



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 5

Magneettikenttä ja magneettiset voimat (YF 27)

Magnetismi

Magneettikenttä

Magneettiset kenttäviivat ja magneettivuo

Varausten liike magneettikentässä

Liikkeen sovelluksia

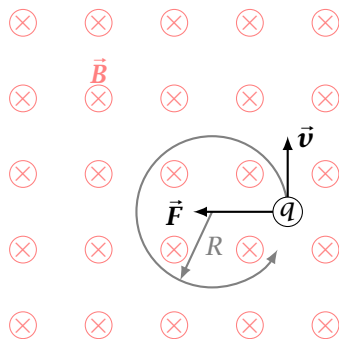
Virtajohdin magneettikentässä

Virtasilmutka magneettikentässä

Tasavirtamoottori

Hallin ilmiö

Yhteenveto



Tavoitteena on oppia

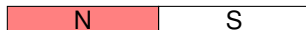
- ▶ magneettien ominaisuuksia ja miten magneetit vaikuttavat toisiinsa
- ▶ magneettikentässä liikkuvaan varaukseen vaikuttavan voiman luonne
- ▶ miten magneettiset kenttäviivat eroavat sähköisistä kenttäviivoista
- ▶ miten analysoidaan magneettikentässä olevan varauksen liikettä
- ▶ miten tutkitaan virtajohtimiin vaikuttavaa magneettista voimaa
- ▶ miten virtasilmukat käyttäytyvät magneettikentässä
- ▶ muutamia magneettikentän käyttökohteita kemiassa ja fysiikassa

Johdanto

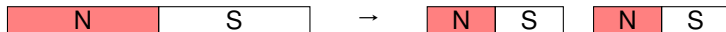
- ▶ Magneettisia voimia käytetään hyödyksi monessa arkipäivän laitteessa
- ▶ Magnetismin olemus on liikkuvien sähkövarausten vuorovaikutus
- ▶ Sähköiset voimat vaikuttavat kaikkiin varauksiin, **magneettiset voimat** vain **liikkuviin varauksiin**
- ▶ **Magneettikentän** synnyttää **kestomagneetti**, **virta** johteessa tai **liikkuva varaus**
- ▶ Magneettikenttä välittää **voiman**, jonka jokin toinen **virta** tai **liikkuva varaus** kokee
- ▶ Ensimmäiset havainnot magneettisista ilmiöistä tehtiin (oppikirjan mukaan) vähintään 2500 vuotta sitten Magnesia [ad Sipylumin] kaupungissa (nyk. Manisa) Länsi-Turkissa

Magnetismi

- ▶ (Kesto)magneetissa on kaksi napaa – kompassin mukaan S–south, N–north



- ▶ Samanmerkkiset navat hylkivät toisiaan, erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa
- ▶ Magneetin navat vetävät puoleensa rautaa sisältäviä ei-magnetisoituja esineitä
- ▶ (Missä tahansa) magneetissa on **aina** kaksi napaa:



- ▶ Maapallolla on magneettikenttä – kenttäviivat kulkevat etelästä pohjoiseen
- ▶ Pohjoisnavalla on S-napa (mitä?)

Liikkuva varaus ja magneettinen voima

Sähkökenttä

- ▶ Levossa oleva sähkövarausjakautuma synnyttää sähkökentän \vec{E}
- ▶ Sähkökenttä aiheuttaa voiman $\vec{F} = q\vec{E}$ varaukseen q
- ▶ Kokeellisesti on havaittu, että magneettikenttä \vec{B} aiheuttaa nopeudella \vec{v} liikkuvaan varaukseen q voiman

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$[B] \stackrel{\text{def}}{=} \text{tesla} = \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{V s}}{\text{m}^2}$$

voiman suunta \perp (hiukkasen nopeus ja magneettikenttä)

- ▶ \vec{B} on oikealta nimeltään **magneettivuon tiheys**, mutta kurssissa ja kirjassa sitä kutsutaan vain magneettikentäksi

Magneettikenttä

- ▶ Liikkuva varaus (virta) synnyttää (sähkökentän lisäksi?) **magneettikentän \vec{B}**
- ▶ Magneettikenttä aiheuttaa voiman \vec{F} liikkuviin varauksiin ja virtoihin

