Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

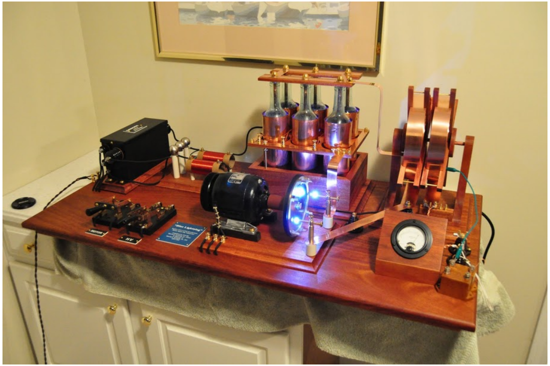
Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 8

Sähkömagneettiset aallot (YF 32)

- Maxwellin yhtälöt ja sähkömagneettiset aallot
- Sähkömagneettiset tasoaallot ja valon nopeus
- Sinimuotoiset sähkömagneettiset aallot
- Sähkömagneettisten aaltojen energia ja liikemäärä
- Seisovat sähkömagneettiset aallot
- Aallot hyvässä johteessa
- Yhteenveto



Lähde: `http://vintagehamstation.com/n4ggspark.htm`

Tavoitteena on oppia

- miksi valoaallossa on sekä sähkö- että magneettikenttä
- miten valon nopeus liittyy sähkön ja magnetismin luonnonvakioihin
- miten kuvataan sinimuotoisen sähkömagneettisen aallon etenemistä
- mikä määrää sähkömagneettisen aallon kuljettaman tehon
- miten kuvataan seisovia sähkömagneettisia aaltoja

Maxwellin yhtälöt väliaineessa

Jos avaruudessa on (mahdollisesti paikan mukana muuttuvaa) väliainetta ε, μ, yhtälöt saavat muodon (muista kätisyys- ja liikkumattomuusehdot!):

$$\oint \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\text{encl}-\text{free}} \qquad \text{Gaussin laki}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \text{magnetismin Gaussin laki}$$

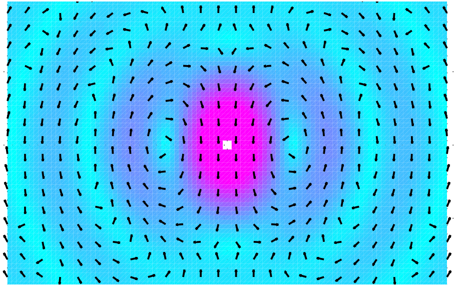
$$\oint \frac{1}{\mu}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \left(i_{\text{C,free}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right] \right)_{\text{encl}} \qquad \text{Ampèren laki}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{Faradayn laki}$$

- $Q_{\text{encl}-\text{free}}$ on vapaa varaus Gaussin pinnan sisällä (esim. johteen varauksenkuljettajat tai kappaleelle annettu nettovaraus; eristeen polarisoitumisessa syntyvä pintavaraus ei ole vapaata vaan sidottua varausta)
- $i_{\text{C,free}}$ on vapaa johtavuusvirta [integrointisilmukan läpi] (magnetoitumisessa esiintyvien magneettisten dipolien virta ei ole vapaata vaan sidottua virtaa)

Maxwellin yhtälöiden seurauksia

- Staattinen pistevaraus luo sähkökentän
- Tasaisesti (= vakiovauhdilla) liikkuva varaus luo sekä sähkö- että magneettikentän, mutta kentät voi analysoida erikseen
- Kiihtyvässä liikkeessä oleva varaus lähettää **sähkömagneettisia aaltoja** eli **sähkömagneettista säteilyä,** joten sähkö- ja magneettikentät on analysoitava yhdessä



(Harmonisesti värähtelevän sähködipolin tuottama sähkökenttä eräällä hetkellä)

