Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

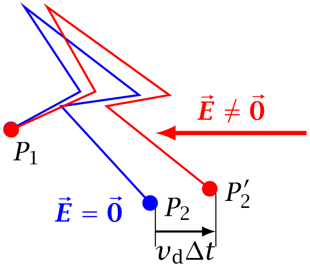
Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

# Luentoviikko 4

**Kapasitanssi ja eristeet (YF 24)**
- Kondensaattorit ja kapasitanssi
- Sarja- ja rinnankytketyt kondensaattorit
- Sähkökentän energia
- Eristeet
- Eriste molekyylitasolla
- Gaussin laki eristeissä
- Yhteenveto

**Virta, resistanssi ja sähkömotorinen voima (YF 25)**
- Virta
- Resistiivisyys
- Resistanssi
- Sähkömotorinen voima
- Energia ja teho
- Yhteenveto

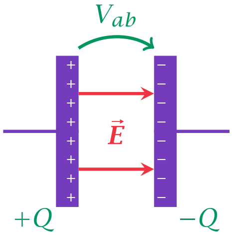


# Tavoitteena on oppia

- kondensaattoreiden olemus ja miten lasketaan kondensaattorin varauskykyä kuvaava suure
- analysoimaan yhteenkytkettyjä kondensaattoreita
- laskemaan kondensaattoriin varastoidun energian määrä
- mitä eristeet ovat ja miten niitä voi käyttää parantamaan kondensaattoreita
- miten Gaussin lakia käytetään eristeissä

# Kondensaattori

- **Kondensaattori** varastoi sähköistä potentiaalienergiaa ja varausta
- Käyttökohteita: pulssilaserien energialähteet, dynaamiset virtapiirit, kiihtyvyysanturit, ...
- Muodostuu (yksinkertaisimmillaan) kahdesta toisistaan eristetystä johdekappaleesta




- Aluksi johdekappaleilla on nollavaraus
- Kondensaattori varataan (ladataan) kun ulkoinen voima tekee työtä siirtämällä elektroneja johdekappaleesta toiseen.
- Tehty työ varastoituu kondensaattorin sähkökentän energiaksi
- Varaamisen jälkeen johdekappleiden varaukset ovat $+Q$ ja $-Q$
- Sähkökenttä $E \propto Q$ joten potentiaaliero $V_{ab}$ on verrannollinen varaukseen $Q$

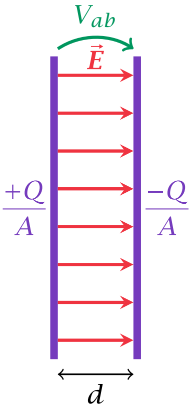
# Kapasitanssi $C$

- Kondensaattorin **kapasitanssi**

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}}} \qquad [C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F} = \text{faradi}$$

- Kapasitanssi mittaa kondensaattorin kykyä varastoida energiaa (ja varausta)
- ”Yksinkertaisella” väliaineella eristetyn kondensaattorin kapasitanssi riippuu vain kondensaattorin geometriasta (koosta ja muodosta) ja eristeaineen tyypistä
- Huomaa: (kursivoitu) $C$ on kapasitanssi, (antiikva-)$\mathrm{C}$ on coulombi

# Levykondensaattori




Yksinkertainen mutta tärkeä perusrakenne:

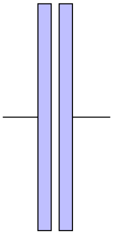
- Kaksi $A$-pinta-alaista levyä välimatkalla $d$ toisistaan.
- Sähkökenttä suurten lähekkäisten levyjen välillä on likimain vakio $E = \sigma/\varepsilon_0$ ja pintavaraus on likimain tasainen $\sigma = \pm Q/A$, joten

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}, \quad V_{ab} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

- Tämä on siis approksimaatio, joka pätee kun $A$ on iso ja $d$ on pieni.

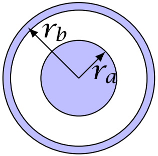
# Kondensaattorigeometrioita

Levykondensaattori



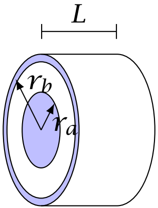
$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

Pallokondensaattori



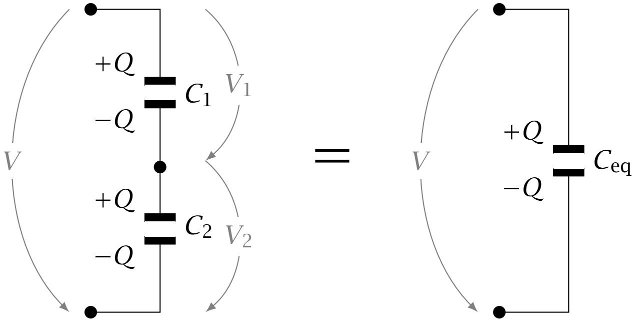

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Sylinterikondensaattori




$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(r_b/r_a)}$$

# Kondensaattorit sarjassa




- Kondensaattorien $C_1$ ja $C_2$ yli potentiaaliero $V$
  - Kondensaattorilevyillä varaukset $+Q$ ja $-Q$
- Vastaava (eli ekvivalentti) kondensaattori $C_{eq}$:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1},\ V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{ja} \quad V = V_1 + V_2 \qquad \Longrightarrow \qquad V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

