Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

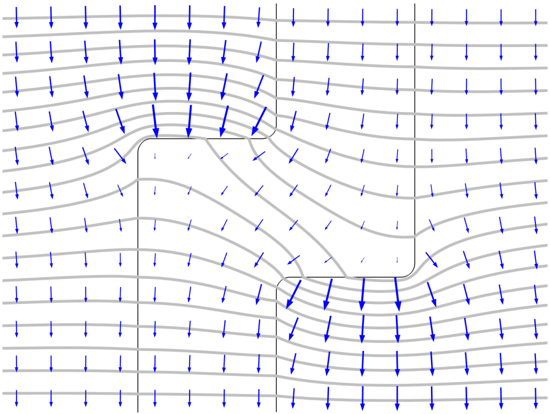
Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 3

Sähköpotentiaali (YF 23)

- Oppimistavoitteet
- Sähköinen potentiaalienergia
- Sähköpotentiaali
- Sähköpotentiaalin määrittäminen
- Tasapotentiaalipinnat
- Potentiaaligradientti
- Yhteenveto



Tavoitteena on oppia

- miten lasketaan varausjoukon sähköinen potentiaalienergia
- mitä sähköpotentiaali tarkoittaa ja mikä on sen merkitys
- miten varauskokoelman johonkin avaruuden pisteeseen tuottama potentiaali lasketaan
- miten tasapotentiaalipintoja käytetään potentiaalin havainnollistamiseen
- miten sähköpotentiaalia käytetään sähkökentän laskemiseen

Käsitteitä

Sähkökenttä kohdistaa voiman varattuun hiukkaseen & hiukkanen liikkuu sähkökentässä
$\Longrightarrow$ voima tekee työtä hiukkaselle.

- Varauksen **sähköinen potentiaalienergia** riippuu varauksen paikasta ulkoisessa sähkökentässä (vrt. massa gravitaatiokentässä).
- Pisteen **sähköpotentiaali** (eli potentiaali) on (testivarauksen) sähköinen potentiaalienergia varausyksikköä kohden.
- **Jännite** on kahden pisteen välinen sähköpotentiaaliero.

Mekaniikkaa

Jos voima siirtää kappaleen pisteiden välillä $a \to b$, voiman tekemä työ on viivaintegraali voimasta ja siirtymästä:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

Konservatiivisen voiman tekemän työn voi ilmaista potentiaalienergian U avulla:

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

Huom:

- Jotta kappale siirtyisi hitaasti tarvitaan ulkoinen vastavoima.
- Jos konservatiivinen voima tekee postitiivista työtä, potentiaalienergia pienenee.
- Jos ulkoinen voima tekee positiivista työtä konservatiivista voimaa vastaan, potentiaalienergia kasvaa.

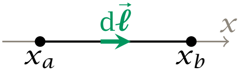
Tällä luennolla tarkastellaan pääosin konservatiivisen voiman tekemää työtä (eli sähköisen voiman tai sähkökentän tekemää työtä).

Viivaintegraali

$$\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = ?$$

Differentiaalinen tiealkio $\mathrm{d}\vec{\ell}$ on vektori, joka osoittaa integrointitien tangentin suuntaan ja $\vec{F}$ on vektorikenttä.

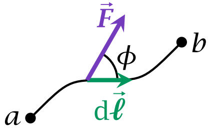
Esim: Integrointitie x-akselia pitkin



$$\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \cdot \hat{\imath}\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} F_x \mathrm{d}x$$

(Entä jos $x_a > x_b$ tai $y =$ vakio $\neq 0$?)

Yleinen tapaus:

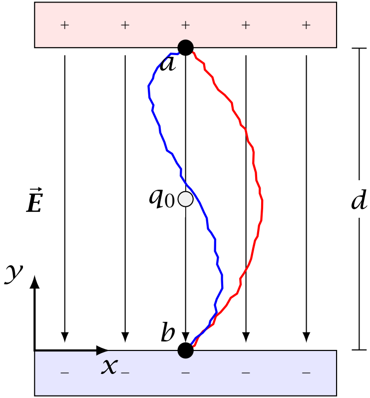


$$\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_a^b F \cos\phi \,\mathrm{d}\ell$$