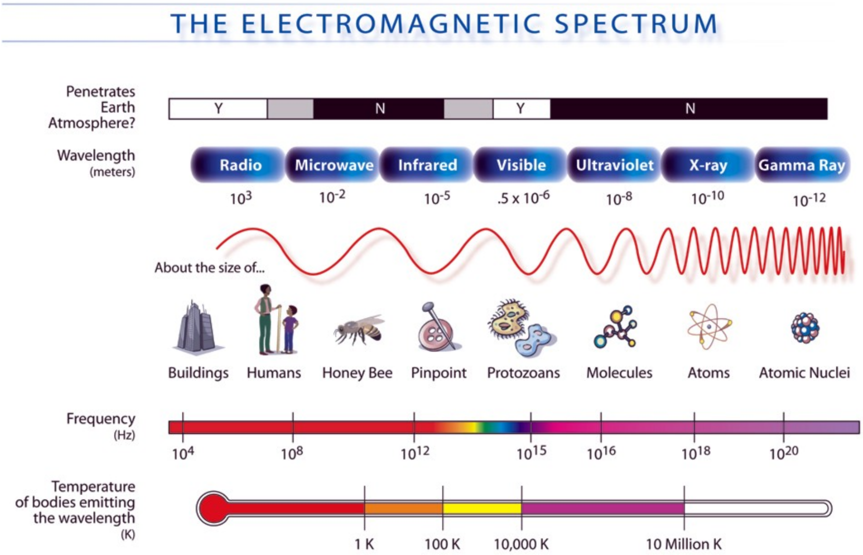
Sähkömagneettinen spektri

- **Sähkömagneettinen spektri** sisältää kaikentaajuiset (eli kaikenaallonpituuksiset) sähkömagneettiset aallot
- Aallon taajuus f, aallonpituus λ ja valonnopeus tyhjiössä yhdistyvät yhteyden $c = \lambda f$ kautta, $c \equiv 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \approx 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$

radioaallot	$\lambda \approx 10\,\mathrm{cm}$ – useita km
mikro- ja millimetriaallot	$1\,\mathrm{mm} - 10\,\mathrm{cm}$
(terahertsiaallot	$0.1\,\mathrm{mm} - 1\,\mathrm{mm}$)
infrapuna (IR)	$780\,\mathrm{nm} - 1\,\mathrm{mm}$
kaukoinfrapuna	$50\,\mathrm{\mu m} - 1000\,\mathrm{\mu m}$
keski-infrapuna	$3\,\mathrm{\mu m} - 50\,\mathrm{\mu m}$
lähi-infrapuna	$0.78\,\mathrm{\mu m} - 3\,\mathrm{\mu m}$
näkyvä valo	$390\,\mathrm{nm} - 780\,\mathrm{nm}$
ultravioletti (UV)	$10\,\mathrm{nm} - 390\,\mathrm{nm}$ $(3.2\,\mathrm{eV} - 100\,\mathrm{eV})$
röntgensäteet	$100\,\mathrm{eV} - 0.1\,\mathrm{MeV}$
gammasäteet	$0.1\,\mathrm{MeV} - 10\,\mathrm{TeV}$

Sähkömagneettinen spektri

Hieman epämääräinen havainnollistus

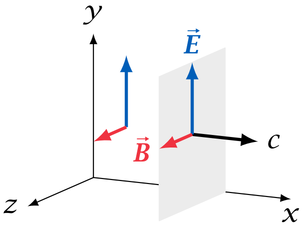


http://mynasadata.larc.nasa.gov/glossary/electromagnetic-spectrum-2/

Yksinkertainen tasoaalto

Alkuasetelma

- Etsitään sähkömagneettisten aaltojen ja sähkömagnetismin lakien välinen yhteys
- Oletetaan, että x-akselia vastaan kohtisuora taso jakaa tyhjän avaruuden kahteen osaan siten, että
  - kaikkialla tason ”takana” (kuvassa vasemmalla) on tasainen y-suuntainen $\vec{E}$-kenttä ja tasainen z-suuntainen $\vec{B}$-kenttä
  - kaikkialla tason ”edessä” (oikealla) ei ole $\vec{E}$- eikä $\vec{B}$-kenttiä



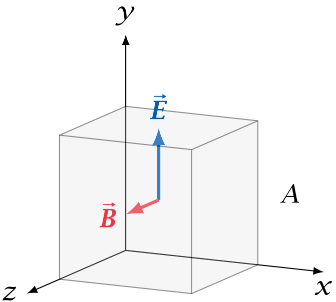
Toteutuvatko Maxwellin yhtälöt?

- Oletetaan, että jakava taso eli **aaltorintama** etenee $+x$-akselin suuntaan (toistaiseksi määrittelemättömällä) nopeudella c
- Kyseessä on **tasoaalto** (= kentät aaltorintaman takana ovat vakioita rintaman kanssa yhdensuuntaisilla tasoilla)

Yksinkertainen tasoaalto

Gaussin lakien toteutuminen

- Valitaan kuvan mukainen Gaussin pinta (päätyjen pinta-ala on A ja rintama osuu laatikkoon vektorien kohdalle)
- Tyhjä tila $\implies$ ei varauksia
- Kuvitellaan hetken, että $E_x, B_x \neq 0$:



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -E_x A = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_0} = 0$$

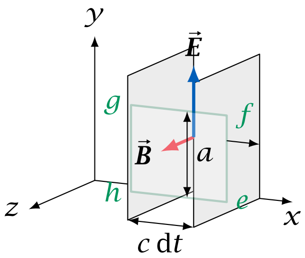
$$\implies \quad E_x = 0;$$

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -B_x A = 0 \quad \implies \quad B_x = 0$$

- Gaussin lait toteutuvat, jos $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ ovat kohtisuorassa etenemissuuntaan nähden eli **poikittaisia;** valitaan $\vec{E} = \hat{\jmath} E_y = \hat{\jmath} E$

Yksinkertainen tasoaalto

Faradayn lain toteutuminen



- Kiinteä integrointipolku ja -suunta: $efgh$
- Vain sivu gh vaikuttaa integraaliin (miksi?):