# Kondensaattorit sarjassa (jatkoa)

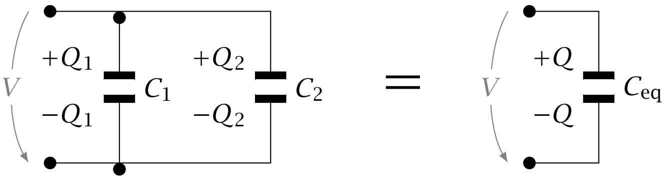
- Vastinkytkennälle saatiin

$$\frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- $N$ kondensaattoria **sarjassa** (kaikilla kondensaattorilevyillä varaus on suuruudeltaan sama)

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i}^{N} \frac{1}{C_i}} \qquad \text{(sarjakytketyt kondensaattorit)}$$

# Kondensaattorit rinnan




- Kondensaattorien yli potentiaaliero $V$
  - Kondensaattoreilla erisuuret varaukset

$$Q_1 = C_1 V \text{ ja } Q_2 = C_2 V$$

- Vastaava kondensaattori $C_{\text{eq}}$:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V = C_{\text{eq}}V$$

- $N$ kondensaattoria **rinnan** (jokaisen osakondensaattorin jännite on sama)

$$\boxed{C_{\text{eq}} = \sum_i^N C_i} \qquad \text{(rinnankytketyt kondensaattorit)}$$

# Kondensaattorin varaaminen

- Kondensaattorien hyödyllisyys perustuu niiden kykyyn varastoida energiaa
- Määritetään kondensaattorin varaamiseen tarvittava työ:
  - Jos kondensaattorin jännite ja varaus ovat kesken varaamisen $v$ ja $q$ ja kondensaattorissa siirretään varaus $\mathrm{d}q$, tehdään työ $\mathrm{d}W = v\,\mathrm{d}q = (q/C)\,\mathrm{d}q$
  - Lopulta kondensaattorin jännite on $V$ ja varaus $Q$
  - Kokonaistyö saadaan integroimalla

$$W = \int_0^W \mathrm{d}W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

  - Kondensaattorin potentiaalienergia (vrt. jousen potentiaalienergia)

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV}$$

  - Kapasitanssi mittaa kondensaattorin kykyä varastoida energiaa ja varausta

# Sähkökentän energiatiheys

- Varausten (elektronien) siirtäminen kondensaattorin johdekappaleelta toiselle vaatii työtä sähkökenttää vastaan $\Longrightarrow$ voimme ajatella, että energia varastoituu kondensaattorin sähkökenttään
- Kondensaattorin energiatiheys (energia tilavuusyksikössä) $u = \dfrac{\frac{1}{2}CV^2}{\text{tilavuus}}$
- Esim. levykondensaattorin kapasitanssi $C = \varepsilon_0 A/d$, potentiaaliero $V = Ed$ ja tilavuus $= Ad$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

(sähköenergiatiheys tyhjiössä, yleispätevä tulos)

- Sähkökentän energian käsite on vaihtoehtoinen tapa tulkita varausjoukon potentiaalienergia
- Onko tyhjiö tyhjä?

# Eristeet

- Tähän asti kondensaattorilevyjen (eli johdekappaleiden realisaatioiden) välissä on ollut tyhjiö ($\approx$ ilma)
- Käytännössä levyjen välissä on eristeainetta (eristettä)
  1. Eriste pitää levyt (luotettavasti) erillään
  2. Suurempi jännite (suurempi kentänvoimakkuus) mahdollinen ennen läpilyöntiä
  3. Jos levyjen väliin lisätään eristettä, huomataan, että kapasitanssi $C_0$ (kapasitanssi, kun levyjen välissä ilmaa) kasvaa kertoimella

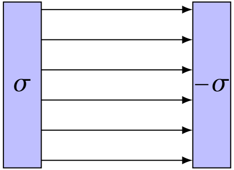
$$K = \varepsilon_\mathrm{r} = \text{suhteellinen permittiivisyys} = \text{eristevakio} > 1$$

arvoon $C$ (kapasitanssi, kun levyjen välissä eristettä):

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(eristevakion määritelmä)}$$

- $K$ on suuruusluokkaa 1 (tyhjiö) ... 5–10 (lasi) ... $\overset{\text{jopa}}{80}$ (vesi)