Elektronisuihku magneettikentässä

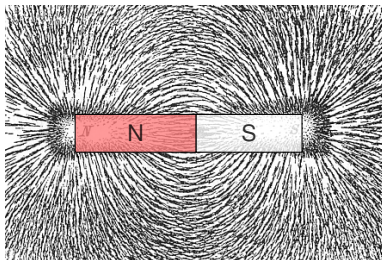
- ▶ Magneettikenttää voidaan tutkia katodisädeputken avulla
 - ▶ Elektronisuihku osuu keskelle kuvaruutua, jos magneettikenttä on elektronisuihkun kanssa yhdensuuntainen
 - ▶ Käännetään putkea (ja elektronisuihkua) $90^\circ \Rightarrow$ magneettikenttä kääntää suihkua
 - ▶ Kääntymissuunnasta voidaan päätellä elektronin varaus
- ▶ Jos varauksen kohdalla on sähkö- ja magneettikenttä yhtä aikaa, voima

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentzin voimalaki

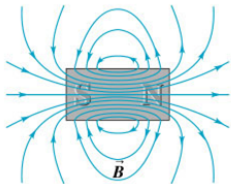
Kenttäviivat

- ▶ Kokeellisesti kenttäviivojen suunta nähdään rautaviilajauholla
 - ▶ Rautahippuset ovat pieniä kompassineuloja magneettikenttään asetettuina (vrt. ruohonsiemenet sähkökentässä)

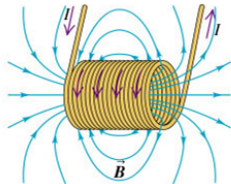


- ▶ Magneettikentän kenttäviivat **eivät ole** voimaviivoja siinä mielessä kuin sähkökentän kenttäviivat (magneettikenttä aiheuttaa voiman vain **liikkuvaan varaukseen eikä** voiman suunta ole kentän suunta)!
- ▶ Magneettikenttävektorit ovat kenttäviivojen tangenteja (kuten sähkökentällä)

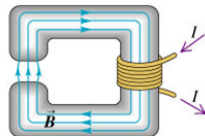
Eri lähteiden magneettisia kenttäviivoja



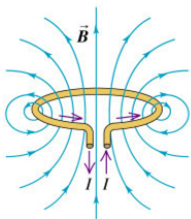
(a) Magnetic field lines through the center of a permanent magnet



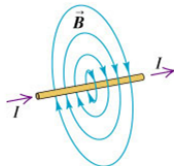
(b) Magnetic field lines through the center of a cylindrical current-carrying coil



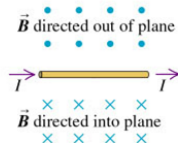
(c) Magnetic field lines through the center of an iron-core electromagnet



(d) Magnetic field lines in a plane containing the axis of a circular current-carrying loop



(e) Magnetic field lines in a plane perpendicular to a long, straight, current-carrying wire



(f) Magnetic field lines in a plane containing a long, straight, current-carrying wire

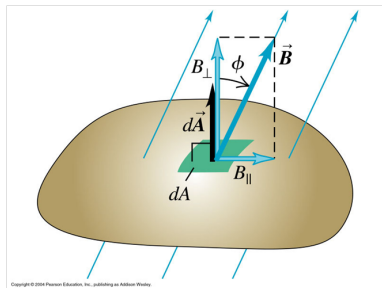
Magneettivuo

- ▶ Magneettivuo Φ_B määritellään kuten sähkökentän vuo
- ▶ Otetaan kuvitteellinen pinta A ja integroidaan sen läpi kulkeva \vec{B}

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B_{\perp} dA$$

magneettivuo

- ▶ $[\Phi_B] \stackrel{\text{def}}{=} \text{weber} = \text{Wb} = [\text{ve:ber}] = \text{T m}^2 = \text{N m/A} = \text{Vs}$



Gaussin laki magnetismissa

- ▶ Magneettisia monopoleja "ei ole olemassa" (tai ainakaan niitä ei ole **luonnossa** havaittu)
- ⇒ Magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on nolla:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

magnetismin Gaussin laki

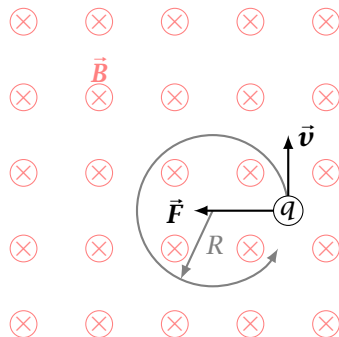
- ⇒ Magneettiset kenttäviivat ovat **suljettuja silmukoita**
- ▶ Jos valitaan tarkastelupinta (dA_{\perp}) kohtisuoraan \vec{B} :tä vastaan,

