Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

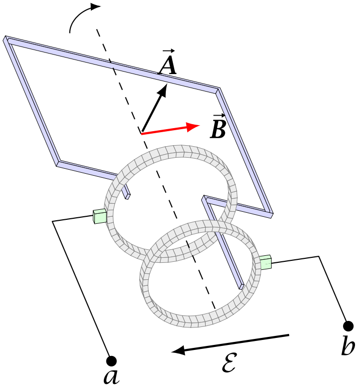
Luentoviikko 7

Sähkömagneettinen induktio (YF 29)

- Induktiokokeet
- Faradayn laki
- Lenzin laki
- Liikkeen tuottama smv
- Indusoituneet sähkökentät
- Pyörrevirrat
- Siirrosvirta ja Maxwellin yhtälöt
- Yhteenveto

Induktanssi ja muuntajat (YF 30.1–3, 31.6)

- Keskinäisinduktanssi
- Itseisinduktanssi ja kuristimet
- Magneettikentän energia
- Muuntajat
- Yhteenveto



Tavoitteena on oppia

- tuntemaan kokeellista todistusaineistoa, joka osoittaa, että muuttuva magneettikenttä indusoi sähkömotorisen voiman
- miten Faradayn laki liittää silmukkaan indusoituvan smv:n ja silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutoksen
- miten indusoituneen smv:n suunta määritetään
- miten lasketaan magneettikentän läpi liikkuvaan johtimeen indusoituva smv
- miten muuttuva magneettivuo tuottaa sähkökentän, joka on sangen toisenlainen kuin varausjoukon tuottama sähkökenttä
- neljä perusyhtälöä, jotka kattavasti kuvaavat sähkön ja magnetismin

Ajatuskoe

Asetetaan kela sähkömagneetin napojen väliin ja mitataan kelan virtaa

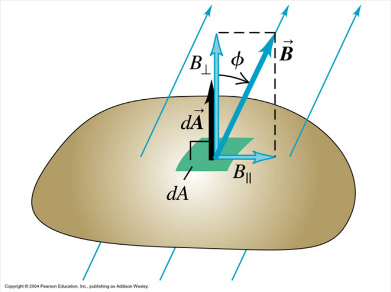
1. Sähkömagneetissa ei virtaa $\implies \vec{B} = \vec{0} \implies$ mittauskelassa ei kulje virtaa
2. Sähkömagneetti kytketään päälle: kelassa kulkee hetken virta, kun $\vec{B}$ kasvaa
3. $\vec{B}$ tasoittuu vakioarvoon: kelan virta häviää
4. Kelaa vedetään pois magneettikentästä, käännellään tai sen pinta-alaa muutetaan: kelassa virta kulkee muutoksen aikana
5. Kelan kierroksia puretaan: kelassa kulkee virta muutoksen aikana
6. Magneetti sammutetaan: kelassa kulkee virta hetkellisesti
7. Mitä nopeampia muutokset ovat, sitä suurempi kelan virta on
8. Vaihdetaan kelan materiaali (kelan resistanssi R): virta $\propto 1/R \implies$ indusoituva smv ei riipu kelan materiaalista [virran esiintyminen kielii smv:n lähteen olemassaolosta]

Johtopäätös: kelan läpi menevän magneettivuon muutos aiheuttaa **indusoituneen sähkömotorisen voiman** (ja indusoi piiriin virran)

Faradayn (induktio)laki

- Taustalla Michael Faradayn ja Joseph Henryn tekemät kokeet 1830-luvulla
- Induktiokokeissa muuttuvana suureena on magneettivuo Φ_B:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int B \cos\phi \, \mathrm{d}A$$



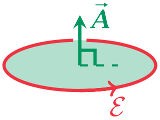
- Silmukaan indusoitunut sähkömotorinen voima $\mathcal{E}$ käy ilmi **Faradayn induktiolaista:**

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right]}$$

Suljettuun silmukkaan indusoitunut sähkömotorinen voima on silmukan läpi kulkevan magneettivuon negatiivinen aikaderivaatta

Indusoituneen smv:n suunta

Faradayn lakiin liittyvä oikean käden sääntö:



Kun peukalo osoittaa pinnan positiiviseen suuntaan ($\vec{A}$ tai $\mathrm{d}\vec{A}$), muut sormet osoittavat smv:n positiiviseen referenssisuuntaan ($\mathcal{E}$).