# Indusoitunut varaus ja eristeen polarisaatio

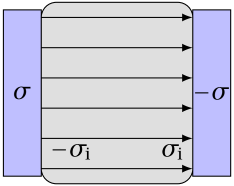



- Kondensaattorilevyjen väliin eristettä $\Longrightarrow$ $C$ kasvaa, jännite $V$ pienenee (jos $Q$ vakio) $\Longrightarrow$ sähkökenttä pienenee $E_0 \to E$:

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad \text{(jos } Q \text{ on vakio)}$$

$\Longleftrightarrow$ eriste on **polarisoitunut**

$\Longleftrightarrow$ eristeseen on indusoitunut pintavarausta




- Sähkökenttä on muuttunut indusoituneen pintavaraustiheyden $\sigma_i$ vuoksi (oletus: $\sigma_i \propto E$):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \to \quad E = \frac{\sigma_{\text{netto}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0}$$

$\Longrightarrow$ indusoitunut pintavaraustiheys $\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right)$

# Permittiivisyys

- **Permittiivisyys** $\varepsilon$ (= materiaalin ominaisuus)

$$\boxed{\epsilon = K\varepsilon_0}$$

- Levykondensaattorin kapasitanssi eristeen kanssa

$$\boxed{C = KC_0 = K\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d}}$$

- Sähköenergiatiheys materiaalissa

$$\boxed{u = \frac{1}{2}K\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2}$$

- Tyhjiössä (ja likimain ilmassa) $\boxed{K = 1}$ ja $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0}$

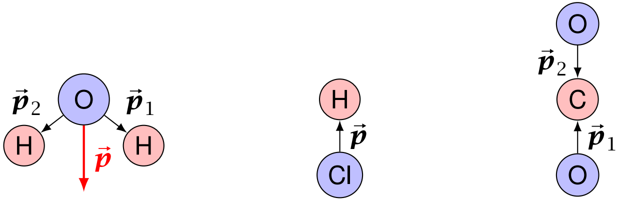
# Läpilyönti

- Kun sähkökentän voimakkuus esimerkiksi ilmassa nousee riittävän suureksi ($E_\mathrm{m} \approx 3 \times 10^6\,\mathrm{V/m}$), ilmamolekyylit ionisoituvat ja ilma alkaa johtaa sähkövirtaa
  - Varatun johdepallon potentiaalia ei voi nostaa rajatta: suuri potentiaali nostaa sähkökentän niin suureksi, että syntyy koronapurkaus (lievää kipinöintiä) tai (eristeen, ilman) **läpilyönti** (oikosulkuvirta eristeen läpi)
  - Mitä pienempi on johdepallon säde, sitä suurempi on kenttä pallon pinnalla $\Longrightarrow$ koronapurkauksen välttämiseksi on syytä käyttää suurisäteisiä elektrodeja (ellei tavoite ole purkauksen synnyttäminen, vrt. lasertulostin)
  - Ukkosenjohdattimessa tylppä (pyöreä) kärki on parempi kuin terävä
- Suurin kentänvoimakkuus, jonka aine sietää, on aineen **läpilyöntikestävyys** (esim. polypropyleenille $E_\mathrm{m} \approx 7 \times 10^7\,\mathrm{V/m}$)
- Läpilyönti esim. kondensaattorissa voi polttaa eristeeseen reiän ja pilata komponentin

# Sähköinen polarisaatio

## Molekyylit

- Ideaalisessa eristeessä ei ole vapaita varauksia, jotka voisivat liikkua ulkoisessa kentässä pintavaraukseksi ja kumota ulkoisen kentän vaikutuksen – mistä eristeen pintavaraus tulee?
- Molekyyleillä voi olla pysyvä dipolimomentti, joka on seurausta elektronien epätasaisesta jakautumisesta molekyylissä.
  - Tällaisia polaarisia molekyylejä ovat esim. $H_2O$, HCl muttei $CO_2$




(Kuvassa elektronegatiiviset atomit ovat sinisellä, elektropositiiviset punaisella)

# Sähköinen polarisaatio

## Polaaristen molekyylien suunta

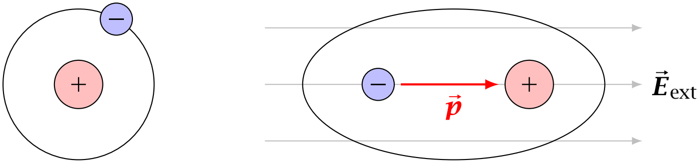
- Ilman ulkoista kenttää polaariset molekyylit suuntautuvat lämpöliikkeen vuoksi yleensä satunnaisesti
- Kokonaisuudella ei ole dipolimomenttia
- Ulkoinen sähkökenttä suuntaa dipolit osittain
- Lämpöliike sotkee edelleen molekyylien suuntausta
- Matalassa lämpötilassa suuntaus on likimain täydellinen

