



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

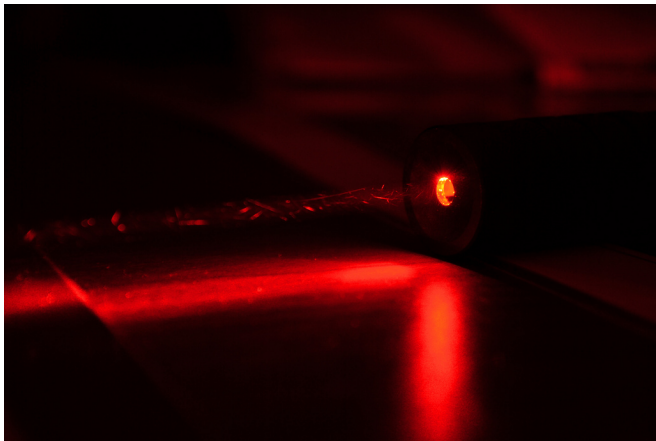
Luentoviikko 9

Valon luonne ja eteneminen (YF 33)

- Valon luonne
- Heijastuminen ja taittuminen
- Kokonaisheijastus
- Dispersio
- Polarisaatio
- Valon sironta
- Huygensin periaate
- Yhteenveto

Kenttien rajapintaehdot (lisämateriaalia)

- Rajapintaehdot
- Fresnelin kertoimet

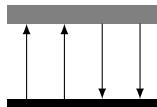


Lähde: <https://www.flickr.com/photos/fastlizard4/5427856900/in/set-72157626537669172>, Andrew "FastLizard4" Adams [CC BY-SA 2.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/>)]

Tavoitteena on oppia

- ▶ mitä valonsäteet ovat ja miten ne liittyvät aaltorintamiin
- ▶ valon heijastumista ja taittumista ohjaavat lait
- ▶ olosuhteet, joissa valo kokonaisheijastuu rajapinnasta
- ▶ mitä dispersio ja polarisaatio tarkoittaa
- ▶ miten tavallisesta valosta tehdään polarisoitunutta
- ▶ miten Malusin laki käytetään
- ▶ miten Huygensin periaate auttaa heijastuksen ja taittumisen analysoinnissa
- ▶ (tunnistamaan \vec{E} - ja \vec{B} -kenttien rajapintaehdot)
- ▶ (tunnistamaan Fresnelin kertoimet, kun aalto osuu kohtisuorasti rajapintaan)

Valon luonne: aallot ja hiukkaset



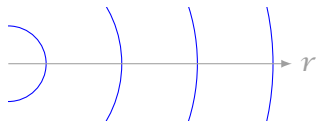
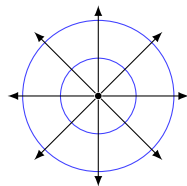
- ▶ Valo on sähkömagneettista säteilyä
- ▶ Aalto-hiukkasdualismi: (ennen Newtonia) valo on hiukkasia (korpuskeleita) → (Newton, Maxwell) valo on aaltoliikettä → (~1910) valo on hiukkasia (fotoni, kvantti) → (~1930) valo on sekä aaltoja että hiukkasia (kvanttielektrodynamiikka, QED)
- ▶ Eteneminen kuvataan aalloilla, vuorovaikutus aineen kanssa (absorptio ja emissio) hiukkasilla
- ▶ Säteilyn peruslähde on kiihtyvässä liikkeessä oleva varaus