- Kiinnittämällä referenssisuunnat näin ja laskemalla oikein saadaan automaattisesti smv:n suunta oikein.
- Jos tarkasteltava silmukka on johtava, indusoitunut smv tuottaa siihen virran.
- Indusoitunut virta synnyttää magneettikentän vastakkaiseen suuntaan kuin ulkoisen kentän muutos.

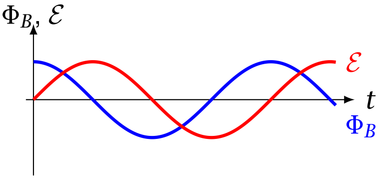
Induktiolain sovelluksia

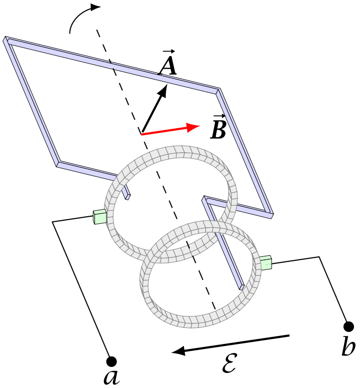
Vaihtovirtageneraattori

- Vuo $\Phi_B = BA\cos\phi$, missä $\phi = \omega t$
- Sähkömotorinen voima

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \omega BA\sin\omega t$$

- Φ_B:n ja $\mathcal{E}$:n välillä vaihesiirto (90°)

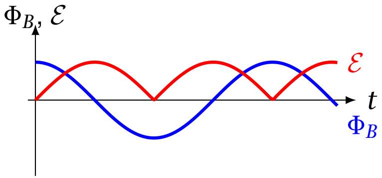


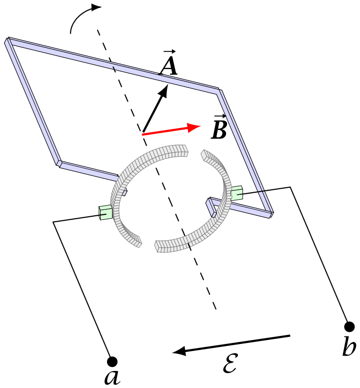


Induktiolain sovelluksia

Tasavirtageneraattori

- Kun roottorisilmukan smv poimitaan ulos kommutaattorin vastakkaisista lohkoista, generaattori tuottaa ”tasajännitettä”
- Mitä enemmän lohkoja ja silmukoita, sitä lähempänä smv on tasajännitettä





(Tasavirtamoottorissa syntyvää smv:tä kutsutaan vastasähkömotoriseksi voimaksi)

Lenzin laki

Lenzin laki auttaa indusoituneen smv:n tai virran (= ”induktiovaikutuksen”) suunnan määrittämisessä – laki sisältyy tavallaan Faradayn lain miinusmerkkiin ja liitty myös energian säilymiseen:

> Jokaisen magneettisen induktiovaikutuksen suunta on sellainen, että se vastustaa vaikutuksen aiheuttajaa.

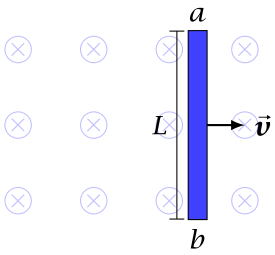
”Vaikutuksen aiheuttaja” voi olla paikoillaan olevan piirin läpi kulkevan magneettikentän aikariippuvuudesta aiheutuva vuon muutos, piirin johtimien liikkeestä aiheutuva vuon muutos tai näiden yhdistelmä:

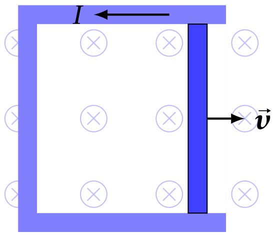
- Virtapiiriin indusoituneen virran suunta on sellainen, että virran luoma magneettikenttä vastustaa virtaa indusoivaa magneettivuon muutosta
- Magneettikentässä liikkuvaan sauvaan kohdistuu indusoituneen virran vaikutuksesta magneettinen voima, joka vastustaa sauvan liikettä