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -Ea = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad (\Rightarrow B_z \neq 0)$$

- Ajassa $\mathrm{d}t$ aaltorintama liikkuu matkan $c\,\mathrm{d}t$ ja pyyhkäisee pinta-alan $ac\,\mathrm{d}t$ ($efgh$:ssa)
- Magneettivuon muutos $efgh$-pinnan läpi ($\vec{B} = \hat{k}B_z = \hat{k}B$)

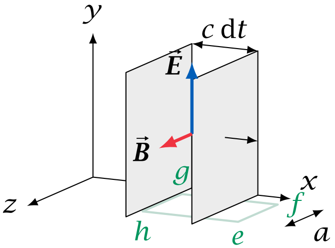
$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Bac\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = Bac \quad \Rightarrow \quad -Ea = -Bac \Leftrightarrow E = cB$$

- Faradayn laki toteutuu, jos $\boxed{E = cB \quad \text{(tyhjiössä)}}$

(hetkinen: voisiko $\vec{B}$:llä olla y-komponentti? [ei voi, koska $E_x = E_z = 0$])

Yksinkertainen tasoaalto

Ampèren lain toteutuminen



- Kiinteä integrointipolku ja -suunta: $efgh$
- Vain sivu gh vaikuttaa integraaliin (?):

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = Ba = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \quad (\Rightarrow E_y \neq 0)$$

- Ajassa $\mathrm{d}t$ aaltorintama liikkuu matkan $c\,\mathrm{d}t$ ja pyyhkäisee pinta-alan $ac\,\mathrm{d}t$ ($efgh$:ssa)
- Sähkövuon muutos $efgh$-pinnan läpi

$$\mathrm{d}\Phi_E = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Eac\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = Eac \quad\Rightarrow\quad Ba = \mu_0\varepsilon_0 Eac \;\Leftrightarrow\; B = \mu_0\varepsilon_0 cE$$

- Ampèren laki toteutuu, jos $\boxed{B = \mu_0\varepsilon_0 cE \quad \text{(tyhjiössä)}}$

Sähkömagneettisten aaltojen pääominaisuudet

- Faradayn ja Ampèren laki toteutuvat yhtäaikaa, kun

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c \equiv c_0 \equiv 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3.00\times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \qquad \text{(tyhjiössä)}$$

- Sähkömagneettisten (taso)aaltojen ominaisuudet:

1. Aalto on **poikittainen:** $\vec{E} \perp \vec{B} \perp$ aallon etenemissuunta ($= \vec{E} \times \vec{B}$:n suunta)
2. $\vec{E}$:n ja $\vec{B}$:n **amplitudit** ovat suhteessa toisiinsa: $E = cB$
3. Aalto etenee tyhjiössä **valonnopeudella** c, joka on vakio
4. Sähkömagneettinen aalto **ei tarvitse väliainetta** edetäkseen

- Juuri käsiteltyjen ”askel-” tai ”palikka-aaltojen” superpositio toteuttaa Maxwellin yhtälöt, kun kaikki osa-aallot etenevät samalla nopeudella $c \implies$ myös sinimuotoinen tasoaalto toteuttaa yhtälöt

Sähkömagneettinen aaltoyhtälö

Toistetaan Faradayn laki ja Ampèren laki -tarkastelut tasoilla $x = x$ ja $x = x + \Delta x$ poikittaisille kentille E_y ja B_z, jotka ovat x:n ja t:n funktioita

- Faradayn laki antaa

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -E_y(x,t)a + E_y(x+\Delta x, t)a = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} a\Delta x$$

$$\Longrightarrow \ \dots \ \Longrightarrow \quad \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}, \quad \text{kun } \Delta x \to 0$$

- Ampèren laki antaa

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -B_z(x+\Delta x, t)a + B_z(x,t)a = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} a\Delta x$$

$$\Longrightarrow \ \dots \ \Longrightarrow \quad -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}, \quad \text{kun } \Delta x \to 0$$

Sähkömagneettinen aaltoyhtälö

Jatkoa

- Otetaan Faradayn lain antamasta tuloksesta osittaisderivaatta x:n suhteen ja Ampèren lain antamasta tuloksesta osittaisderivaatta t:n suhteen ja eliminoidaan B_z:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} \quad \& \quad -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

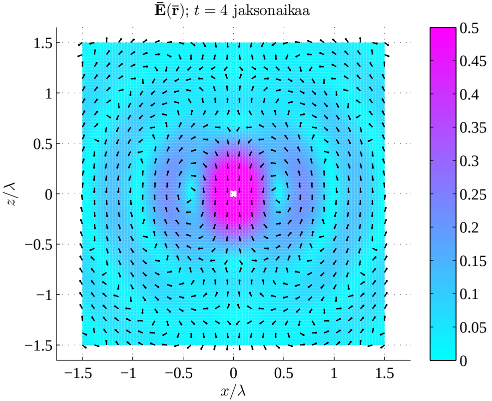
- Saatiin sähkömagneettinen **aaltoyhtälö** tyhjiössä; mekaniikan vastine nopeudella v (x-akselia pitkin) etenevälle poikkeamalle $y(x,t)$ olisi