Valonlähteet

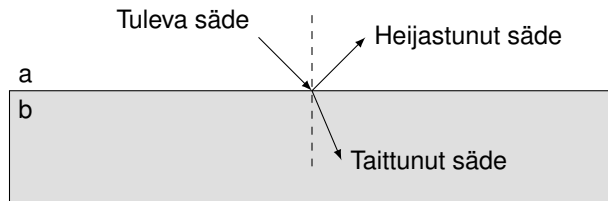
- ▶ **Lämpimien kappaleiden** molekyylit säteilevät sähkömagneettisia aaltoja eli **lämpösäteilyä** molekyylien **lämpöliikkeen** vuoksi – jokainen lämmin kappale on ”valon”lähde
- ▶ **Hehkulampussa** valoa tuottaa kuuma hehkulanka (n. 3000 K)
- ▶ **Loistelampussa** elohopeahöyryn läpi kulkee valokaari (läpilyöntipurkaus), jonka ultraviolettisäteily muuntuu putken pinnan **loisteaineessa** näkyväksi valoksi
- ▶ **LED-lampussa** valodiodin puolijohdeliitoksen aukko-elektroniparien yhtyessä liitos säteilee fotoneja
- ▶ Useimmissa valonlähteissä säteilijät (atomit, molekyylit) säteilevät itsenäisesti, mutta **laserissa** atomit houkuteltaan säteilemään yhtenäisesti eli **koherentisti** – tulos on kapea, intensiivinen ja lähes **yksitaajuinen** (monokromaattinen, yksivärinen) valokeila
- ▶ Valonnopeus $c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \Rightarrow$ **metrin** määritelmä

Aallot, aaltorintamat ja säteet

- ▶ Aallon liikettä kuvataan usein aaltorintamalla (esim. aallon etureuna)
- ▶ Yleisesti **aaltorintama** on pinta, jolla aaltoon liittyvän värähtelyn **vaihe on vakio** (esim. harmonisesti värähtelevän sähkökentän vakiovaihepinnat)
- ▶ Valonlähteet ovat usein liki **pistemäisiä** \Rightarrow aaltorintamat ovat **pallopintoja**
- ▶ Matemaattisessa kuvauksessa käytetään mieluusti **tasoaaltoja**
 - ▶ Kaukana lähteestä tasoaalto on hyvä approksimaatio palloaallolle
 - ▶ Matematiikka on yksinkertaisempaa
- ▶ **Säde** on viiva, joka ilmaisee aallon **kulkusuunnan** ($\hat{=}$ aaltovektori \vec{k}) ja on **aaltorintaman normaali**
- ▶ Homogeenisessa isotrooppisessa aineessa säteet ovat **suoria**
- ▶ **Geometrinen optiikka** (sädeoptiikka) käsittelee aaltoja säteinä



Heijastuminen



- ▶ Kun sähkömagneettinen aalto (valo) osuu kahden läpinäkyvän aineen tasaiseen rajapintaan, aalto yleensä osittain **heijastuu** pinnasta ja osittain **taittuu** toiseen aineeseen
- ▶ Heijastus tasaisesta pinnasta on **peiliheijastus** (valo heijastuu tiettyyn suuntaan)
- ▶ Heijastus karheasta pinnasta on **hajaheijastus** (valoa **siroaa** moniin suuntiin)
- ▶ **Jatkossa** heijastus $\hat{=}$ **peiliheijastus**

Heijastumis- ja taittumislait

► Aineen taitekerroin

$$n = \frac{c}{v}$$

(huomaa: yksikötön)

► Heijastumis- ja taittumislait

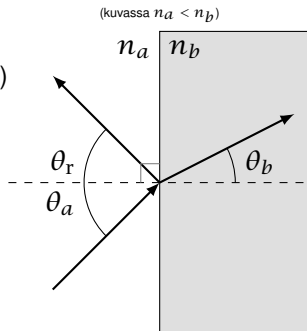
1. Tuleva, heijastunut ja taittunut säde ovat **samassa tasossa** pinnan normaalin kanssa (= **tulotaso**)
2. **Heijastuskulma = tulokulma**

$$\theta_r = \theta_a$$

3. **Snellin laki** tulo- ja **taittumiskulmille**

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b = \text{vakio yhdensuuntaisilla rajapinnoilla}$$

Huomaa: kulmat mitataan **pinnan normaalista!**



Heijastumis- ja taittumislakien seurauksia

- ▶ "Aalto taittuu optisesti tiheämpään aineeseen päin" (optisesti tiheämpi = suurempi taitekerroin)
- ▶ Kohtisuorasti ($\theta_a = 0$) rajapintaan tuleva säde ei taitu ($\theta_b = 0$) vaan jatkaa suoraan (entä heijastus?)
- ▶ Tulevan ja läpäisseen (taittuneen) säteen kulkusuunnat ovat käännettävissä (heijastunut säde syntyy tietysti tulopuolelle)
- ▶ Mistä lait tulevat?
 - ▶ Heijastus- ja taittumislait voidaan johtaa **Maxwellin yhtälöistä**, jolloin lisäksi saadaan tietoa kenttien amplitudien, vaiheiden ja polarisaatioiden käyttäytymisestä rajapinnassa (**Fresnelin kertoimet**)
 - ▶ Lait voidaan johtaa **Huygensin periaatteesta** (tulossa)
 - ▶ Käytössä on myös **Fermat'n periaate**, jonka mukaan valo kulkee kahden pisteen välillä nopeinta (tai hitainta) mahdollista reittiä pitkin ("optisen matkan täytyy olla ääriarvo") – **harjoitustehtävä**