Magneettikentässä liikkuva sauva

- Johdesauva liikkuu nopeudella v kohtisuorasti magneettikentään nähden
- Positiiviset varaukset siirtyvät voiman $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ vaikutuksesta ylöspäin
- Sauvan päiden välille muodostuva sähkökenttä aiheuttaa voiman $q\vec{E}$ alaspäin
- Tasapainossa
  $qE = qvB \implies E = vB \quad \implies \quad V_{ab} = EL = vBL$
- U:n muotoisen, paikallaan olevan johtimen varauksiin ei kohdistu magneettista voimaa
- Sähkökenttä aiheuttaa virran piiriin

$\implies$ Liikkuva sauva on smv:n lähde





Liikkeen tuottama sähkömotorinen voima

- Kun L ja v ovat kohtisuorassa B:tä vastaan,

$$\mathcal{E} = vBL$$

- Yleistettynä johdinalkiolle $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ ja suljetulle virtapiirille magneettikentässä $\vec{\boldsymbol{B}}$ saadaan

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{E} = (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E} = \oint (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

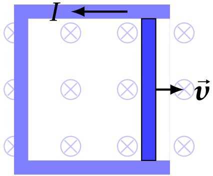
(liike-smv)

- Kun virtapiirin johdin liikkuu,

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}},$$

kunhan integrointipinta valitaan sopivasti (eli miten?)

Energia ja työ



- Äsken määritettiin liukulankageneraattoriin indusoitunut smv $V_{ab} = vBL$. Jos kuvan silmukan resistanssi on R, indusoitunut virta $I = V_{ab}/R$ ja lämpöteho $P = I^2R$.
- Ulkoinen voima $F = ILB$ liikuttaa johdesauvaa oikealle (eli tekee työtä). Mekaaninen teho $P = Fv$.
- Laskemalla huomaa, että mekaaninen teho = lämpöteho, eli sähkögeneraattorit muuttavat mekaanista työtä sähköenergiaksi.
- Tiedetään, ettei magneettikenttä voi tehdä työtä varaukselle – miten magneettikenttä ”tekee” työtä generaattorissa (virta = varausten liikettä)?
  - ⇒ Jonkinlainen sähkökenttä on oltava ratkaisevassa roolissa.

Mikä liikuttaa varauksia?

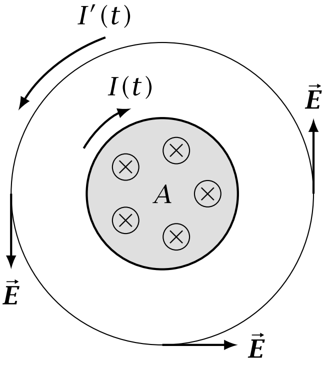
- Mikä saa varaukset liikkeelle, kun vuo paikallaan pysyvän piirin läpi muuttuu?
- Tarkastellaan pitkää ohutta solenoidia; solenoidin sisällä $B = \mu_0 n I$
- Vuo kelanulkoisen johdinsilmukan läpi (val. $\vec{A} \upuparrows \vec{B}$)

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n I A$$

- Jos solenoidin virta I riippuu ajasta, silmukkaan indusoituu smv

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n A \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

- Smv:tä vastaa silmukan virta $I' = \mathcal{E}/R$



Indusoitunut sähkökenttä

- Johdinsilmukan kohdalla $B = 0 \implies$ johtimen varauksiin ei kohdistu magneettista voimaa
- Varausten liikuttajana on (virran tuottaa) ilmeisesti sähkökenttä $\implies$

  Ajan myötä muuttuva magneettivuo indusoi sähkökentän

- Kun varaus q kulkee yhden kierroksen johdinsilmukassa, tämä sähkökenttä tekee työn $W = q\mathcal{E} \neq 0$
- Indusoitunut sähkökenttä on ei-sähköstaattinen ja **ei-konservatiivinen,** koska

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathcal{E} \neq 0$$

  $\implies$ ei-konservatiiviselle kentälle potentiaalin käsite ei ole mielekäs

- **Faradayn laki** voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}}$$

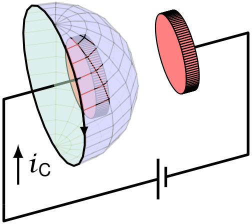
[kun integrointitie on liikkumaton]

- Huomaa: $\mathcal{E} = -\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$ toimii aina. Lisäksi $\vec{F} = q\vec{E}$ pätee aina. Sähköstaattinen kenttä on aina konservatiivinen.