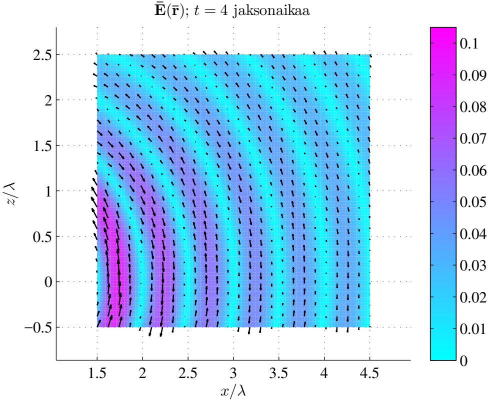
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},$$

joten jälleen huomataan $1/v^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

- B_z:lle voidaan kirjoittaa samanlainen yhtälö

Värähtelevän sähködipolin kenttä





Sinimuotoisesti värähtelevän sähködipolin synnyttämä kenttä värähtelee sinimuotoisesti ja muistuttaa tasoaaltoa paikallisesti (pienillä alueilla) kaukana säteilijästä: tasoaalto on hyvä radioaallon malli oikein käytettynä

Sinimuotoisen aallon kentät

- Aaltoyhtälön ratkaisuksi kävisi muotoa

$$E_y(x,t) = E_+ f(x-ct) + E_- g(x+ct) \quad (E_+, E_- \text{ vakioita})$$

oleva hyvinkäyttäytyvien funktioiden f, g lineaarikombinaatio (mitä eroa on funktioiden f ja g kuvaamilla aalloilla?)

- Kenttäratkaisupariksi käyvät sinimuotoiset (eli harmoniset) funktiot:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= \hat{\jmath} E_{\max} \cos(kx - \omega t), \\ \vec{B}(x,t) &= \hat{k} B_{\max} \cos(kx - \omega t), \quad \text{missä} \quad E_{\max} = c B_{\max} \end{aligned}}$$

  - Värähtelyn **kulmataajuus** $\omega = 2\pi f$ $([\omega] = \mathrm{rad/s})$
  - Kun tutkitaan yhtälöä $kx - \omega t = 0$ (eli yhden aallonharjan etenemistä), huomataan, että aalto etenee **$+x$-suuntaan nopeudella**

$$\boxed{v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \omega/k = c}$$

Sinimuotoisen aallon kentät

Jatkoa

- Kenttäratkaisuparissa

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \hat{\jmath}E_{\max}\cos(kx-\omega t),\\ \vec{B}(x,t) &= \hat{k}B_{\max}\cos(kx-\omega t), \quad \text{missä} \quad E_{\max} = cB_{\max}\end{aligned}}$$

  - kentät ovat kohtisuorassa toisiaan ja etenemissuuntaa vastaan (ovat **poikittaisia)**
  - $\vec{E}(x,t)$ ja $\vec{B}(x,t)$ ovat sähkö- ja magneettikentän hetkellisarvot
  - $E_{\max}$ ja $B_{\max}$ ovat kenttien maksimiarvot eli **amplitudit**
  - kahden aallonharjan välimatka (valitulla hetkellä) eli **aallonpituus**

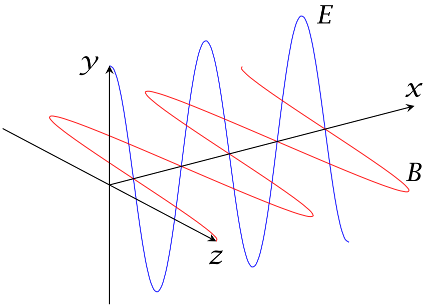
$$\boxed{\lambda = 2\pi/k = c/f \quad \Longleftrightarrow \quad c = \lambda f}$$

missä **aaltoluku** $\boxed{k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \omega/c}$ ($[k] = \mathrm{rad/m}$; huomaa ero k vs. $\hat{k}$)

Sinimuotoiset sähkömagneettiset aallot

- Valitut $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ riippuvat siis sinimuotoisesti ajasta ja paikasta
- Aalto on **tasoaalto:** valitulla hetkellä, valitulla etenemissuuntaa vastaan kohtisuoralla tasolla $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ ovat vakiovektoreita

(Kuvassa ovat edelliskalvon sinimuotoisen aallon kenttien hetkellisarvot x-akselilla, kun $t = 0$: E sininen, B punainen, etenemissuunta $+x$ eli oikealle.)