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_{\perp}}$$

(tästä näkee, miksi \vec{B} :n oikea nimi on **magneettivuon tiheys**)

Varauksen liike magneettikentässä

- ▶ Magneettikentän varaukseen aiheuttama voima on **aina** kohtisuorassa nopeutta vastaan
- ▶ Magneettikenttä voi muuttaa varauksen nopeuden **suuntaa**, **ei suuruutta**
 - ⇒ magneettinen voima ei tee työtä varaukselle
 - ⇒ varaus liikkuu **ympyrä-** tai **kierrerataa**



Syklotronitaajuus

- ▶ Newton II \Rightarrow magneettinen voima on yhtä suuri kuin keskihakuvoima:

$$F = |q|vB = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{ympyräradan säde}$$

- ▶ Varauksen kiertoaika $T = 2\pi R/v$, joten kulmataajuus

$$\omega = 2\pi/T = v/R = v|q|B/(mv) = |q|B/m \quad (m \text{ on varauksen massa})$$

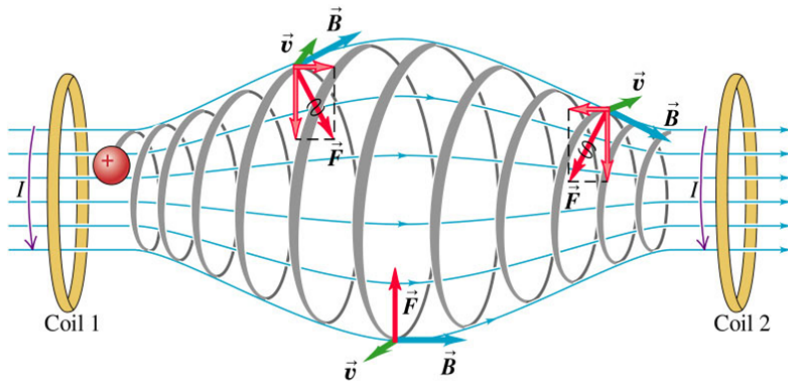
- ▶ Kulmataajuutta vastaava taajuus $f = \omega/(2\pi) = |q|B/(2\pi m)$ on **syklotronitaajuus**
- ▶ Esimerkiksi mikroaaltouunin tehonlähteenä käytetty **magnetroni** lähettää mikroaaltosäteilyä taajuudella 2.45 GHz, jolla elektronit kiertävät ympyrärataa tyhjiökammiossa magneetin napojen välissä .

Mikroaaltouunin taajuutta **ei ole** valittu maksimoimaan vesimolekyylien tehoabsorptiota.

Epähomogeeninen magneettikenttä

Magneettinen pullo

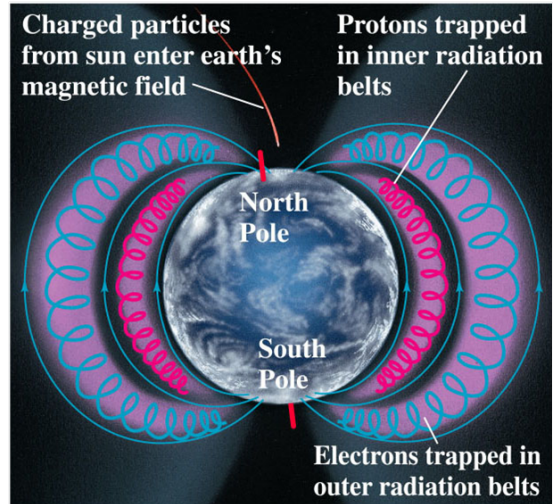
- ▶ Hiukkanen kulkee kierrerataa, jos \vec{v} ei ole kohtisuorassa \vec{B} :tä vastaan
- ▶ Kahden virtasilmukan välissä epähomogeeninen kenttä \Rightarrow magneettinen pullo, johon varatut hiukkaset voivat jäädä loukkuun
- ▶ Sovellus: kuumen plasman ($T \sim 10^6$ K) keskittäminen fuusioreaktorissa