Pyörrevirrat

- Tähän asti on tarkasteltu induktioilmiöitä ohuissa virtapiirien johtimissa
- Monissa sähkökojeissa on massiivisia magneettikentissä liikkuvia johdekappaleita – indusoitunut virta kiertää kappaleen koko tilavuudessa kuin pyörteet koskessa: virtoja nimitetään **pyörrevirroiksi**
- Esimerkkinä olkoon pyörivä metallilevy, joka on osittain magneettikentässä
  - Muuttuvan magneettivuon (ts. johtimen liikkeen) takia levyyn indusoituu virta magneettikentän kohdalle
  - Paluuvirrat kiertävät pyörteenomaisesti magneettikenttäalueen ulkopuolelta takaisin
  - Magneettikenttä kohdistaa alueellaan pyörrevirtaan voiman, joka (Lenzin lain mukaisesti) pyrkii vastustamaan kiekon liikettä $\implies$ pyörrevirtajarru
- Muita pyörrevirtojen sovelluksia ovat induktioliesi, metallinpaljastimet, ainetta rikkomaton testaus...
- Pyörrevirrat aiheuttavat i^2R-häviöitä muuntajien ja sähkökoneiden raudassa $\implies$ käytettävä **laminoituja** eli kerrostettuja rakenteita

Lävistyslain vajavaisuus



- Tarkastellaan levykondensaattorin varautumista
- Kondensaattorin varautuessa johtimissa kulkee hetkellisvirta i_C (johtavuusvirta)
- Muodostetaan kaksi pintaa, joilla on sama reunakäyrä: tasopinta (vihertävä) ja puolipallon muotoinen pinta (sinertävä), joka pullistuu levyjen väliin
- Reunakäyrällä ja tasopinnalla lävistyslain mukaisesti

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl,taso}} = \mu_0 i_C$$

- Toisaalta puolipallon läpi ei kulje johtavuusvirtaa, joten vaikka reunakäyrä on sama, $\mu_0 I_{\text{encl,puolipallo}} = 0 = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \;\lightning\; \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_C$
- Ampèren lain yleistys?

Siirrosvirta ja yleistetty Ampèren laki

- Kun kondensaattori (kapasitanssi C) varautuu, hetkellisesti

$$q = Cv = \frac{\varepsilon A}{d}(Ed) = \varepsilon EA = \varepsilon \Phi_E \quad \text{ja} \quad i_C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t},$$

  missä Φ_E sähkökentän vuo ja v on levyjen hetkellispotentiaaliero

- Väitämme, että levyjen ”välissä” kulkee **siirrosvirta** $\boxed{i_D = \varepsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}}$
- Ristiriita korjautuu: tasopinnan läpi kulkee virta i_C ja puolipallon pinnan ”läpi” virta $i_D = i_C$
- **Yleistetty Ampèren laki** saa muodon $\boxed{\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \left(i_C + i_D\right)_{\text{encl}}}$
- Siirrosvirran keksi James Clerk Maxwell vuonna 1865
- Siirrosvirrantiheys $j_D = \frac{i_D}{A} = \frac{\varepsilon}{A}\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$

Siirrosvirran todellisuus

- Tuottaako siirrosvirta magneettikentän kondensaattorilevyjen väliin?
- Virta r-säteisen ympyrän "läpi" (R-säteisten levyjen välissä) on

$$i_{\mathrm{D,encl}} = j_{\mathrm{D}} A(r) = \frac{i_{\mathrm{D}}}{\pi R^2} \pi r^2 = i_{\mathrm{D}} \frac{r^2}{R^2}$$

- Ampèren lain mukaisesti r-säteisellä integrointitiellä

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = 2\pi r B = \mu_0 i_{\mathrm{D,encl}} = \mu_0 i_{\mathrm{D}} \frac{r^2}{R^2} \quad \overset{i_{\mathrm{D}} = i_{\mathrm{C}}}{\Longrightarrow} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_{\mathrm{C}}$$