- Sähkömagneettisen aallon **polarisaatio** tutkitaan $\vec{E}$-vektorista
- Esimerkkiaalto on **lineaarisesti polarisoitunut** y-suuntaan (sähkökenttävektorin kärki piirtää viivaa joka pisteessä, kun aika kuluu)

- Vastaavasti $-x$-suuntaan etenevä aalto olisi

$$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath} E_{\max} \cos(kx + \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = -\hat{k} B_{\max} \cos(kx + \omega t)$$

Sähkömagneettisen aallon nopeus väliaineessa

- Aiempi tyhjiölle tehty analyysi pätee johtamattomassa eristeessäkin, kunhan Maxwellin yhtälöissä vaihdetaan $\varepsilon_0 \to \varepsilon$ ja $\mu_0 \to \mu$
- $\varepsilon = K\varepsilon_0$ ja $\mu = K_\mathrm{m}\mu_0$, ja aallon nopeus eristeessä muuttuu $c \to v$:

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_\mathrm{m}}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_\mathrm{m}}}}$$

- Tyypillisesti (etenkin optisella alueella) $K_\mathrm{m} \approx 1 \implies v = c/\sqrt{K}$
- Koska $K > 1$, väliaineessa $v < c$
- Nopeuksien suhde on **taitekerroin** $\boxed{n = \frac{c}{v} = \sqrt{KK_\mathrm{m}} \overset{K_\mathrm{m}\approx 1}{\approx} \sqrt{K}}$
- Edelleen $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = (\omega/c)\sqrt{KK_\mathrm{m}} = \omega/v = 2\pi/\lambda \implies \boxed{v = \lambda f}$
- Lisäksi $\boxed{E = vB = cB/n}$

Yleisempi sinimuotoinen tasoaalto

(Lisäys oppikirjan tekstiin)

- Harmonisen tasoaallon sähkökenttä pisteessä $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$ voidaan kirjoittaa

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \text{missä } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

- $\vec{k}$ on **aaltovektori;** tasot $\vec{k} \cdot \vec{r} =$ vakio ovat aallon vakiovaihepintoja
- Voidaan kirjoittaa $\vec{k} = \hat{u}k$, missä yksikkövektori $\hat{u} = \vec{k}/k$ osoittaa aallon etenemissuuntaan ja k on aaltoluku
  - Huomaa: $\hat{k}$ tarkoittaa edelleen yhtä karteesisen koordinaatiston yksikkövektoreista, ja vain silloin, kun aalto etenee $+z$-suuntaan, $\hat{u} = \hat{k}$
- Ampèren ja Faradayn laeista seuraa dispersioehto $\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$
- Aallonpituus on λ, taajuus $f = 1/T$ (T on jaksonaika) ja kulmataajuus $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- Häviöttömässä aineessa etenevän homogeenisen tasoaallon $k = 2\pi/\lambda$
- Yhtälö $v = \lambda f = \omega/k$ pätee etenemissuunnasta riippumatta
  - Esimerkiksi $100\,\mathrm{MHz}$:n radiolähetyksen aallonpituus vapaassa tilassa $\lambda = c/f \approx 3\,\mathrm{m}$ (hyvä kiintopiste lukuarvoille)

Sähkömagneettisten aaltojen energiatiheys

- Sähkömagneettisiin aaltoihin liittyy energiaa: ajattele kesäisen auringonpaisteen lämmittävyyttä
- Aikaisemmin johdettiin $\vec{E}$- ja $\vec{B}$-kenttien energiatiheydet tyhjiössä:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_E \quad \text{(sähkökentän energiatiheys tyhjiössä)}$$

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_B \quad \text{(magneettikentän energiatiheys tyhjiössä)}$$

- Yhdistämällä nämä saadaan aallon energiatiheys tyhjiössä:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

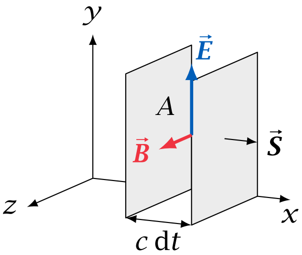
- Toisaalta $B = E/c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E$, joten aallon $\vec{E}$- ja $\vec{B}$-kentän energiatiheys on sama:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E\right)^2 = \varepsilon_0 E^2$$

Sähkömagneettisen aallon energiankuljetus

- Tasoaalto edetköön $+x$-suuntaan
- Ajassa $\mathrm{d}t$ aaltorintama etenee matkan $c\,\mathrm{d}t$
- Energiaa siirtyy kiinteän pinta-alan A läpi määrä

$$\mathrm{d}U = u\,\mathrm{d}V = (\varepsilon_0 E^2)(Ac\,\mathrm{d}t)$$



- Energiavirtaus S aika- ja pinta-alayksikköä kohden **(tehotiheys)**

$$S = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 c E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{EB}{\mu_0}, \quad [S] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\,m^2}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \qquad \text{(tyhjiössä)}$$

- Huomaa: S on paikallinen ja hetkellinen suure

Poyntingin vektori

- Määritellään energiavirtauksen suuruuden ja kulkusuunnan ilmaiseva **Poyntingin vektori:**

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}}$$

(Poyntingin vektori tyhjiössä)