Epähomogeeninen magneettikenttä

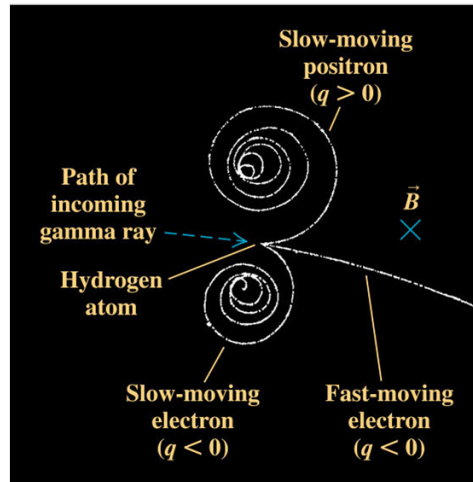
Van Allenin vyöt

- ▶ Maan magneettikenttään muodostaa loukkuja varatuille hiukkasille
- ▶ Auringosta tulevat varatut hiukkaset loukkuuntuvat ennen ilmakehään osumistaan
 - ⇒ Van Allenin vyöt (löydettiin vasta 1958)
 - ⇒ revontulet



Kuplakammio

- ▶ Kuplakammiossa on nestemäistä vetyä johon törmädetään hiukkasia
- ▶ Ulkoinen magneettikenttä on kohtisuorassa hiukkasten kulkusuuntaan nähden
- ▶ Esim. gammakvantti irrottaa nopean elektronin vetyatomista
 - ▶ Samalla muodostuu elektroni ja positroni (parinmuodostus)
 - ▶ Nämä hitaat hiukkaset kiertävät magneettikentän takia **spiraalirataa**
- ▶ Saadaan selville hiukkasten massoja ja varauksia

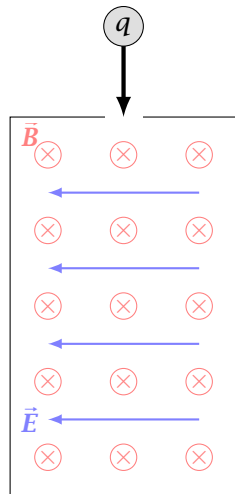


Nopeudenvälitsin

- ▶ Varattujen hiukkasten suihkusta voidaan valita tietyynopeuksisia hiukkasia
- ▶ Sähkö- ja magneettikenttä kohtisuorassa toisiaan vastaan
- ▶ Suoraan kulkevat hiukkaset toteuttavat liikeyhtälön

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad qvB - qE = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

- ▶ Nopeus valitaan säätämällä kenttien voimakkuuksia
- ▶ Varauksen merkillä ei ole väliä



J.J. Thomsonin e/m -koe (1897)

- ▶ Tyhjiöputkessa kiihdytetään kuumasta katodista irtoavia elektroneja
- ▶ Potentiaaliero V kahden anodin välillä, elektronin massa m ja nopeus v :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

- ▶ Seuraavaksi elektronisuihku ohjataan nopeudenvälitsimeen:

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} = \text{mitattavissa}$$

- ▶ Thomson löysi elektronin ja sai määritetyksi elektronin varauksen ja massan suhteen:

$$\frac{e}{m} \approx 1.76 \times 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

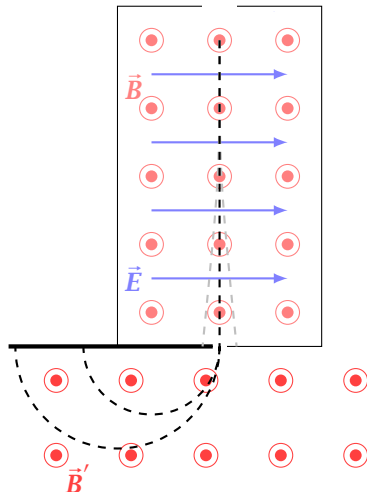
(R.A. Millikan 1913: elektronin varaus)