# Sähköinen polarisaatio

## Atomit

- Pallosymmetrian vuoksi yksittäisillä atomeilla ei ole dipolimomenttia
- Ulkoinen sähkökenttä siirtää negatiivisia elektroneja ja positiivisia ytimiä toistensa suhteen

$\Longrightarrow$ atomeille indusoituu dipolimomentti



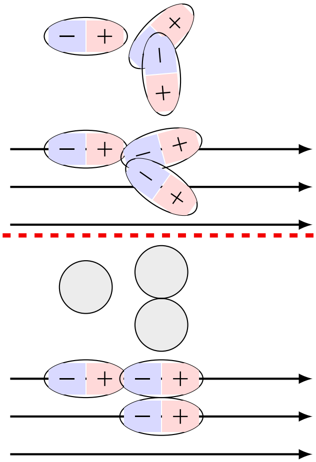

Ei ulkoista kenttää

Ulkoinen kenttä $\vec{E}_{\mathrm{ext}}$

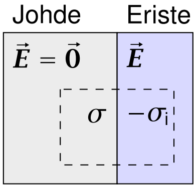
# Sähköinen polarisaatio

## Polarisaatio mikroskooppisesti

- Polaariset molekyylit sähkökentässä
  - Osittainen suuntautuminen
- Ei-polaariset molekyylit sähkökentässä
  - Polarisoituminen $\Longrightarrow$ (atomeilla) dipolimomentti
- Polarisoitumisen takia eristeelle syntyy pintavaraus, joka tuottaa ulkoista kenttää pienentävän sähkökentän (eristeen sisällä nettovaraustiheys $= 0$)
- Eristeen varaus on **sidottua varausta,** koska (molekyylien) varaus ei voi liikkua vapaasti
- Johteen varausta voi lisätä tai poistaa tai siirtää, joten se on **vapaata varausta**



# Gaussin laki eriste–johde-rajapinnassa




- Sovelletaan Gaussin lakia eristeen ja johteen rajapintaan (esim. kondensaattorissa) – käytetään Gaussin pintana ”tonnikalapurkkia”:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_\mathrm{encl}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad EA = \frac{(\sigma - \sigma_\mathrm{i})A}{\varepsilon_0} \quad \&$$

$$\sigma_\mathrm{i} = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \Longrightarrow \quad EA = \frac{\sigma A}{K\varepsilon_0} \iff KEA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

- $K\vec{E}$:n vuo on $\sigma A/\varepsilon_0$:n suuruinen, joten Gaussin laki eristeessä on

$$\boxed{\oint K\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_\mathrm{encl-free}}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(eristeessä)}$$

- $Q_\mathrm{encl-free}$ on **vapaa varaus** Gaussin (eli integrointi-) pinnan sisällä

# Yhteenveto luvusta 24

## Keskeisiä käsitteitä

- Kondensaattori ja kapacitanssi $C$
- Kondensaattoriin varastoitunut energia $U$
- Kentän energiatiheys $u$
- Eristeaineet, eristevakio $K$
  ja permittiivisyys $\varepsilon = K\varepsilon_0$
- Läpilyöntikestävyys $E_\mathrm{m}$

## Tärkeitä kaavoja

Kondensaattoreille yleensä

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}, \quad U = \frac{Q^2}{2C}$$

Kentän energiatiheys

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Tasokondensaattori

$$C = KC_0 = \varepsilon\frac{A}{d}$$

Gaussin laki eristeessä

$$\oint K\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\mathrm{encl-free}}}{\varepsilon_0}$$

# Virta, resistanssi ja sähkömotorinen voima (YF 25)

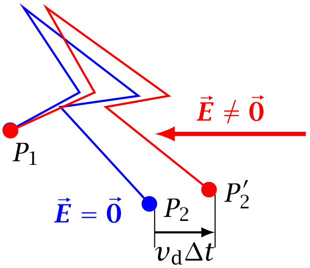
# Tavoitteena on oppia

- mitä sähkövirta tarkoittaa ja miten varaukset liikkuvat johteessa
- mitä aineen resistiivisyys ja johtavuus tarkoittavat
- miten lasketaan johtimen resistanssi, kun tiedetään johtimen mitat ja resistiivisyys
- miten sähkömotorinen voima (smv) mahdollistaa virran kulkemisen virtapiirissä
- miten lasketaan energioita ja tehoja piireissä

# Varaus johteessa

- (Sähkö)**virta** on varausten liikettä paikasta toiseen
- Jos varaukset kulkevat suljettua johdinsilmukkaa pitkin, silmukka muodostaa (sähkö)**virtapiirin**
- Virtapiireillä siirretään energiaa ilman liikkuvia osia [varaukset liikkuvat]
- Sähköstaattisessa tilanteessa johteen elektronit liikkuvat satunnaisesti ja törmäilevät materiaalin positiivisiin ioneihin (nettovirtaa ei synny)