Taitekerroin ja valon aaltoluonne

- ▶ Tyypillisesti epämagneettisen aineen taitekerroin $n = \sqrt{K}$ on välillä 1...3, esim. ($\lambda_0 = 589 \text{ nm}$) vesi 1.333, jää 1.309, timantti 2.417; STP-ilma 1.0003 (eli $n = 1$)
- ▶ Taitekerroin riippuu valon aallonpituudesta (= dispersio) (esim. pienillä taajuuksilla veden taitekerroin onkin 8.97)
- ▶ Kun aalto kulkee aineesta toiseen, aallon **taajuus säilyy** (mieti kättelemistä) – rajapinta ei synnytä eikä tuhoa aaltoja
- ▶ Valon **nopeus ja aallonpituus muuttuvat** väliaineessa:

$$v = \frac{c}{n} \quad \text{ja} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

(λ_0 on valon aallonpituus tyhjiössä)

Kokonaisheijastus

- ▶ Snellin laki: valon taittumiskulma

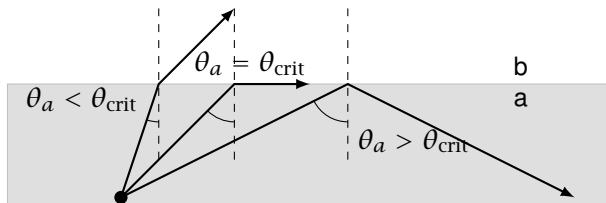
$$\sin \theta_b = \frac{n_a}{n_b} \sin \theta_a$$

- ▶ Jos $n_a/n_b > 1$, aina $\theta_b > \theta_a \implies$ on olemassa tulokulma θ_{crit} , jolla $\sin \theta_b = 1$ eli taittunut säde kulkee pitkin rajapintaa ($\theta_b = 90^\circ$):

$$\sin \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a} \sin 90^\circ = \frac{n_b}{n_a} \quad (\text{kun } n_a > n_b)$$

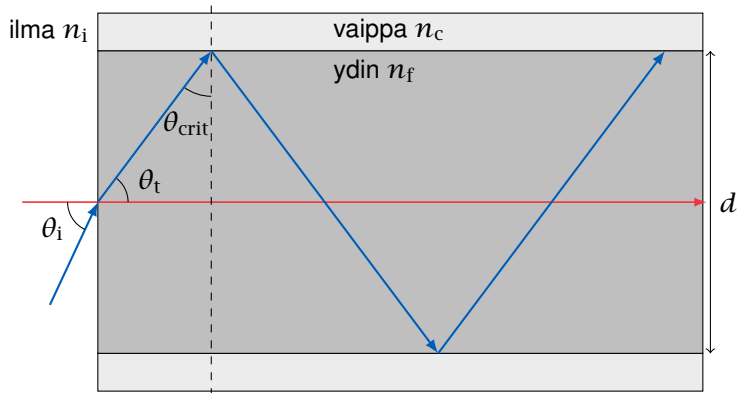
- ▶ Kun $\theta_a > \theta_{\text{crit}}$, tuleva säde* ei pääse aineeseen b vaan heijastuu: kyseessä on **kokonaisheijastus**
- ▶ θ_{crit} on **kokonaisheijastuksen rajakulma** (esim. lasi-ilma $\theta_{\text{crit}} \approx 41.1^\circ$)

(*entä kentät?)



Johdatus optiseen tietoliikenteeseen – valokuitu

Yksinkertainen esimerkkirakenne

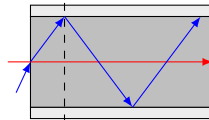


Rajatapaus: suurin tulokulma θ_i , jolla säde pysyy kuidussa kokonaisheijastuksen avulla.