Sähköinen potentiaalienergia tasaisessa kentässä

- Positiivinen varaus q_0 varattujen johdelevyjen välissä
- Sähkökenttä $\vec{E}$ on homogeeninen
- Sähkövoima $\vec{F} = q_0\vec{E}$, voimalla on vain y-komponentti: $\vec{F} = -\hat{\jmath} q_0 E$
- Sähkökentän varaukselle tekemä työ on (huomaa: $\mathrm{d}\vec{\ell} = +\hat{\jmath}\,\mathrm{d}y$)

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -q_0E(b-a) = q_0Ed$$



- Työ ei riipu polusta $\implies$ sähkövoima on konservatiivinen $\implies$ potentiaalienergia $U = q_0Ey$ ja työ $W_{a\to b} = -\Delta U = q_0Ed$
- U pienenee, kun varaus liikkuu voiman $\vec{F} = q_0\vec{E}$ suuntaan

Kahden pistevarauksen sähköinen potentiaalienergia

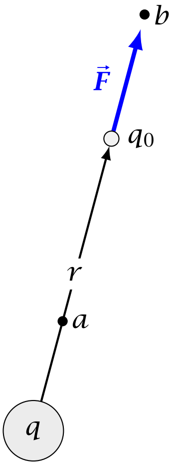
- Coulombin lain mukaan pistevarauksen q aiheuttama voima testivaraukseen q_0

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}$$

- q_0 siirtyy $a \to b$:

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F}\cdot\hat{r}\,\mathrm{d}r = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]$$

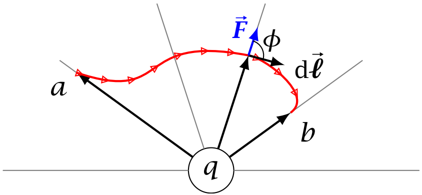
- Väite: Työ ei riipu reitistä



Kaksi pistevarausta: yleinen tapaus

- Yleisessä tapauksessa

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\,\mathrm{d}\ell$$
$$= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\,\mathrm{d}\ell$$



- $\cos\phi\,\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}r$ on siirtymä säteittäissuunnassa

  $\Longrightarrow$ reitistä riippumatta $W_{a\to b} = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b}\right] = U_a - U_b$

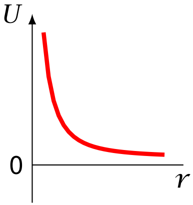
  $\Longleftrightarrow$ voima $\vec{F}$ on konservatiivinen (m.o.t.)

- Koska voima on konservatiivinen, järjestelmän mekaaninen kokonaisenergia (kineettisen ja potentiaalienergian summa) säilyy (toistaiseksi kineettinen energia on ollut nolla = hitaat siirrot)

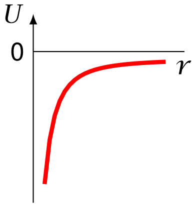
Kahden pistevarauksen potentiaalienergia

Kun testivaraus q_0 on etäisyydellä r varauksesta q, olkoon potentiaalienergia

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r}} \qquad (\to 0,\ \text{kun } r \to \infty)$$



q ja q_0 samanmerkkiset



q ja q_0 vastakkaismerkkiset

Usean pistevarauksen potentiaalienergia

- Pistevaraukset $q_1, q_2, q_3, \ldots$ etäisyyksillä $r_1, r_2, r_3, \ldots$ varauksesta q_0
  $\Longrightarrow$ q_0:n potentiaalienergia

$$\boxed{U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \ldots\right) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

- Jokaisen staattisen varausjakautuman synnyttämän sähkökentän aiheuttama voima on konservatiivinen
- Koko varausasetelman potentiaalienergia voidaan kirjoittaa muodossa

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

= summaus yli kaikkien varausparien (etäisyydet r_{ij}) siten, ettei varauksen itseisvuorovaikutusta laskea ($i \neq j$) ja kunkin parin vuorovaikutus lasketaan vain kerran ($i < j$)

Potentiaalienergian tulkitseminen

- Tähänastinen lähestymistapa: Potentiaalienergiaero on sähkökentän varaukselle tekemä työ, $W_{a\to b} = U_a - U_b$
  - Jos $U_a > U_b \implies W_{a\to b} > 0$