Massaspektrometri

- ▶ Bainbridgen massaspektrometri (kuva)
- ▶ Kapea suihku positiivisia ioneja ohjataan nopeudenvälitsimeen
- ▶ Nopeudenvälitsimen jälkeen on kohtisuora magneettikenttä B'
- ▶ Ionien rata kaareutuu ja ionit osuvat valokuvauslevylle
- ▶ Levylle osuvien ionien kulkuradan säde

$$R = \frac{mv}{qB'} = \frac{mE}{qBB'}$$

- ▶ Thomson löysi 1913 kaksi neonin **isotooppia**



Virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima

- ▶ Johtimessa positiivinen varaus ajautuu ylöspäin (nopeus v_d) ja

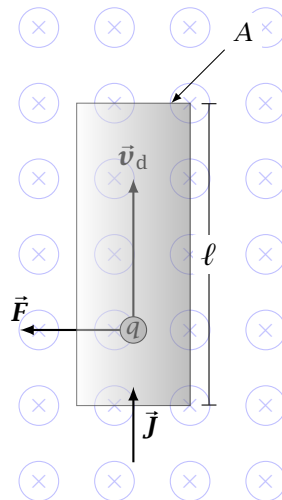
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- ▶ Varaustiheys $n \Rightarrow$ johtimen ℓ -pituisessa osassa on $nA\ell$ varausta
- ▶ Osassa liikkuviin varauksiin kohdistuu kokonaisvoima

$$F = (nA\ell)(qv_dB) = (nqv_dA)(\ell B)$$

- ▶ Virrantiheys $J = nqv_d = I/A$, joten

$$F = (JA)(\ell B) = I\ell B$$



Käyräviivaiset johtimet

- ▶ Jos johdin ja magneettikenttä eivät ole kohtisuorassa, voima

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

(virran kulkusuunta = $\vec{\ell}$:n suunta)

- ▶ Pätee myös negatiivisille virrankuljettajille ($q \rightarrow -e$, $\vec{v}_d \rightarrow -\vec{v}_d$)
- ▶ **Käyräviivainen johde** jaetaan suoriin osiin $d\vec{\ell}$, joten

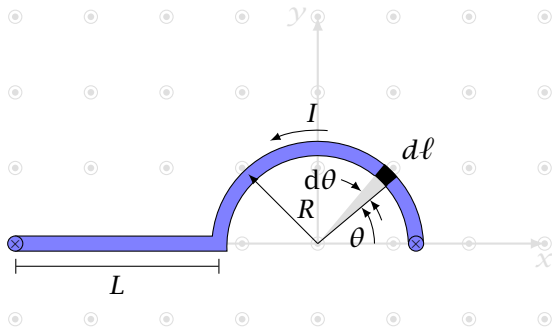
$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

(virta-alkioon kohdistuva magneettinen voima)

ja kokonaisvoima saadaan integroimalla johdinta pitkin

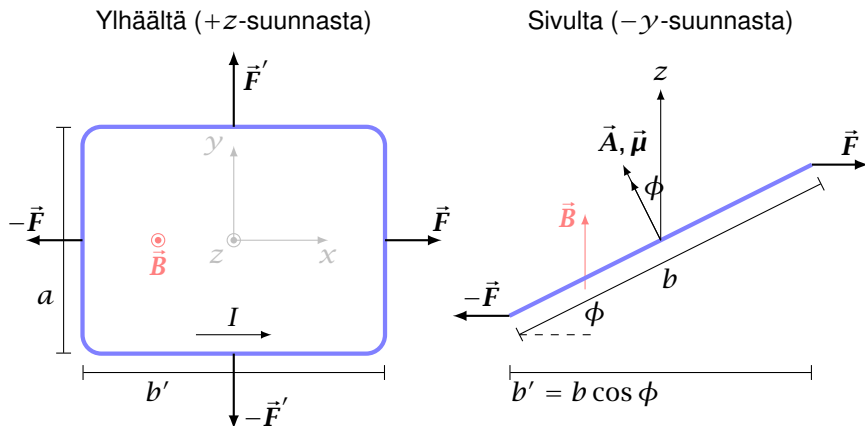
Esimerkki

Laske kuvan johtimeen kohdistuva magneettinen voima



Lopputulos: $\vec{F} = I(L + 2R)B\hat{j}$

Virtasilmukka tasaisessa magneettikentässä



- ▶ Voimaparien $\pm \vec{F}$ ja $\pm \vec{F}'$ nettovoima on nolla
- ▶ Voimapari $\pm \vec{F}$ aiheuttaa vääntömomentin y -akselin suhteen