- Kokonaisteho suljetun pinnan läpi

$$P = \oint \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

- Jos kentät $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ ovat sinimuotoisia aiemmin esitetyn mukaisesti,

$$\vec{S}(x,t) = \hat{\imath}\frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0}\left[1 + \cos 2(kx - \omega t)\right]$$

Intensiteetti

- Usein sähkömageettististen aaltojen taajuus on niin suuri (esim. näkyvällä valolla $\sim 10^{15}\,\mathrm{Hz}$), ettei ole mieltä mitata aikariippuvaa Poyntingin vektoria vaan vektorin aikakeskiarvoa $\langle \bullet \rangle$ (**netto**arvoa)
- Sinimuotoisen aallon Poyntingin vektorin aikakeskiarvon suuruus on

$$S_{\mathrm{av}} = \left| \left\langle \vec{S}(x,t) \right\rangle \right| = \frac{E_{\mathrm{max}} B_{\mathrm{max}}}{2\mu_0} \langle [1 + \cos 2(kx - \omega t)] \rangle = \frac{E_{\mathrm{max}} B_{\mathrm{max}}}{2\mu_0} ,$$

  koska kosinitermin aikakeskiarvo yhden jakson aikana on nolla
- Oppikirjassa (ja kurssilla) em. aikakeskiarvosta käytetään nimitystä **intensiteetti** (I), joka on kovin monella merkityksellä rasitettu sana – varmistu aina, mitä intensiteetillä eri yhteyksissä tarkoitetaan.
- Sinimuotoisen aallon **intensiteetti tyhjiössä** (entä väliaineessa?) on

$$\boxed{I \stackrel{\mathrm{def}}{=} S_{\mathrm{av}} = \frac{E_{\mathrm{max}} B_{\mathrm{max}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\mathrm{max}}^2}{2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}} \qquad (\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377\,\Omega)$$

Sähkömagneettisten aaltojen liikemäärä

- Sähkömagneettiset aallot kuljettavat energian lisäksi myös liikemäärää p (erityinen suhteellisuusteoria: energia$^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$; jos $m = 0$, kuten fotoneilla, energia $= pc \implies p =$ energia$/c$)
- Liikemäärätiheys $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \dfrac{\mathrm{d(energia)}}{c\,\mathrm{d}V} = \dfrac{u\,\mathrm{d}V}{c\,\mathrm{d}V} = \dfrac{u}{c} = \dfrac{EB}{\mu_0 c^2} = \dfrac{S}{c^2}$
- **Liikemäärävirtaama** pinta-alayksikköä kohden $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}t}{A} = \dfrac{S}{c} = \dfrac{EB}{\mu_0 c}}$
- Liikemäärävirtaus aiheuttaa pinnoille **säteilypaineen** p_{rad} [merkintä!]
  - Jos aalto absorboituu täydellisesti pintaan,

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{\langle \mathrm{d}p/\mathrm{d}t \rangle}{A} = \frac{S_{\mathrm{av}}}{c} = \frac{I}{c}$$

  - Jos aalto heijastuu pinnasta, liikemäärän muutos on kaksinkertainen:

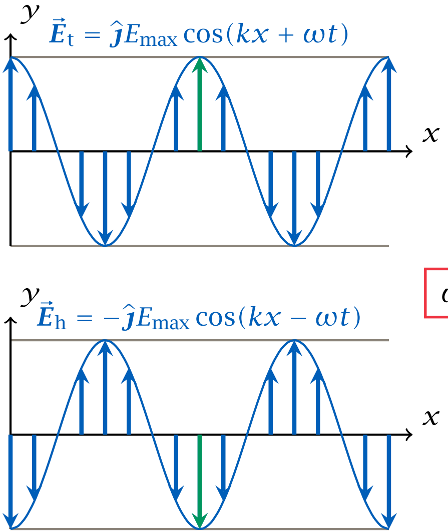
$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{2S_{\mathrm{av}}}{c} = \frac{2I}{c}$$

(Pintojen valaisusta puhuttaessa intensiteettiä parempi termi olisi **säteilytysvoimakkuus** eli **irradianssi**.)