- Kondensaattorin akselilla $B = 0$ ja reunalla $B = \mu_0 i_{\mathrm{C}}/(2\pi R)$; kondensaattorin ulkopuolella B on kuten johtimella (levyjen olemassaoloa ei havaita [hajakentät on jätetty huomioon ottamatta])
- Tämä magneettikenttä on mitattavissa $\Longrightarrow$ siirrosvirta on todellisuutta kuvaava käsite oikein tulkittuna
- (Yleistetty) Ampèren laki pätee magneettisessa materiaalissa, kunhan magnetoituma on verrannollinen ulkoiseen kenttään ja $\mu_0 \to \mu$

Maxwellin yhtälöt tyhjiössä

Nyt voimme koota yhteen kaikki sähkö- ja magneettikenttien lähteiden ja kenttien yhteyksiä kuvaavat lait eli **Maxwellin yhtälöt** (kuten Maxwell aikanaan teki):

$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_0}$	Gaussin laki
$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$	magnetismin Gaussin laki
$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \left(i_{\mathrm{C}} + \varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right] \right)_{\mathrm{encl}}$	Ampèren laki
$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right]$	Faradayn laki

(Ampèren ja Faradayn laeissa on oikean käden suunnastus. Faradayn lain viivaintegraali on määritettävä liikkumatonta tietä pitkin. Varaukset ja virrat ovat [ei-tyhjässä] tyhjiössä.)

Sähkökentän osat

- Yleisessä tilanteessa sähkökenttä $\vec{E}$ muodostuu konservatiivisesta (c, varausten tuottama osa) ja ei-konservatiivisesta (n, induktion tuottama osa) osasta:

$$\vec{E} = \vec{E}_\mathrm{c} + \vec{E}_\mathrm{n}$$

- Osille pätee

$$\oint \vec{E}_\mathrm{c} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \quad \text{ja} \quad \oint \vec{E}_\mathrm{n} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

  - $\vec{E}$ saa olla kokonaiskenttä Faradayn laissa $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$
  - $\vec{E}$ saa olla kokonaiskenttä Gaussin laissa $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{Q_\mathrm{encl}}{\varepsilon_0}$

$\Longrightarrow$ Maxwellin yhtälöt eivät erottele konservatiivisia ja ei-konservatiivisia kenttiä (yhtälöiden $\vec{E}$ on kokonaissähkökenttä)

Maxwellin yhtälöiden symmetria

- Tyhjässä avaruudessa $i_C = 0$ ja $Q_{\text{encl}} = 0$, joten $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ ja

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- Ajasta riippuva sähkökenttä indusoi aina magneettikentän lähiavaruuteen ja päinvastoin: yhtälöt enteilevät eteneviä sähkömagneettisia ”häiriöitä” eli **sähkömagneettisia aaltoja**
- Maxwellin yhtälöt sisältävät kaikki kenttien ja niiden lähteiden yhteydet; kun yhtälöt täydennetään voimalailla $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, meillä on **kaikki** sähkömagnetismin perusyhtälöt!
- (Miten magneettisten varausten löytyminen muuttaisi yhtälöitä?)
- Newtonin liikelait, termodynamiikan lait, Maxwellin yhtälöt, suhteellisuusteoria ja kvanttifysiikka ovat ”samaa sarjaa”

Yhteenveto luvusta 29

Keskeisiä käsitteitä

- Magneettivuo Φ_B pinnan läpi
- Indusoitunut sähkömotorinen voima $\mathcal{E}$ ja indusoitunut virta I
- Lenzin laki
- Indusoitunut sähkökenttä
- Pyörrevirta
- Siirrosvirta $i_{\mathrm{D}} = \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$

Tärkeitä kaavoja

Faradayn induktiolaki

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}}$$

Liike-smv

$$\mathcal{E} = \int (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

Yleistetty Ampèren laki

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 \left(i_{\mathrm{C}} + i_{\mathrm{D}}\right)_{\mathrm{encl}}$$

Induktioilmiö:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}} \longrightarrow \boxed{\mathcal{E}, \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{n}}} \xrightarrow[\text{johtava silmukka}]{} \boxed{I} \longrightarrow \boxed{B}$$