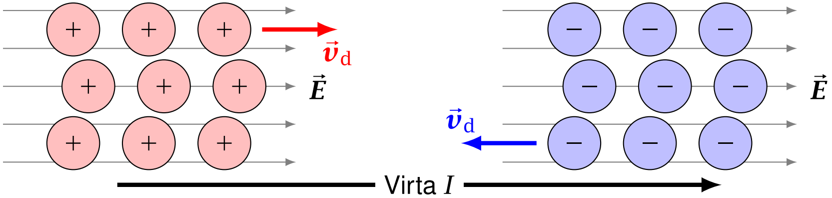
- Jos johteeseen herätetään pysyvä sähkökenttä $\vec{E}$ **(miten: tulossa),** varauksiin kohdistuu voima $\vec{F} = q\vec{E}$
- Vapaat varaukset törmäilevät yhä ioneihin, mutta sähköinen voima $\vec{F}$ ajaa varauksia hitaasti voiman suuntaan: tätä kuvaa **ajautumisnopeus** $\vec{v}_\mathrm{d}$ (d = drift)



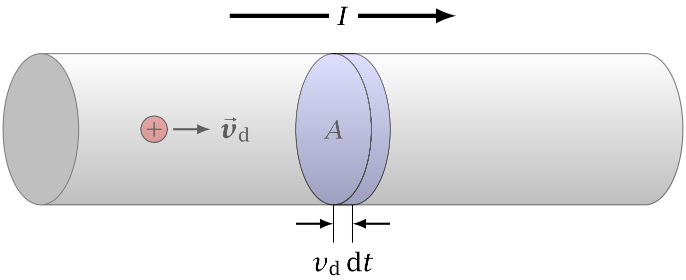
# Virran suunta ja määritelmä

- Varausta kuljettavat
  - metalleissa elektronit
  - plasmassa (= ionisoituneessa kaasussa) ja liuoksissa elektronit ja ionit
  - puolijohteissa elektronit ja positiiviset aukot (= puuttuvat elektronit)
- Virran suunta on **positiivisten varausten** suunta
- Jos poikkipinnan $A$ läpi kulkee aikayksikössä $\mathrm{d}t$ nettovaraus $\mathrm{d}Q$, **virta**

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}} \qquad [I] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A} = \text{ampeeri}$$



# Virta ja ajautumisnopeus




- Ajassa $\mathrm{d}t$ varaukset siirtyvät matkan $v_\mathrm{d}\,\mathrm{d}t$
- Kiekossa on $nA\,v_\mathrm{d}\,\mathrm{d}t$ hiukkasta (jos hiukkastiheys on $n$, $[n] = 1/\mathrm{m}^3$) $\Longrightarrow$ kiekossa on varaus $\mathrm{d}Q = nqv_\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t$
- Virta $\boxed{I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = n\,|q|\,v_\mathrm{d}A}$ (miksi $|q|$?)

# Virrantiheys

- Virta yksikköpoikkipinnan läpi on nimeltään **virrantiheys**

$$J = \frac{I}{A} = n\,|q|\,v_{\mathrm{d}} \qquad [J] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

- Virta ja virrantiheys eivät riipu liikkuvan varauksen etumerkistä (kun postitiivisen varauksen eli virran kulkusuunta on selvitetty)
- Virrantiheys voidaan myös esittää vektorina, jonka suunta on virtauksen suunta:

$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}_{\mathrm{d}}}$$

Huomaa: Itseisarvomerkit eivät kuulu tähän! (Miksi?)

- Virta ei ole vektori, vaikka sillä on suunta. Virrantiheys on vektori, mutta se on paikallinen mitta virran määrälle ja suunnalle. Virta kuvaa laajemman alueen läpi kulkevaa varausvirtausta.

# Ohmin laki

- Ideaalitapauksessa virrantiheys johteessa on suoraan verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen eli suureiden suhde on vakio:

$$\boxed{\rho = \frac{E}{J}}$$

**Ohmin laki**

- Verrannollisuuskerroin $\rho$ on **resistiivisyys**, $[\rho] = \mathrm{V\,m/A} = \Omega\,\mathrm{m}$
- Resistiivisyyden käänteisluku $1/\rho$ on **johtavuus,** $[1/\rho] = \mathrm{S/m}$, $\mathrm{S} = 1/\Omega =$ siemens $=$ [siimens] [johtavuuden symboli olisi $\sigma$, mutta säästämme sen pintavaraustiheydelle]
- Ohmin lakia noudattava materiaali on ohminen eli lineaarinen johde (esim. metallit likimain)
- Jos materiaali ei noudata Ohmin lakia, se on ei-ohminen eli epälineaarinen
- Ohmin laki on idealisaatio (oikeastaan Ohmin ”laki”)