    $\iff$ Kenttä tekee positiivista työtä, kun hiukkanen ”putoaa” matalampaan potentiaaliin
- Toinen lähestymistapa: Tarkastellaan, paljonko työtä ulkoinen voima $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ tekee (”me teemme”) työtä varaukselle, kun ulkoinen voima siirtää varausta sähkökentässä $\vec{E}$ pisteestä b pisteeseen a
  - Jottei varaus saa kineettistä energiaa, sitä siirretään hitaasti, jolloin (tasapainotilanteen takia) ulkoinen voima on yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen sähkökentän aiheuttaman voiman kanssa
  - Tällöin erotus $U_a - U_b$ on ulkoisen voiman varaukselle tekemä työ (huomaa: voiman suunta ja siirtosuunta ovat aiemmalle vastakkaiset = kaksi miinusmerkkiä = lopputulos samanmerkkinen)
- Molempia lähestymistapoja käytetään sähköpotentiaalin määrittelemisessä

Sähköpotentiaali

- Normalisoidaan potentiaalienergia U testivarauksella q_0
- Saadaan potentiaalienergia per testivarausyksikkö eli **sähköpotentiaali** eli potentiaali

$$V = \frac{U}{q_0}$$

- Yksikkönä voltti, $[V] = \mathrm{J/C} = \mathrm{V}$
- Sähkökentän tekemä työ $W_{a\to b} = -\Delta U = q_0(V_a - V_b) = q_0 V_{ab}$, missä V_a on potentiaali pisteessä a ja V_b potentiaali pisteessä b (varaus siirtyy $a \to b$)
- V_{ab} on pisteen a potentiaali pisteen b suhteen eli pisteiden välinen potentiaaliero eli pisteiden välinen **jännite,** tulkinnat:
  - **(I)** V_{ab} on sähköisen voiman yksikkövaraukselle tekemä työ, kun varaus siirtyy $a \to b$
  - **(II)** V_{ab} on ulkoisen voiman yksikkövaraukselle tekemä työ, kun varaus siirretään sähköistä voimaa ”vastaan” $b \to a$

Sähköpotentiaalin laskeminen

- Pistevarauksen tuottama potentiaali (ei riipu testivarauksesta q_0)

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

- Pistevarausjoukon tuottama potentiaali

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

(r_i on varauksen q_i etäisyys kenttäpisteestä)

- Jatkuvan varausjakautuman tuottama potentiaali

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r}}$$

(r on varausalkion $\mathrm{d}q$ etäisyys kenttäpisteestä)

- Huomaa: Lausekkeiden antama potentiaali häviää, kun etäisyys kaikista varauksista kasvaa rajatta; näin ei ole, jos varausjakautuma itsessään ulottuu äärettömyyteen (potentiaali ei ehkä häviä)

Potentiaali ja sähkökenttä

- Sähkökenttä annettu $\Longrightarrow$ potentiaali laskettavissa sähkökentästä
- Sähkökentän tekemä työ

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

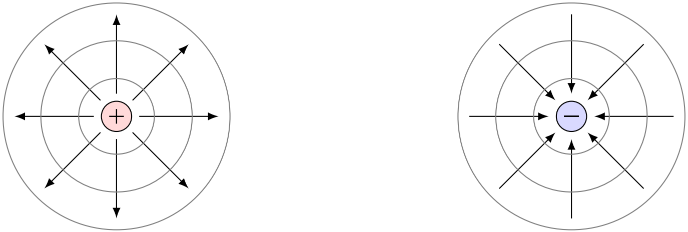
- Potentiaalin määritelmästä seuraa potentiaaliero

$$\boxed{V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$$

(kun sähköinen voima siirtää varausta)

- Tulos on integrointireitistä riippumaton

Sähköpotentiaalin käytös



- Liikutaan kohti lähdettä ($r \to 0$)
  - $+q$:ta lähestyttäessä potentiaali kasvaa (on yhä positiivisempi)
  - $-q$:ta lähestyttäessä potentiaali pienenee (on yhä negatiivisempi)
- Sähkökenttä osoittaa pienenevän potentiaalin suuntaan
- Sähkökentän yksikkö $[E] = \mathrm{N/C} = \mathrm{V/m}$ muutos $U_a - U_b = q(V_a - V_B) = qV_{ab}$
- Jos siirtyvä $q = 1\,e$ ja siirtävä $V_{ab} = 1\,\mathrm{V}$, potentiaalienergian muutos $U_a - U_b = qV_{ab} = 1\,\mathrm{eV} \approx 1.6022 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ (energiamitta elektronivoltti)