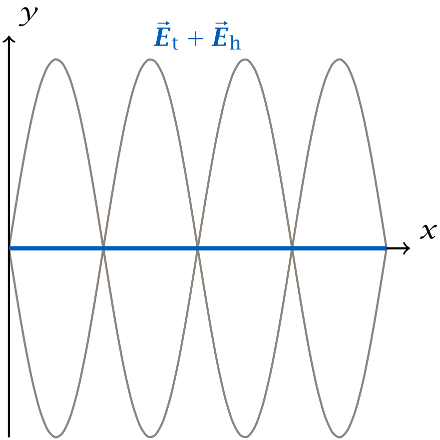
Aallon heijastuminen johteen pinnalta

- Oletetaan, että tasoaalto osuu ideaalijohteen pintaan (esim. aiempi $-x$-suuntaan etenevä esimerkkiaalto osuu johteeseen yz-tasolla)
- Tulevalla aallolla on nollasta poikkeava sähkökenttä, mutta johteen pinnalla kokonaissähkökentän pitää hävitä (miksi?) – miten vaatimus toteutuu?
- Tulevan aallon sähkökenttä indusoi johteen pinnalle sellaisen värähtelevän virran, jonka sähkökenttä kumoaa tulevan aallon sähkökentän johteen pinnalla
- Värähtelevä virta lisäksi tuottaa heijastuneen aallon, joka etenee pinnasta poispäin ($+x$-suuntaan)
- Tulevan ja heijastuneen aallon superpositio on **seisova aalto**
- Kahden heijastavan pinnan muodostama rakenne on tärkeä esimerkiksi optiikan sovelluksissa ja lasereissa (optinen resonaattori, kuten Fabry–Pérot-ontelo)

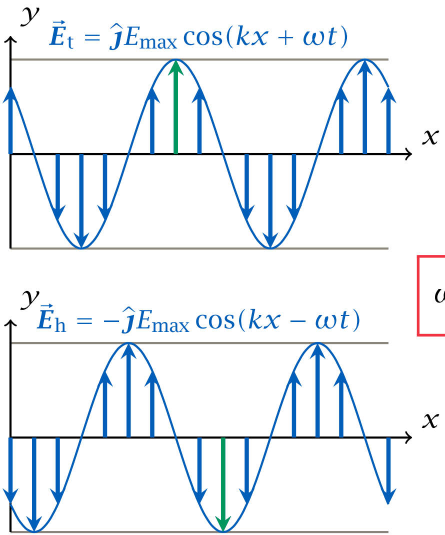
Tuleva aalto + heijastunut aalto = seisova aalto



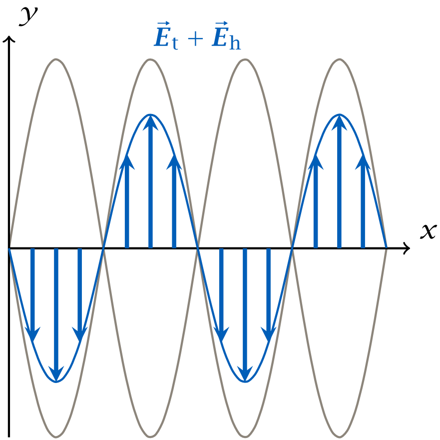
$\boxed{\omega t = 0}$



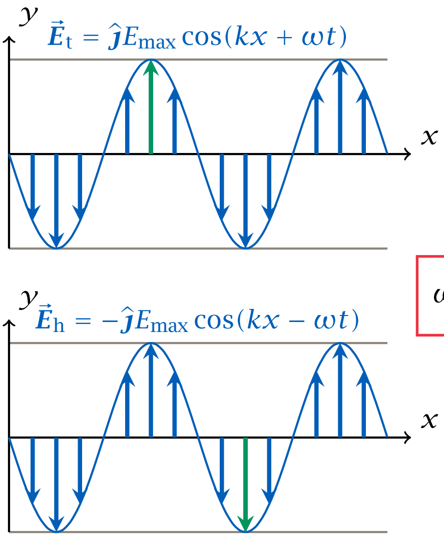
Tuleva aalto + heijastunut aalto = seisova aalto



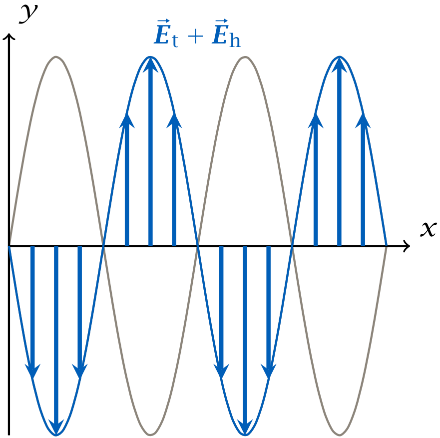
$$\omega t = \frac{\pi}{4}$$



Tuleva aalto + heijastunut aalto = seisova aalto



$$\boxed{\omega t = \frac{\pi}{2}}$$



Kenttien superpositio

- Ideaalijohde olkoon tasolla $x = 0$, tuleva aalto edetköön $-x$-suuntaan
- Superpositioaallot ovat (ensimmäinen termi on tuleva aalto, toinen heijastunut – huomaa polarisaatiosuunnat)

$$E_y(x,t) = E_{\max}\left[\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)\right]$$
$$B_z(x,t) = B_{\max}\left[-\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)\right]$$

- Sovelletaan identiteettiä $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, jolloin saadaan lopulta

$$E_y(x,t) = -2E_{\max} \sin kx \sin \omega t$$
$$B_z(x,t) = -2B_{\max} \cos kx \cos \omega t,$$

- Saadut lausekkeet ovat muotoa $y(x,t) = (A_{\mathrm{SW}} \sin kx) \cos \omega t$, joka on tuttu Mekaniikasta

Kenttien superpositio

Jatkoa

- Kentällä on nollakohdat **solmutasoilla:**

$$E_y(x,t) = 0, \quad \text{kun} \quad x = \frac{n\lambda}{2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$B_z(x,t) = 0, \quad \text{kun} \quad x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Solmutasojen puolivälissä kuputasoilla kentällä on maksimiarvo
- Tasolla $x = 0$ sähkökenttä häviää (kuten pitääkin) mutta magneettikentällä on maksimi
- Joka paikassa sähkö- ja magneettikenttä värähtelevät $90°$:een vaihe-erossa ajan suhteen (toisin kuin etenevällä aallolla, jonka kentät ovat samanvaiheiset)
- Toteutuvatko Maxwellin yhtälöt?