# Aineiden resistiivisyyksiä

| | |
|---|---|
| Johteet | |
| hopea | $1.47 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| kupari | $1.72 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| alumiini | $2.75 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| manganiini* | $44 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| Puolijohteet (puhtaat) | |
| germanium | $0.60\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| pii | $2300\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| Eristeet | |
| kvartsi (sulatettu) | $75 \times 10^{16}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| lasi | $10^{10} \ldots 10^{14}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |
| teflon (PTFE) | $>10^{13}\,\Omega\,\mathrm{m}$ |

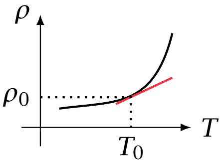
*seos: Cu $84\,\%$, Mn $12\,\%$ ja Ni $4\,\%$

Eristeiden ja johteiden resistiivisyydet ovat aivan eri suuruusluokkaa:
esim. piirilevyn [eristettä] päällä olevien johdinliuskojen välillä ei kulje johtavuusvirtaa

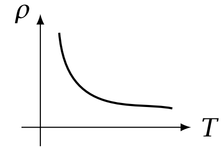
# Resistiivisyyden lämpötilariippuvuus

**Metallien** resistiivisyys kasvaa lämpötilan kasvaessa

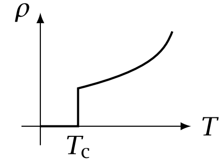
- Ionit värähtelevät enemmän $\implies$ lisää törmäyksiä
- Lämpötilariippuvuus $\rho(T) = \rho_0\,[1 + \alpha(T - T_0)]$, missä $\rho_0$ on resistiivisyys lämpötilassa $T_0$ (esim. $0\,°\mathrm{C}$ tai $20\,°\mathrm{C}$) ja $\alpha$ on resistiivisyyden lämpötilakerroin – kaava pätee vain rajoitetusti




**Puolijohteiden** resistiivisyys tyypillisesti pienenee lämpötilan kasvaessa




**Suprajohteiden** resistiivisyys putoaa nollaan kriittisen lämpötilan alapuolella



# Resistanssi

- Ohmin lain mukaan johteessa sähkökenttä $\vec{E} = \rho\vec{J}$
- Virta johtimessa ja jännite johtimen päiden välillä ovat kiinnostavampia ja mitattavampia suureita kuin $\vec{E}$ ja $\vec{J}$
- Valitaan sylinterimäinen johdin (pituus $L$, poikkipinta-ala $A$) ja asetetaan sen yli jännite $V$:

$$E = \frac{V}{L} = \rho J = \rho\frac{I}{A} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{\rho L}{A} I = RI$$

- Verrannollisuuskerroin $R$ on **resistanssi:** $\boxed{R = \frac{\rho L}{A}}$ (suora johdin)
- Lineaarinen riippuvuus $\boxed{V = RI}$ on toinen tapa esittää Ohmin laki
- Resistanssin yksikkö ohmi = $\Omega = \mathrm{V/A}$ = [oomi]
- **Vastus** = komponentti, jolla on resistanssia

# Kapasitanssin ja resistanssin vertailu

Levykondensaattorin kapasitanssi

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Sarjakytkentä (sama $Q$)

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Rinnankytkentä (sama $V_{ab}$)

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i$$

Suoran johtimen resistanssi

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Sarjakytkentä (sama $I$)

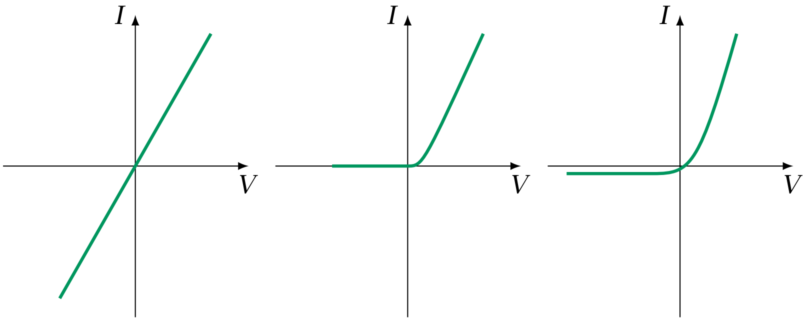
$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i$$

Rinnankytkentä (sama $V_{ab}$)

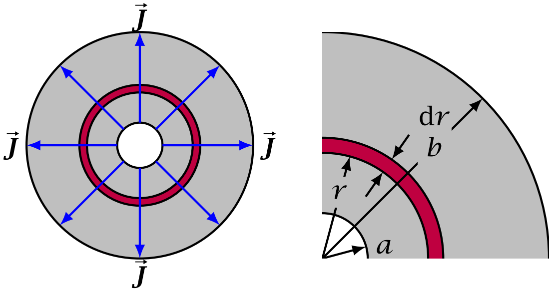
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

# Virta–jännite-käyrä

- Ideaalisen vastuksen $I(V)$-käyrä on suora (vasemmalla)
- Tyhjiödiodin ja puolijohdediodin käyrät (keskellä ja oikealla) ovat hyvin epälineaarisia (komponentit eivät noudata Ohmin lakia)



# Esimerkki




Mikä on onton $h$-pituisen sylinterin säteittäinen resistanssi? Sisä- ja ulkoelektrodit ovat ideaalijohdetta, ja niihin kytketty jännitelähde synnyttää säteittäisen virran täyteaineeseen, jonka resistiivisyys on $\rho > 0$.