Sähköpotentiaalin määrittäminen

Esimerkki: varatun johdepallon tuottama potentiaali

- Tyypillisesti on [ainakin] kaksi mahdollisuutta määrittää sähköpotentiaali:
  1. Jos tunnetaan varausjakauma, $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q}{r}$
  2. Jos tunnetaan sähkökenttä, $V_{ab} = V_a - V_b = \displaystyle\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$
- Johdepallolle (säde R) annettu varaus (q) jakautuu tasaisesti pallon pinnalle, pallon sisäsähkökenttä on nolla ja ulkokenttä on ulospäin säteittäinen:

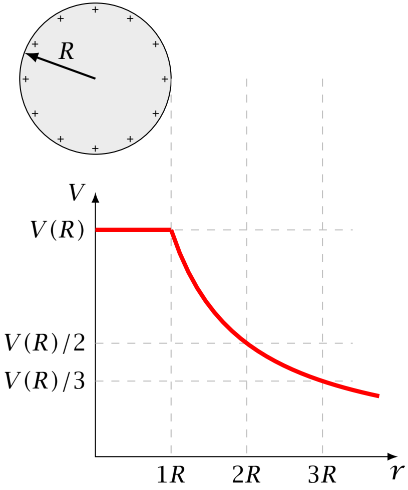
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,, \quad r > R$$

  - Pallon ulkopuolella näkyy pistelähteen potentiaali

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,, \quad r > R,$$

ja pallon sisällä potentiaali on vakio $V(R) = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ (miksi vakio $\neq 0$?)

Varatun johdepallon tuottama potentiaali



Esim: Viivavarauksen potentiaali

Äärettömän viivaravauksen sähkökenttä on

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} = E_r(r)\hat{r}$$

Jos piste a on etäisyydellä r_a ja piste b etäisyydellä r_b saadaan potentiaalieroksi

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{r_a}^{r_b} E_r \,\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

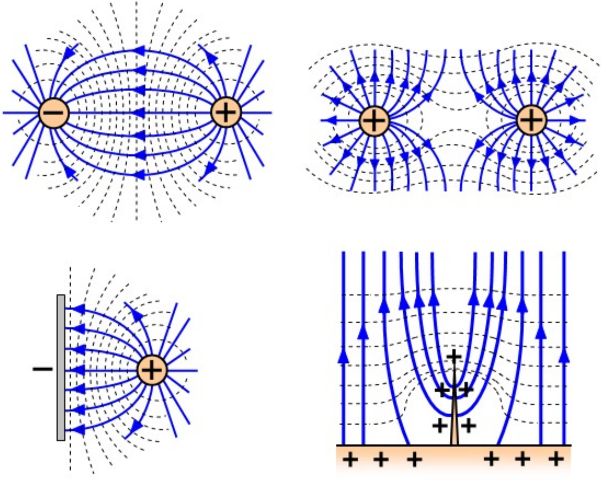
⇒ voidaan valita viivavarauksen potentiaaliksi

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

missä r_0 on mielivaltainen vakio. (Miksi äärettömyyteen ei voida valita nollapotentiaali?)

Tasapotentiaalipinnat ja kenttäviivat

- Sähkökenttää havainnollistettiin kenttäviivoilla (kuvan siniset viivat)
- Potentiaalia voi havainnollistaa **tasapotentiaalipinnoilla**
  - = pinta, jolla potentiaali on vakio
  - = kahdessa dimensiossa kartan korkeuskäyrään verrattava viiva (kuvan katkoviivat)
- Tasapotentiaalipinnat
  - eivät leikkaa tai kosketa toisiaan (voivat leikata itsensä)
  - ovat kohtisuorassa kenttäviivoja vastaan



(resourcefulphysics.org)