Induktanssi ja muuntajat (YF 30.1–3, 31.6)

Tavoitteena on oppia

- miten aikariippuva virta yhdessä kelassa indusoi smv:n toiseen, erilliseen kelaan
- miten piiriin indusoituva smv liittyy virran muutosnopeuteen samassa piirissä
- miten lasketaan magneettikenttään varastoitunut energia
- miksi muuntajat ovat hyödyllisiä ja miten ne toimivat

Induktio ja induktanssi

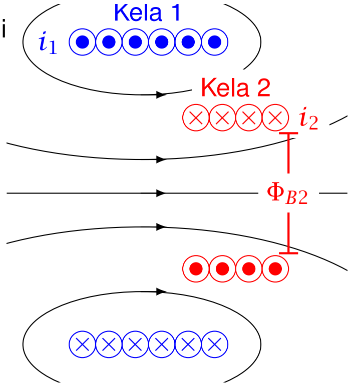
- Jos kelassa tai virtajohtimessa kulkee virtaa, muodostuu magneettikenttä
- Jos virta riippuu ajasta, magneettikenttäkin riippuu ajasta
- Ajasta riippuva magneettikenttä indusoi läheisiin kappaleisiin sähkömotorisen voiman, joka herättää virran, mikäli kappale (a) on johdetta ja (b) muodostaa suljetun silmukan
- Näiden ensiö- ja toisiovirtojen riippuvuutta toisistaan kuvataan **keskinäisinduktanssilla** M
- Muuttuva virta kelassa aiheuttaa muuttuvan magneettikentän, joka indusoi sähkömotorisen voiman myös kelaan itseensä: tämä on **itseisinduktanssi** L

Keskinäisinduktanssi

- Kela 1: N_1 kierrosta, muuttuva virta i_1 [huomaa pieni kirjain] $\implies$ muuttuva magneettikenttä, eli kelan 2 läpi kulkee muuttuva magneettivuo
- Kela 2: N_2 kierrosta, virran i_1 synnyttämän magneettivuon indusoima smv kelaan 2 on

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_{B2}}{\mathrm{d}t},$$

jos vuo yhden kierroksen läpi on Φ_{B2}



- Määritellään verrannollisuuskerroin keskinäisinduktanssi M_{21}:

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21} i_1 \quad \implies \quad N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_{B2}}{\mathrm{d}t} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \implies \quad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Keskinäisinduktanssi

- Keskinäisinduktanssi on symmetrinen suure: $M_{21} = M_{12} = M$, joten

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{ja} \quad \mathcal{E}_2 = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

- **Keskinäisinduktanssi**

$$\boxed{M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2}} \qquad [M] = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \Omega\,\mathrm{s} \stackrel{\text{def}}{=} \text{henry} = \mathrm{H}$$

- Keskinäisinduktanssista on haittaa sähköpiireissä, koska muuttuva virta yhdessä piirissä voi aiheuttaa ei-toivotun virran toisessa piirissä
- Keskinäisinduktanssin tärkeä sovelluskohde on muuntaja, jolla vaihtovirtapiireissä nostetaan ja lasketaan jännitteitä

Teslan käämi

- Teslan käämi: sylinterimäisessä kelassa (pituus ℓ, poikkipinta-ala A) on N_1 kierrosta, ja sitä ympäröi toinen kela, jossa on N_2 kierrosta
- Jos sisäkelassa on virta i_1, kelan keskiakselilla magneettikenttä

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{\ell}$$

- Keskinäisinduktanssi

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{\ell} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{\ell}$$

- M riippuu vain geometriasta, ei virrasta
- Esim. $\ell = 0.50\,\mathrm{m}$, $A = 10\,\mathrm{cm}^2$, $N_1 = 1000$, $N_2 = 10 \quad \Longrightarrow \quad M = 25\,\mu\mathrm{H}$