- Poikkipinta-ala ei ole vakio, joten yhtälöä $R = \rho L/A$ ei voi käyttää suoraan
- Sylinterimäisen kuoren (paksuus $\mathrm{d}r$ ja pinta-ala $2\pi r h$) resistanssi on

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{2\pi r h} \quad \Longrightarrow \quad R = \int \mathrm{d}R = \frac{\rho}{2\pi h}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\rho}{2\pi h}\ln\frac{b}{a}$$

# Virtapiiri

- Yritetään saada tasavirta (= tasainen sähkön virtaus) kulkemaan irtaimessa johtimessa
  - Asetetaan sähkökenttä $\vec{E}_1$ johtimeen
  - Virrantiheys $\vec{J} = \vec{E}_1/\rho$, varaukset liikkuvat
  - Johtimen toiseen päähän kertyy negatiivista varausta
  - Toiseen päähän kertyy positiivista varausta
  - Varaukset muodostavat sähkökentän $\vec{E}_2$, joka kumoaa ulkoisen kentän:

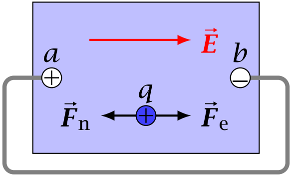
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{J} = \vec{0} \iff \text{ei virtaa}$$

  - Epätäydellisessä (= avoimessa) ”piirissä” ei voi kulkea tasavirtaa
- Jotta tasavirta saadaan kulkemaan, tarvitaan johdinsilmukka eli **suljettu virtapiiri**
- Kun varaus kulkee kierroksen suljetussa virtapiirissä, potentiaalienergian on oltava sama lopussa kuin alussa
  - Vastuksessa potentiaalienergia aina vähenee, joten jossain täytyy olla potentiaalienergian lisäin (ajattele suihkulähdettä ja vesipumppua)
  - Pelkkä ulkoinen staattinen sähkökenttä ei riitä tasavirran herättämiseen

# Sähkömotorinen voima

- Virtapiireissä virtaa liikuttaa **sähkömotorinen voima** (smv) $\mathcal{E}$
- Sähkömotorisen voiman yksikkö on **voltti**
- Smv:n lähteenä voi olla esimerkiksi paristo (kemiallinen reaktio), generaattori (varauksiin magneettikentässä kohdistettu mekaaninen työ) tai aurinkokenno (valon fotonit luovat elektroni–aukko-pareja pn-liitoksessa)
- Ideaalinen **smv:n lähde** luo napojen $a$ ja $b$ välille potentiaalieron ($V_a > V_b$), joka pysyy vakiona virrasta riippumatta
- Varauksiin kohdistuu lähteen sisällä
  - sähköstaattinen voima $\vec{F}_\mathrm{e} = q\vec{E}$ ja
  - $\vec{F}_\mathrm{e}$:lle vastakkainen ei-sähköstaattinen (eli ei-konservatiivinen) voima $\vec{F}_\mathrm{n}$, joka ylläpitää potentiaalieroa napojen välillä (eli tuottaa smv:n $\mathcal{E}$)

# Smv virtapiirissä (ideaalinen lähde)




- Jos positiivinen varaus $q$ siirretään lähteessä $b \to a$, ei-sähköstaattinen voima $\vec{F}_\mathrm{n}$ tekee varaukselle työn $W_\mathrm{n} = q\mathcal{E} > 0$ ja sähköstaattinen voima $\vec{F}_\mathrm{e}$ lisää varaukseen liittyvää potentiaalienergiaa määrällä $qV_{ab}$
- Ideaalisessa lähteessä $\vec{F}_\mathrm{n} + \vec{F}_\mathrm{e} = \vec{0}$ ($q$:n kineettinen energia ei muutu), joten varaukselle tehdään nollanettotyö: $q\mathcal{E} - qV_{ab} = 0$ eli $V_{ab} = \mathcal{E}$
- Kytketään smv:n lähteeseen johto (resistanssi $R$)
- Napojen välinen jännite synnyttää johtoon sähkökentän ja virran $a \to b$
  - Johdossa varaus kokeen potentiaalin laskun $V_{ab} = IR$
  - Lähteessä varaus kokee potentiaali nousun $\mathcal{E} = V_{ab}$