Tasapotentiaalit ja johteet

- Kun johteen varaukset ovat levossa, **johteen pinta** on **tasapotentiaalipinta**
- Sähkökenttä on kohtisuorassa johteen pintaa vastaan, tuore perustelu:
  - Johteen sisällä kenttä on nolla
  - Jos kentässä olisi johdepinnan suuntainen komponentti, johteen pinnan molemmin puolin suljettua reittiä siirretylle varaukselle tehty työ ei olisi nolla $\implies$ kyseessä ei olisi konservatiivinen voima
  - Ristiriidassa lähtötilanteen (sähköstatiikan) kanssa $\implies$ johteen pinnalla sähkökentän tangentiaalikomponentti häviää
- Koko johdekappale on samassa potentiaalissa ($\vec{E} = \vec{\mathbf{0}} \implies V_{ab} = 0$)
- Maa (tai muu suuri johdekappale) on sähkötekniikan mielessä varausvarasto, joka voi vastaanottaa tai luovuttaa varausta rajattomasti – kyseessä on sähköinen maa, ja kytkentä maahan on maadoitus; maan tasapotentiaaliksi valitaan yleensä nolla volttia (esim. sääilmiöt ovat niin suuria, että maassakin voi olla potentiaalieroja)

Ontelo johteessa

- Jos johteessa on varauksia sisältämätön ontelo, ontelon seinämillä ei ole varauksia, tuore perustelu:
  - Ontelon seinämä on tasapotentiaalipinta
  - Jos piste P ontelossa olisi eri potentiaalissa kuin seinämä ja jos piste ympäröitäisiin onteloon mahtuvalla Gaussin pinnalla, huomattaisiin, että Gaussin pinnalla on sähkökenttä $\implies$ Gaussin pinnan sisällä on varausta
  - Ontelossa ei kuitenkaan ole varauksia, joten ontelossa potentiaalin täytyy olla vakio ja kenttä on nolla $\implies$ pintavaraustiheys ($\sigma = \varepsilon_0 E_\perp$) on nolla
- Mieti: tasapotentiaalipinnan ja Gaussin pinnan ero?

Potentiaaligradientti

- Edellä $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ (a:n potentiaali b:n suhteen)
- Toisaalta jos summataan infinitesimaaliset potentiaalimuutokset $\mathrm{d}V$ jokaisen $\mathrm{d}\vec{\ell}$:n kohdalla matkalla b:stä a:han, $V_a - V_b = \int_b^a \mathrm{d}V = -\int_a^b \mathrm{d}V$
- Kaikille a, b pitäisi päteä $\quad (\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k})$

$$-\int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \quad \Longrightarrow \quad -\mathrm{d}V = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z$$

- Kun sallitaan yhden muuttujan kerrallaan muuttua, saadaan ratkaistuksi

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

- Sähkökenttä on ”potentiaalin negatiivinen gradientti” ja osoittaa **pienenevän potentiaalin suuntaan**

Potentiaaligradientti (jatkoa)

Nabla (∇) on lyhennysmerkintä vektoridifferentiaalioperaattorille, jolla potentiaaligradientti voidaan merkitä hyvin ytimekkäästi ja koordinaatistoriippumattomasti $\vec{E} = -\nabla V$.

Tavallisessa karteesisessa koordinaatistossa saadaan

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Jos potentiaali $V = V(r)$ riippuu etäisyydestä pallon keskipisteestä tai sylinterin akselista[1] saadaan

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

[1] Yleinen gradientti pallo- tai sylinterikoordinaatistossa on mutkikkaampi, mutta sitä ei tällä kurssilla tarvita.

Eri geometrioita

- Pistevaraus

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Varattu sylinteri (säde R)

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R$$

- Rengasvarauksen (säde a) akselilla (x-akselilla)

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Yhteenveto luvusta 23

Keskeisiä käsitteitä

- Konservatiivinen kenttä (ja voima)
- Sähköinen potentiaalienergia U
- (Sähkö)potentiaali V
- Tasapotentiaalipinta

Tärkeitä kaavoja

Energia ja potentiaali

$$W_{a\to b} = U_a - U_b, \quad V = \frac{U}{q_0}$$

Potentiaali ja kenttä

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}, \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla V$$

Pistevarauksen potentiaali

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

(+ superpositioperiaate)