Seisovan aallon intensiteetti

- Etsitään ensin Poyntingin vektorin hetkellisarvo:

$$\vec{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[-2\hat{\jmath}E_{\max}\sin kx \sin \omega t\right] \times \left[-2\hat{k}B_{\max}\cos kx \cos \omega t\right]$$

$$= \hat{\imath}\frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\sin 2kx \sin 2\omega t = \hat{\imath}S_x(x,t)$$

- Aallon intensiteetti I on Poyntingin vektorin aikakeskiarvon suuruus S_{av}
- S_{av} häviää, koska $\sin 2\omega t$:n aikakeskiarvo (yhden jakson yli) on nolla

$\Longrightarrow$ seisova aalto ei kuljeta nettoenergiaa, koska seisovassa aallossa on kaksi vastakkaisiin suuntiin yhtä paljon energiaa kuljettavaa osa-aaltoa

Seisovat aallot ontelossa

- Kahden heijastavan, yhdensuuntaisen pinnan (etäisyys L) välissä on seisova aalto, jos sähkökenttä häviää molemmilla pinnoilla eli jos aallonpitudet ovat

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Vastaavat aallon taajuudet ovat

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Ehtojen mukaiset seisovat aallot ovat rakenteen normaali- eli ominaismuotoja
- Mikroaaltouuni: tyypillinen magnetronin käyttötaajuus on $2.45\,\mathrm{GHz}$
  - Vesimolekyylit vastaanottavat energiaa tällä taajuudella ns. rotaatioabsorption takia
  - Absorptio kuitenkin heikkoa, mikä on hyvä asia – miksi?
  - (Kotitalous)mikroaaltouunit ovat kokoluokkaa $30\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$ ja seinämät ovat metallia – miksi uunissa on pyörivä lautanen?

Sinimuotoiset aallot hyvässä johteessa

Luentodemonstraatio

Sähkömagneettiset aallot etenevät johteen sisällä eri tavalla kuin eristeessä tai tyhjiössä. Jos johteen resistiivisyys on sopivan pieni (eli johde on riittävän hyvä), värähtelevä sähkökenttä synnyttää johteeseen värähtelevän johtavuusvirran, joka on paljon suurempi kuin siirrosvirta. Tässä tapauksessa johteessa $+x$-suuntaan etenevä sähkökenttä $\vec{\boldsymbol{E}}(x,t) = \hat{\boldsymbol{\jmath}} E_y(x,t)$ toteuttaa [diffuusio]yhtälön

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t},$$

missä μ on johteen permeabiliteetti ja ρ resistiivisyys.

1. Näytä, että yhtälö toteutuu yritteellä $E_y(x,t) = E_0 e^{-k_C x} \cos(k_C x - \omega t)$, kun k_C valitaan sopivasti.
2. Ratkaisun mukaan aalto vaimenee edetessään johteessa. Miksi näin käy?
3. Etsi matka, jossa sähkökentän amplitudi pienentyy $1/e$-osaan alkuperäisestään. Tämä matka on **tunkeutumissyvyys** δ. Laske δ taajuudella $f = 2.45\,\mathrm{GHz}$ kuparille. Kuparin $\mu = \mu_0$ ja $\rho = 1.72 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

Yhteenveto luvusta 32

Keskeisiä käsitteitä

- Tasoaalto (askel- ja sinimuotoinen)
- Aaltorintama
- Aaltoyhtälö
- Aallonpituus λ, aaltoluku k, taajuus f
- Taitekerroin n
- Poyntingin vektori $\vec{\boldsymbol{S}}$ ja intensiteetti $I = S_{\mathrm{av}}$
- Säteilypaine p_{rad}
- Seisova aalto

Tärkeitä kaavoja

Askeltasoaalto tyhjiössä

$$E = cB, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{c}}$$

Sinimuotoinen tasoaalto: s. 20

Väliaineessa $v = c/n = \lambda/f$

Poyntingin vektori ja intensiteetti

$$\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\mu} \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}, \quad I = S_{\mathrm{av}} = \frac{E_{\mathrm{max}} B_{\mathrm{max}}}{2\mu}$$

Säteilypaine

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{\langle \mathrm{d}p/\mathrm{d}t \rangle}{A} = \frac{I}{c} \quad \text{tai} \quad \frac{2I}{c}$$