# Sisäinen resistanssi (todellinen lähde)

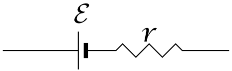
- Todellisella lähteellä on **sisäinen resistanssi** $r$, joka pienentää lähteen napajännitettä $V_{ab}$ (ja voimaa $F_\mathrm{e}$)
- Kun varaus $q$ siirtyy lähteessä $b \to a$, ansaittu potentiaalienergialisä $qV_{ab} < q\mathcal{E}$, koska $F_\mathrm{n}$:n tekemää työtä kuluu resistanssin voittamiseen
- Jos $r$ käyttäytyy ohmisesti,

$$\boxed{V_{ab} = \mathcal{E} - Ir}$$

**napajännite**

- Napajännite $V_{ab} = \mathcal{E}$ vain, jos virtaa ei kulje
- Ulkoisen piirin virta (koska yhä $V_{ab} = IR$) on

$$\mathcal{E} - Ir = IR \quad \Longleftrightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$



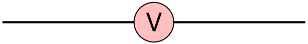

todellinen lähde: smv ja sisäinen resistanssi

- Sisäisen resistanssin muutos selittää paristojen ”tyhjentymisen” käytössä ja akkujen virranantokyvyn heikentymisen pakkasessa.

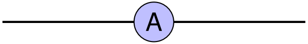
# Virran ja jännitteen mittaamisesta

Piireihin (teoriassa tai käytännössä) kytketään usein kahden perustyypin (ideaalisia tai lähes ideaalisia) mittareita:

**Jännitemittari** mittaa napojensa välisen jännitteen; mittarin sisäinen resistanssi on ääretön (virta ei kulje mittarin läpi); piirrosmerkki:




**Virtamittari** mittaa lävitseen kulkevan virran; mittarin sisäinen resistanssi on nolla (mittarin yli ei ole jännitettä); piirrosmerkki:



# Teho sähköpiirissä


- Olkoon piirielementin yli potentiaaliero $V_{ab} = V_a - V_b$ ja läpi virta $I$
- Elementin läpi ajassa $\mathrm{d}t$ kulkevalle varaukselle $\mathrm{d}Q$ tehdään työ $\mathrm{d}W = V_{ab}\,\mathrm{d}Q = V_{ab}I\,\mathrm{d}t$
- Energiaa siirtyy elementtiin tai elementistä tahdilla, joka saadaan jakamalla työ ajalla; tämähän on **teho**

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = V_{ab}I} \qquad [P] = \mathrm{V\,A} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W} = \text{watti} = \text{[vatti]}$$

- Jos $V_{ab} < 0$, piirielementti on lähde
- Vastuksen tapauksessa $\boxed{P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R}}$ (muuttuu lämmöksi)

# Lähteen teho

- Lähteen antotehoon vaikuttavat kuormavastus ja sisäinen vastus

$$P = V_{ab}I = (\mathcal{E} - Ir)I = \mathcal{E}I - I^2r$$

  - Lähde kierrättää varauksia sisällään teholla $\mathcal{E}I$
  - Lähteen sisäisessä resistanssissa kuluu teho $I^2r$
  - Ulkoisen piirin käytettävaksi jää (netto)teho $\mathcal{E}I - I^2r$
- Jos smv:n lähteeseen ($\mathcal{E}$) kytketään suurempi smv vastakkaissuuntaisesti, jälkimmäinen lähde syöttää tehoa alkuperäiseen lähteeseen (esim. akun lataaminen): $\mathcal{E}$-lähteen ottoteho

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I + I^2r$$

(mitä $\mathcal{E}I$ tarkoittaa nyt?)

- Kielenhuoltoa:
  - Pistorasiassa **on** $230\,\mathrm{V}$:n **jännite** (ei virta)
  - Piirissä **kiertää** virta (virta ei ”kulu”)
  - Vastuksessa **kuluu** teho, sen **yli on** jännite ja sen **läpi kulkee** virta

# Yhteenveto luvusta 25

## Keskeisiä käsitteitä

- Virta $I$ ja virrantiheys $\vec{\boldsymbol{J}}$
- Ajautumisnopeus $\vec{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d}$
- Resistiivisyys $\rho$, resistanssi $R$ ja vastus
- Virtapiiri
- Sähkömotorinen voima (smv) $\mathcal{E}$
- Sisäinen resistanssi $r$ ja napajännite $V_{ab}$
- Energia ja teho $P$

## Tärkeitä kaavoja

Virta ja virrantiheys

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = n\,|q|\,v_\mathrm{d}A, \quad \vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d}$$

Ohmin laki

$$\rho = \frac{E}{J}, \qquad R = \frac{V}{I}$$

Sylinterivastus

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

Napajännite (todellisen lähteen malli)

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Teho $P = V_{ab}I$