Itseisinduktanssi

- Tarkastellaan yksittäistä virtapiiriä: piirissä kulkeva virta (i) synnyttää magneettivuon (Φ_B) piirin itsensä läpi; jos virta muuttuu, magneettivuo muuttuu ja piiriin syntyy itseisindusoitunut smv $\mathcal{E}$
- N-kierroksisen kelan **itseisinduktanssi** eli vain **induktanssi**

$$\boxed{L = \frac{N\Phi_B}{i}} \qquad [L] = \text{henry}$$

- Määritelmästä seuraa, että $N\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ja edelleen Faradayn lain perusteella

$$\mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

(itseisindusoitunut smv)

- Piirin itseisinduktanssi on itseisindusoituneen smv:n suuruus virran yksikkömuutosta kohden

Kuristin

- **Kuristin** eli **kela** on komponentti, jolla nimenomaisesti on induktanssia (elektroniikan peruskomponentti vastusten ja kondensaattorien kanssa)
- Kuristimen tehtävä on vastustaa piirin virran muutoksia (vrt. kondensaattori, joka vastustaa jännitteen muutoksia)
- Tarkastellaan virtapiiriin kytkettyä kelaa
- Jos piirissä ei olisi kelaa, piirin potentiaalierot summautuisivat nollaksi yhden kierroksen aikana (sähköstaattinen kenttä on konservatiivinen)
- Kelan lisääminen muuttaa tilanteen: kelassa on (myös) ei-konservatiivinen sähkökenttä $\vec{E}_\mathrm{n}$
- Oletetaan (lähes) vastukseton kela $\implies$ häviävän pieni kokonaissähkökenttä $\vec{E}_\mathrm{c} + \vec{E}_\mathrm{n}$ riittää varauksen kuljettamiseen kelan läpi $\implies$ $\vec{E}_\mathrm{c}$ (sähkökentän konservatiivinen osa) ei ole nolla $\implies$ kelassa on sähkövarausta

Kela virtapiirissä

- Piiriin itseisindusoitunut sähkömotorinen voima (kun virta i kulkee $a \to b$ kelan induktanssissa L ja $\vec{E}_\mathrm{n} \neq \vec{0}$ vain kelassa)

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_\mathrm{n} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E} = \int_a^b \vec{E}_\mathrm{n} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- Koska kela oletettiin vastuksettomaksi, $\vec{E}_\mathrm{c} + \vec{E}_\mathrm{n} = \vec{0}$ ja

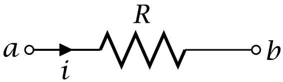
$$\mathcal{E} = \int_a^b (-\vec{E}_\mathrm{c}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -(V_a - V_b) = -V_{ab} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{V_{ab} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

$\Longrightarrow$ Kelan napojen välillä on sähköstaattisten voimien tuottama jännite, jota voi käsitellä vastusten tai kondensaattorien jännitteiden tapaan

- Itseisindusoitunut smv vastustaa virran muutosta, ei virtaa
  - Esim. loisteputken kanssa on sarjakytkettynä kuristin, joka hillitsee putkensisäisessä plasmassa kulkevaa virtaa ja toisaalta pitää virran kulkemassa, kun vaihtojännitteen napaisuus vaihtuu

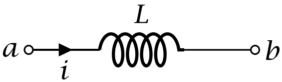
Vastus vs. kela

Vastus



- $V_{ab} = iR$
- Virta kulkekoon $a \to b$
- Potentiaaliero $V_{ab} > 0$ eli potentiaali putoaa kuljettaessa $a \to b$

Kela



- $V_{ab} = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
- Virta kulkekoon $a \to b$
- Jos $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t > 0$, potentiaaliero $V_{ab} > 0$ eli potentiaali putoaa $a \to b$
- Jos $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t < 0$, potentiaaliero $V_{ab} < 0$ eli potentiaali kasvaa $a \to b$
- Jos i on vakio, potentiaaliero $V_{ab} = 0$ eli potentiaali pysyy samana $a \to b$

Toroidin itseisinduktanssi

- Toroidin magneettivuon tiheys $B = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r}$
- Magneettivuo $\Phi_B = BA = \dfrac{\mu_0 N i A}{2\pi r}$
- Itseisinduktanssi $L = \dfrac{N\Phi_B}{i} = \dfrac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$

- Esim: $N = 200$, $A = 5.0\,\mathrm{cm}^2$ ja $r = 0.10\,\mathrm{m} \implies L = 40\,\mu\mathrm{H}$
- Toisaalta jos toroidilla rautasydän ($K_m = 5000$): $L = 200\,\mathrm{mH}$

