseen:  $\vec{F} = q_0 \vec{E} = \vec{F}_0$



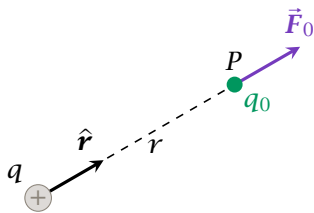
## Sähkökenttä (jatkoa)

- ▶ Varausten välinen vuorovaikutus (= voima) on todellinen – sähkökenttä on **matemaattinen apuneuvo**
- ▶ Varattuun kappaleeseen kohdistuvan sähköisen voiman tuottaa **muiden** varattujen kappaleiden synnyttämä **sähkökenttä**
- ▶ Sähkökenttä  $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \text{testivaruksen } q_0 \text{ kokema sähköinen voima } \vec{F}_0$  (jonka järjestelmän muut varaukset testivaraukseen kohdistavat) normalisoituna testivaruksella

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}} \quad [E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

- ▶ Sähkökenttä **ei riipu** voimaa kokevasta varauksesta!
- ▶ Jos pisteessä  $P$  on sähkökenttä  $\vec{E}$ , pisteeseen tuotu **pistevaraus**  $q_0$  kokee voiman  $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$

# Pistevarauksen sähkökenttä

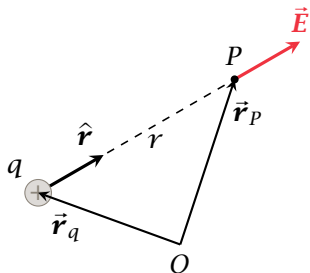


Testivaraus  $q_0$  pisteessä  $P$  kokee Coulombin lain mukaan sähköisen voiman

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

joten pistevarauksen  $q$  sähkökenttä  $\vec{E}$  pisteessä  $P$  on

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



missä  $r$  on kenttäpisteen etäisyys pistevarauksesta ja  $\hat{r}$  on yksikkövektori, joka osoittaa varauksesta kohti kenttäpistettä. Esim. kuvan paikkavektorien avulla

$$r = |\vec{r}_P - \vec{r}_q|, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|}$$

# Pistejoukon sähkökenttä

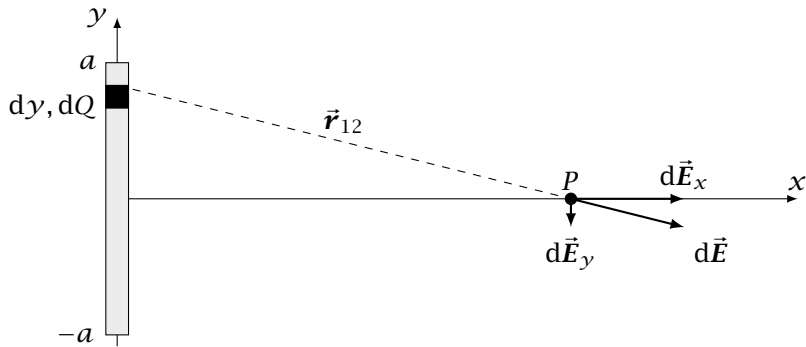
- ▶ Edellä laskettiin yksittäisen pistevarauksen aiheuttamaa kenttää
- ▶ Useamman varauksen aiheuttama kokonaisvoima  $\vec{F}_0$  on vektorisumma yksittäisten varausparien Coulombin voimista  $\vec{F}_i$
- ▶ Varausjakauman kenttä lasketaan olettamalla tai jakamalla varausjoukko pistelähteiksi
- ▶ Kokonaissähkökenttä  $\vec{E}_0$  lasketaan yksittäisten varausten kenttien  $\vec{E}_i$  vektorisummasta

$$\vec{F}_0 = \sum_i \vec{F}_i = q_0 \sum_i \vec{E}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0 = \sum_i \vec{E}_i$$

- ▶ Jatkuvia varausjakautumia:
  - ▶ Viivavaraustiheys  $\lambda$  [C/m]
  - ▶ Pintavaraustiheys  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>]
  - ▶ Tilavuusvaraustiheys  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>]

# Esimerkki

Viivavarauksen kenttä pisteessä  $P$  etäisyydellä  $x$  origosta



- ▶ Jaetaan tasainen viivavaraus  $\lambda = Q/(2a)$  paloihin  $dQ = \lambda dy = \frac{Q}{2a} dy$
- ▶ Pisteen  $P$  etäisyys palasesta on  $r_{12} = \sqrt{x^2 + y^2}$



# Ratkaisu

Viivavarauksen kenttä pisteessä  $P$  etäisyydellä  $x$  origosta

- ▶ Kentän voimakkuus (pistelähde)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{12}^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dy}{2a(x^2 + y^2)}$$

- ▶ Sähkökentän **komponentit** (trigonometrialla tai yhdenmuotoisilla kolmioilla)