Johdatus optiseen tietoliikenteeseen – valokuitu

Jatkoa

- ▶ Valo ohjautuu kuidussa kokonaisheijastuksen avulla
- ▶ Valo kulkee pitkiäkin matkoja merkittävästi heikentymättä
- ▶ Kuidun **vaimennus** (tehohäviötaso) on suuruusluokkaa 1 dB/km, erikoiskuiduissa parempi
- ▶ Lasketaan yksinkertainen malli tiedonsiirtonopeuden ylärajalle ns. monimuotokuidussa (joita ei todellisuudessa käytetä)
- ▶ Hitaimman (kulkukulma θ_t akseliin nähden) ja nopeimman (akselin suuntaisen) valonsäteen kulkeaikaero matkalla L on



$$\Delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{L}{v \cos \theta_t} - \frac{L}{v}$$

Johdatus optiseen tietoliikenteeseen – valokuitu

Jatkoa: moodidispersio

- ▶ Kulkusuunta θ_t kytkeytyy kokonaisheijastuksen rajakulmaan θ_{crit} :

$$n_f \sin \theta_{\text{crit}} = n_c, \quad \theta_t = \pi/2 - \theta_{\text{crit}} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_t = \frac{n_c}{n_f}$$

- ▶ Valon kulkunopeus ytimessä $v = c/n_f$, joten

$$\Delta t = \frac{Ln_f}{c} \left[\frac{n_f}{n_c} - 1 \right]$$

= impulssin pituus matkan L jälkeen

- ▶ Pulssien etäisyyden on oltava esim. $2\Delta t$, jotta peräkkäiset pulssit voidaan erottaa toisistaan matkan L jälkeen:

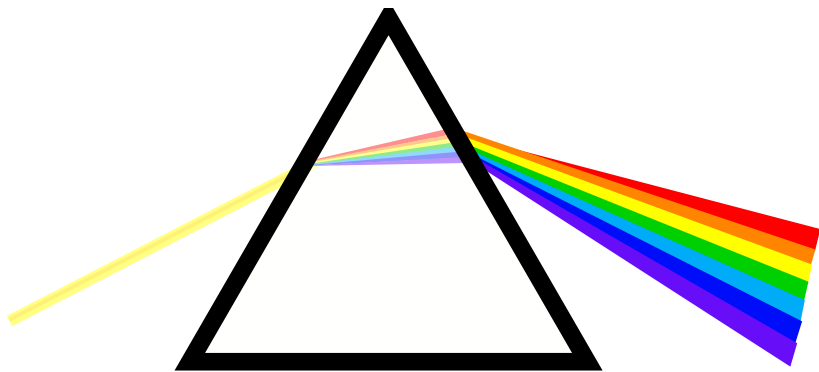
$$\text{maksimitoistotaajuus } f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{c}{2Ln_f(n_f/n_c - 1)}$$

- ▶ (Maksimitoistotaajuus on yleensä datakäyttöön aivan liian pieni tällä rakenteella
→ jatkuvasti muuttuva taitekerroinprofiili tai ohut ns. yksimuotokuitu)

Taitekerroin riippuu taajuudesta

- ▶ Optiikassa perusmateriaaliparametri on taitekerroin
- ▶ Valon nopeus materiassa riippuu aina taajuudesta \Rightarrow taitekerroin aineessa riippuu taajuudesta \Rightarrow eritaajuiset signaalikomponentit kulkevat eri nopeuksilla = dispersio \Rightarrow signaalin aaltomuoto muuttuu
- ▶ Tyypillisesti optisissa materiaaleissa taitekerroin pienenee taajuuden pienentyessä (vapaantilan aallonpituuden kasvaessa)
 - = normaali dispersio
- ▶ Joskus taitekerroin kasvaa taajuuden pienentyessä
 - = anomaalinen dispersio
- ▶ Dispersio rajoittaa optisten komponenttien suorituskykyä (esim. ultranopeassa optisessa tiedonsiirrossa)

Prisma



- ▶ Prisman lasissa pitkäaaltoinen punainen valo taittuu vähiten ja lyhytaaltoinen violetti eniten
- ▶ Valo hajaantuu (dispergoituu) **spektriiksi**
- ▶ Dispersio **selittää** myös timanttien väriloiston ja sateenkaaren värit