Kelan magneettinen energia

- Jos kelan napojen välillä on jännite $V_{ab} = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, kun kelan läpi kulkee kasvava virta i, kelaan syötetään hetkellisteho $P = V_{ab}i = Li\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$
- Kelaan syötetään ajassa $\mathrm{d}t$ energia

$$\mathrm{d}U = P\,\mathrm{d}t = Li\,\mathrm{d}i$$

- Kun virta kasvaa nollasta arvoon I, kelaan syötetään kokonaisenergia

$$\boxed{U = L\int_0^I i\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2}$$

(kelan magneettinen energia)

Kelan magneettikentän energia

- Otetaan esimerkiksi tyhjiötäytteinen toroidi:

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} I^2$$

- Kokonaisenergiaa tilavuudessa V vastaa energiatiheys

$$u = \frac{U}{V} \approx \frac{U}{2\pi r A} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2}$$

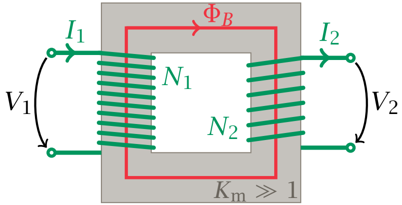
- Toroidin magneettikenttä $B = \mu_0 N I / (2\pi r)$, joten **magneettikentän energiatiheys**

$$\boxed{u = \frac{1}{2\mu_0} B^2} \qquad \left(\text{vrt. } u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$$

- Jos kelan sisällä on magneettista ainetta ($\mu = K_\mathrm{m} \mu_0$), $\boxed{u = \frac{1}{2\mu} B^2}$

Muuntajat

- **Muuntajassa** on kaksi käämitystä (kelaa) yhteisen (rauta)sydämen ($K_\mathrm{m} \gg 1$) ympärillä eristettyinä toisistaan.
- Keskinäisinduktanssin avulla saadaan vaihtojännitteen tasoa muutettua.
- (Vaihtojännitteet V_1, V_2 ja virrat I_1, I_2 ovat tehollisarvoja.)



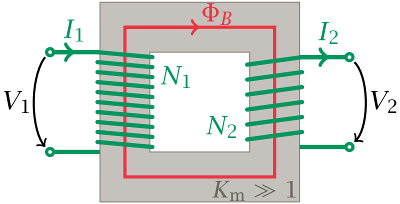
- Teho syötetään **ensiökäämiin** (1) ja otetaan ulos **toisiokäämistä** (2).
- Ensiökäämiin syötetty vaihtovirta I_1 tuottaa sydämeen muuttuvan magneettikentän, joka indusoi toisiokäämiin samantaajuisen virran.
- Magneettivuo Φ_B pysyy (lähes täydellisesti) sydämessä, joten käämien välinen keskinäisinduktanssi maksimoituu.

Ideaalimuuntaja

Ideaalimuuntaja on häviötön ja sillä on sama Φ_B käämien kaikissa kierroksissa.

Faradayn lain avulla saadaan

$$V_1 = -N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}, \quad V_2 = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$



(häviöttömässä tapauksessa smv = napajännite)

Häviöttömässä tapauksessa antoteho = syötetty teho, joten

$$\boxed{V_1 I_1 = V_2 I_2}$$

- Käämityksen suunnat on valittu jotta kaavoihin ei tulisi miinusmerkkiä (tarkista Lenzin lailla).
- Millaisena toisiokäämiin kytketty vastus R näkyy ensiöpuolella?

Yhteenveto luvusta 30.1–3, 31.6

Keskeisiä käsitteitä

- Keskinäisinduktanssi M
- Itseisinduktanssi L
- Kuristin eli kela
- Magneettinen energia
- Muuntaja

Tärkeitä kaavoja

Keskinäisinduktanssi

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2}$$

Itseisinduktanssi

$$L = \frac{N \Phi_B}{i}$$

Kelan napajännite ja energia

$$V_{ab} = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \qquad U = \frac{1}{2} L I^2$$

Ideaalimuuntaja

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}, \qquad V_1 I_1 = V_2 I_2$$