Magneettidipoli

- ▶ Edellä voima $F = IaB$ ja $F' = Ib'B = IbB \cos \phi$ (muista: **tasainen** \vec{B})
- ▶ Voiman F aiheuttama vääntömomentti

$$\tau = 2 (b/2) F \sin \phi = IabB \sin \phi \stackrel{ab=A}{=} IAB \sin \phi$$

- ▶ Vääntömomentin amplitudilla on maksimi, kun $\phi = 90^\circ$, ja minimi, kun $\phi = 0^\circ$ tai 180°
- ▶ Tulo $IA \stackrel{\text{def}}{=} \mu$ on silmukan **magneettinen dipolimomentti** tai **magneettinen momentti**:

$$\tau = \mu B \sin \phi \quad \text{tai} \quad \boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

- ▶ Virtasilmukka tai muu vääntömomenttia lausekkeen mukaisesti kokeva kappale magneettikentässä on **magneettidipoli**
- ▶ **Magneettisen momenttivektorin** $\vec{\mu} = I\vec{A}$ suunta (= peukalo) saadaan oikean käden säännöllä virran kiertosuunnasta (= sormet); $\vec{\mu}$ on kohtisuorassa virtasilmukan tasoa vastaan

Magneettidipolin potentiaalienergia

- ▶ Magneettikenttä pyrkii kääntämään magneettidipolin niin, että $\vec{\mu}$ on samansuuntainen \vec{B} :n kanssa (vääntömomentti nollassi)
- ▶ Jos kenttä kääntää dipolia, se tekee työtä
- ▶ Sähkökentän sähködipoliin aiheuttaman vääntömomentin lauseke ($\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$) on samannäköinen magneettikentän magneettidipoliin aiheuttaman vääntömomentin kanssa, joten [vuorovaikutusten symmetrian perusteella](#)

$$U_{\mu} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

(magneettidipolin potentiaalienergia)

(muista: sähködipolille sähkökentässä $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$)

Yleinen virtasilmukka

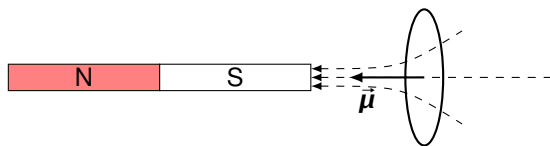
- ▶ Edelliset tulokset (vääntömomentti ja potentiaalienergia) johdettiin suorakaiteen muotoiselle virtasilmukalle
- ▶ Tulokset pätevät **mielivaltaiselle tasomaiselle virtasilmukalle**, päättely:
 - ▶ Jaetaan epäsäännöllinen **tasosilmukka** vierekkäisiin (äärettömän) kapeisiin suorakaidesilmukoihin
 - ▶ Vain suorakaiteiden ulkoreunojen virrat vaikuttavat, sisäreunojen vaikutukset kumoutuvat pareittain
- ▶ Jos N -kierroksinen **solenoidi** (kela) on **tasaisessa** magneettikentässä,

$$\mu = NIA \quad \Rightarrow \quad \tau = NIAB \sin \phi$$

- ▶ Dipolimomentti on solenoidin akselin suuntainen ja magneettikenttä pyrkii kääntämään solenoidin itsensä suuntaiseksi
- ▶ Magneettidipolin sovelluksia: d'Arsonvalin galvanometri, MRI-kuvaus (engl. magnetic resonance imaging)

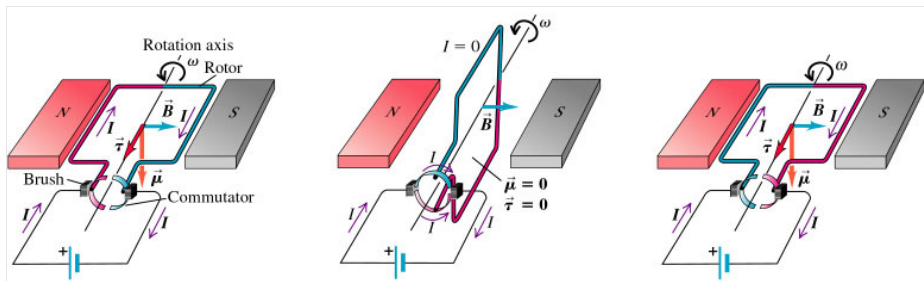
Virtasilmukka epähomogeenisessa magneettikentässä

- ▶ Tasaisessa magneettikentässä virtasilmukkaan ei kohdistu nettovoimaa
- ▶ Kestomagneetin S-navan epähomogeenisessa magneettikentässä virtasilmukka, jonka dipolimomentti osoittaa kohti kestmagneettia, pyrkii kohti napaa (entä pohjoisnavalla?)