Polarisaatio

- ▶ Polarisaatio on **poikittaisen** aaltoliikkeen ominaisuus (poikittaisella poikkeamalla on **suunta**)
[eristeen polarisoituminen on **eri ilmiö**]
- ▶ Sähkömagneettisen **aallon polarisaatio** = **\vec{E} -vektorin suunta ja käytös**; esimerkiksi tasoaalto

$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\max} \cos(kx - \omega t),$$

$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

on **lineaarisesti** polarisoitunut **y -suuntaan**

- ▶ Radiolähettimen antennin tai yksittäisen molekyylin säteilemällä **aallolla** on yleensä **tietty** polarisaatiotila (esim. lineaarinen polarisaatio, mutta tila voi olla erilainen eri suunnissa)
- ▶ Valonlähteet (hehkulamppu, loistelamppu, aurinko) lähettävät tyypillisesti **polarisoitumatonta** eli **luonnonvaloa** (koska säteilijät ovat satunnaissuuntaisia)
 - = valossa on kaikkiin poikittaissuuntiin lineaarisesti polarisoituneita aaltoja
 - ⇒ polarisoidun valon tuottamiseen tarvitaan **polarisoiva suodatin**

Polarisaatiokäsitteitä

Lineaarisesti polarisoitu[nut] kenttävektori värähtelee [poikittaisesti] vakiosuuntaista **janaa** pitkin

Polarisaattori optinen komponentti, jonka **läpi pääsevät vain** tietyllä polarisaatiolla saapuvat aallot (mikroaalloilla: metalliritilä – ritilän lankojen suuntainen sähkökenttä **ei pääse** läpi)

Dikroismi [tässä:] materiaali absorboi (imee) **yhtä polarisaatiokomponenttia** voimakkaammin kuin toista (kohtisuuraa) komponenttia

Polarisoiva akseli aallot, jotka ovat polarisoituneet aineen tai rakenteen polarisoivan akselin **suuntaisesti pääsevät läpi** aineesta tai rakenteesta

Kahtaistaittavuus materiaalin taitekerroin riippuu aallon **polarisaatiosuunnasta** (hyödynnettävissä esim. ympyräpolarisaation tuottamisessa)

Polarisaattorien käyttö polarisoimisessa

- ▶ Polarisoitumattoman valon sähkökenttäkomponentti tarkastelusuunnassa on **keskimäärin** yhtäsuuri kuin komponentti kyseistä suuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa
- ▶ **Ideaalinen** polarisaattori päästää läpi **puolet** polarisoitumattoman valon tehoitiheydestä:
 $I_t = I_0/2$
- ▶ Lisätään toinen polarisaattori (**analysaattori**)
- ▶ Ensimmäisen polarisaattorin läpi päässeeseen sähkökentän E voi jakaa **analysaattorin optisen akselin suhteen** kohtisuoraan (E_{\perp}) ja yhdensuuntaiseen (E_{\parallel}) komponenttiin
- ▶ Analysaattorin läpi pääsee amplitudi $E_{\parallel} = E_t \cos \phi$, missä ϕ on polarisaattorien polarisoivien akselien välinen kulma
 ⇒ **Malusin laki** lineaarisesti polarisoituneelle valolle ($I_{\max} [\equiv I_t]$, kun $\phi = 0$):

$$I = S_{\text{av}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I_{\text{max}} \cos^2 \phi}$$

Esimerkki Malusin lain käyttämisestä

Kolme polarisaattoria asetettu peräkkäin siten, että toisen polarisaattorin polarisoivan akselin kulma on θ ja kolmannen 90° ensimmäisen polarisaattorin optiseen akseliin verrattuna. Sisään tulee polarisoitumatonta valoa (intensiteetti I_0). Mikä on järjestelmän läpi menneen valon intensiteetti $I(\theta)$?