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad dE_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

- ▶ Integroidaan sauvan yli

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^a \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \dots = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^a \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{symmetrian vuoksi}$$

## Viivavarauksen kenttä

- ▶ Vektorimuodossa (huomaa suuntien määrittely)

$$\vec{E} = E_x \hat{i} - E_y \hat{j} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \hat{i}$$

- ▶ Jos  $x \gg a$ ,  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{i}$  (kuten pistevarauksella)

- ▶ Jos  $Q = 2a\lambda$ ,  $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \hat{i}$

- ▶ Ääretön lanka (tärkeä lähdeprototyyppi)

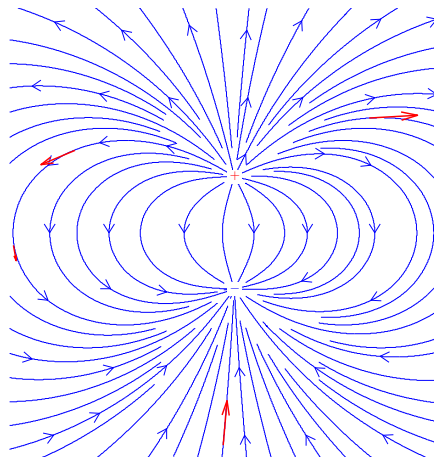
$$a \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \hat{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}},$$

missä  $r$  on etäisyys langasta ja yksikkövektori  $\hat{r}$  osoittaa langasta poispäin

# Sähkökentän kenttäviivat

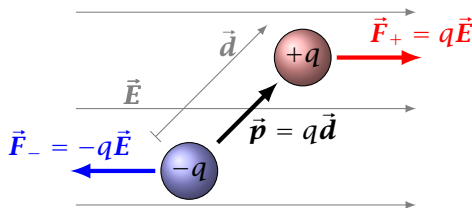
- ▶ Sähkökenttää ei voi "nähdä"
- ▶ Kenttää voi havainnollistaa piirtämällä **kenttävektoreita** (punaiset) tai **kenttäviivoja** (virtausviivoja, siniset)
- ▶ **Kenttäviivan tangenti** osoittaa sähkökenttävektorin suuntaan joka pisteessä ja **kenttäviivojen tiheys** on verrannollinen kentän voimakkuuteen
- ▶ Kenttäviivat ovat **yksikäsitteisiä**: eivät leikkaa toisiaan
- ▶ Kenttäviiva **ei ole** vakiokenttäkäyrä **eikä** kuvaa kenttään päästetyn varauksen liikerataa!

(Katso myös kuva sivulla 2.)



# Sähködipoli

- ▶ Sähködipolissa on kaksi yhtäsuurta mutta vastakkaismerkkistä pistevarausta ( $+q$  ja  $-q$ ) etäisyydellä  $d$  toisistaan
- ▶ Tulo  $qd = p$  on **dipolimomentti**; dipolimomenttivektori  $\vec{p}$  osoittaa [määritelmän mukaan] **negatiivisesta varauksesta positiiviseen päin**
- ▶ Dipoleilla voi mallintaa aineiden sähköistä vastetta
- ▶ Esim. vedellä on pysyvä dipolimomentti ( $p_{\text{H}_2\text{O}} \approx 6.13 \times 10^{-30} \text{ C m}$ )  $\Rightarrow$  hyvä liuotin  $\Rightarrow$  vesiliuosten kemia mahdollinen (**elämä**)
- ▶ Jos dipoli asetetaan tasaiseen **ulkoiseen sähkökenttään**  $\vec{E}$ , sähködipoliin kohdistuu voima  $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \vec{0}$  (ei nettovoimaa)



## Sähködipoliin kohdistuva vääntömomentti

- ▶ Voimapari  $\vec{F}_{\pm}$  ei vaikuta samaa suoraa pitkin, joten dipoliin kohdistuu **vääntömomentti**
- ▶ Kummankin voiman varsi on  $(d/2) \sin \phi$ , jos  $\phi$  on sähkökenttävektorin ja dipolimomenttivektorin välinen kulma ( $\phi = 0 \Rightarrow$  vektorit samansuuntaiset)
- ▶ Kummankin voiman vääntömomentti dipolin keskikohtaan suhteen on

$$\vec{\tau}_{\pm} = \vec{r} \times \vec{F}_{\pm} = (\pm \vec{d}/2) \times (\pm q \vec{E}) = \frac{1}{2} \vec{p} \times \vec{E},$$

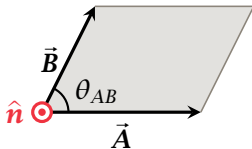
joten kokonaisvääntömomentti  $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{+} + \vec{\tau}_{-}$  on