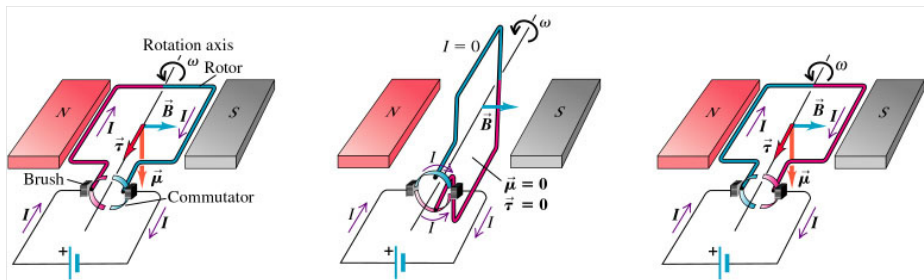
- ▶ Elektronilla on **spininsä** ansiosta magneettinen momentti
- ▶ Rauta-atomeissa (**toisin kuin** useimmissa muissa aineissa) monien elektronien momentit yhdensuuntaistuvat \Rightarrow rauta-atomeilla on magneettinen nettomomentti \Rightarrow raudan voi **magnetoida** kestmagneetiksi ja magneetin epähomogeeninen kenttä vetää (magnetoimatontakin) rautaa puoleensa

Tasavirtamoottorin osat



- ▶ Kiertyvä virtasilmukka on **roottori**
- ▶ Silmukan päät ovat kiinni **kommutaattorissa**
- ▶ Kommutaattorin johdelohkot koskettavat johtavia **harjoja**
- ▶ Harjat on kytketty smv:n lähteeseen (esim. paristo)

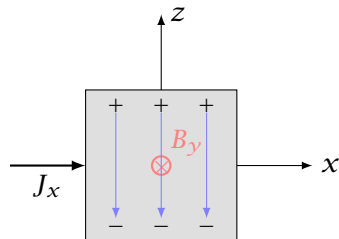
Toimintaperiaate



1. Vääntömomentti $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ kääntää roottorin $\vec{\mu}$:n magneettikentän suuntaiseksi
2. Harjat osuvat molempiin kommutaattorin lohkoihin (virta silmukassa katkeaa)
3. Roottori jatkaa pyörimistä (kulmaliikemäärä!), kunnes virta taas kulkee silmukassa

Hallin ilmiö

- ▶ Asetetaan johdelevy kohtisuorasti magneettikenttää vastaan
- ▶ Levyn läpi ohjataan virta x -akselin suuntaan
- ▶ Varaukseen q (> 0) kohdistuu voima $F_z = qv_d B_y$
- ▶ Varaukset erottuvat levyn vastakkaisiin reunoihin
 \Rightarrow sähkökenttä E_z [alaspäin]



- ▶ Tasapainossa $\sum F_z = 0 \Rightarrow qE_z + qv_d B_y = 0 \Rightarrow E_z = -v_d B_y$
- ▶ Virrantiheys $J_x = nqv_d$

$$\Rightarrow \boxed{nq = -\frac{J_x B_y}{E_z}}$$

Hallin ilmiö

- ▶ Sovelluksia: n :n, v_d :n tai erityisesti B_y :n mittaaminen

Yhteenveto luvusta 27

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Magneettikenttä \vec{B}
- ▶ Magneettinen voima \vec{F}
- ▶ Magneettivuo Φ_B
- ▶ Magneettidipoli ja magneettinen momentti $\vec{\mu}$
- ▶ Hallin ilmiö

Tärkeitä kaavoja

Magneettinen voima

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}} \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Gaussin laki magnetismille

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Magneettidipoli $\vec{\mu} = I\vec{A}$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U_\mu = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$