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \tau = pE \sin \phi$$

- ▶ Momentti pyrkii aina kääntämään dipolin sähkökentän suuntaiseksi

## Ristitulo (= vektoritulo = ulkotulo) [kertaus]

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n} AB \sin \theta_{AB} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



missä  $|\vec{A} \times \vec{B}| = A(B \sin \theta_{AB})$  on harmaan suunnikkaan pinta-ala ja  $\hat{n}$  on suunnikkaan normaalivektori oikean käden säännön mukaisesti (tässä kohti katsojaa)

Komponenttimuodossa

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

## Sähködipolin potentiaalienergia

- ▶ Sähkökenttä tekee työn  $dW$ , kun dipoli kääntyy kulman  $d\phi$ :

$$dW = \tau d\phi = -pE \sin \phi d\phi$$

(miinusmerkki: kenttä kääntää dipolia **pienenevän** kulman  $\phi$  suuntaan)

- ▶ Kokonaistyö

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \sin \phi) d\phi = pE \cos \phi_2 - pE \cos \phi_1$$

- ▶ Työ on potentiaalienergian negatiivinen muutos:  $W = U_1 - U_2$ ; **valitaan** sähködipolin potentiaalienergiaksi  $U(\phi) = -pE \cos \phi$  ja tunnistetaan lausekkeessa pistetulo

$$\Rightarrow \boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

- ▶ Esim. ruohonsiemenet ulkoisessa sähkökentässä polarisoituvat (saavat dipolimomentin) ja asettuvat pitkin kenttäviivoja (minimipotentiaalienergian asentoon)

## Pistetulo (= skalaaritulo = sisätulo) [kertaus]

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta_{AB}} \quad \begin{array}{c} \vec{B} \\ \nearrow \\ \theta_{AB} \\ \vec{A} \end{array} \quad (0 \leq \theta_{AB} \leq \pi)$$

Komponenttimuodossa

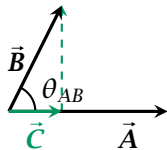
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Vektorin pituus (= suuruus = itseisarvo) ja yksikkövektori

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vektorin  $\vec{B}$  komponentti vektorin  $\vec{A}$  suunnassa

$$\vec{C} = \hat{A} (B \cos \theta_{AB}) = \hat{A} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A} = \hat{A} (\hat{A} \cdot \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \vec{A}$$



(Muualla käytetään usein merkintää  $\vec{B}_A$  tälle ns. projektiovektorille.)



# Kolmitulot [kertaus]

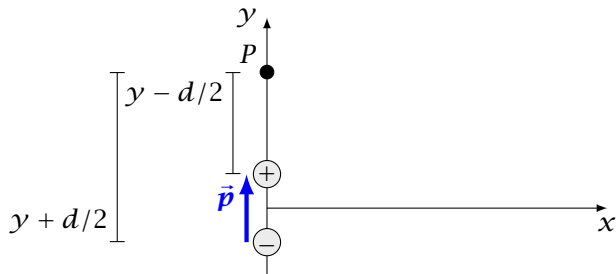
**Skalaarikolmitulo**, eli vektorien  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  virittämän suuntaissärmiön suunnistettu tilavuus

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

**Vektorikolmitulo**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (\text{"bac-cab" sääntö})$$

## Sähködipolin kenttä $y$ -akselilla pisteessä $P$



Sähkökenttä  $P$ :ssä on  $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$ , nyt  $E_x = E_z = 0$  (miksi?):

$$\begin{aligned}
 E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(y - d/2)^2} - \frac{1}{(y + d/2)^2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[ \left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \right]
 \end{aligned}$$

## Sähködipolin kenttä $y$ -akselilla pisteessä $P$ (jatkoa)

- ▶ Jos  $y \gg d$ , voidaan approksimoida

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2} + \dots$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \approx 1 + \frac{d}{y} \quad \text{ja} \quad \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{d}{y}$$

$$\Rightarrow E_y \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[ \left(1 + \frac{d}{y}\right) - \left(1 - \frac{d}{y}\right) \right] = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 y^3}$$

- ▶ Siis  $E_y \propto 1/y^3$ , ja yleisesti etäisyydellä  $r$  kaukana dipolista  $E \propto 1/r^3$
- ▶ Vertaa: pistevarauksen  $E \propto 1/r^2$

# Yhteenvedo luvusta 21

## Keskeisiä käsitteitä

- ▶ (sähkö)varaus [esim. pistevaraus  $q$ ]
- ▶ varauksen säilymlaki
- ▶ johde ja eriste
- ▶ sähköinen voima  $\vec{F}$  ja sähkökenttä  $\vec{E}$
- ▶ superpositioperiaate
- ▶ sähködipoli ja dipolimomentti  $p$

## Tärkeitä kaavoja

Coulombin laki (muista myös voiman suunta)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

Pistevarauksen sähkökenttä ja sähköinen voima

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad \vec{F}_0 = q_0\vec{E}$$

Sähködipolille

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$