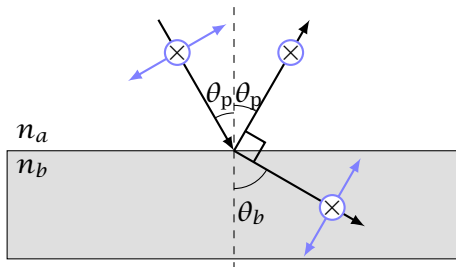
Ratkaisu: Ensimmäisen polarisaattorin läpäisee intensiteetti $I_0/2$. Toisen polarisaattorin jälkeen intensiteetti on $(I_0/2) \cos^2 \theta$. Kolmannen polarisaattorin jälkeinen intensiteetti

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta \cos^2(90^\circ - \theta) = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{I_0}{8} \sin^2(2\theta)$$

Maksimi-intensiteetti saadaan, kun $2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$ (valoa siis pääsee kolmisuodattimisen rakenteen läpi, **vaikka** pelkkä ensimmäisen ja kolmannen polarisaattorin yhdistelmä pysäyttäisi valonkulun kokonaan)

Heijastuksen käyttö polarisoimisessa

- ▶ Aallot, joiden \vec{E} -vektori on kohtisuorassa tulotasoa vastaan (eli joiden \vec{E} on yhdensuuntainen heijastavan pinnan kanssa), heijastuvat voimakkaammin kuin aallot, joiden \vec{E} on tulotasossa [tämä käy ilmi Fresnelin kertoimista]
- ▶ Jos valo saapuu rajapintaan **polarointikulmassa** θ_p , tulotasossa värähtelevä kenttäkomponentti ei heijastu lainkaan vaan läpäisee pinnan täysin (heijastunut valo on täysin polarisoitunutta ja läpäissyt valo on osittain polarisoitunutta)





pystypolarisaatio



vaakapolarisaatio



pystypolarisaatio



vaakapolarisaatio

Brewsterin kulma

- ▶ Heijastuksettomuusehto toteutuu, kun $\theta_b + \theta_p = 90^\circ$
- ▶ Snellin taittumislaiosta: $n_a \sin \theta_p = n_b \sin(90^\circ - \theta_p) = n_b \cos \theta_p$

 \Rightarrow

$$\tan \theta_p = \frac{n_b}{n_a}$$

= **Brewsterin laki** ja θ_p on **Brewsterin kulma**

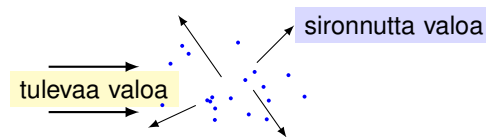
- ▶ Laki voidaan johtaa Maxwellin yhtälöistä, joista saadaan Fresnelin kertoimet eli sähkökenttäamplitudin heijastus- ja läpäisykertoimet
- ▶ Polarointikulman **fysikaalinen selitys?**

Ympyrä- ja elliptinen polarisaatio

- ▶ **Ympyräpolarisoitu** aalto saadaan kahden kohtisuoraan suuntaan lineaarisesti polarisoidun aallon summana
 - ▶ Tarvitaan sama amplitudi ja $\pm\pi/2$:n (eli 90° :een eli neljännesjakson) vaihe-ero
- ▶ Summa-aallon sähkökenttävektorin kärki **kiertää ympyrää pitkin**, kun katsotaan aallon tulosuuntaan
 - ▶ Vasen- ja oikeakätinen ympyräpolarisaatio (riippuu **vertailusuunnasta?**)
- ▶ Jos nolasta poikkeava vaihe-ero ei ole $\pm\pi/2$ tai kohtisuorien (erivaiheisten) komponenttiaaltojen amplitudit ovat eri suuret \Rightarrow **elliptinen polarisaatio**
- ▶ Vaihe-ero voidaan tuottaa **kahtaistaittavalla** kiteellä (esim. kalsiitti CaCO_3 tai kvartsi)
- ▶ Kahtaistaittava **neljännesaaltolevy** tuottaa $\lambda/4$ -vaihesiirron
 - ▶ Muuttaa lineaarisesti polarisoidun aallon ympyräpolarisoiduksi (ja **päinvastoin**)

Valon sironta

- ▶ Miksi taivas on sininen? Miksi auringonlasku on punainen? Miksi taivas näyttää joissakin suunnissa tummemmalta polarisoivien lasien läpi?
- ▶ Kun auringonvalo osuu ilman molekyyleihin, molekyylit eivät virity, mutta niiden elektronipilvi värähtelee aallon sähkökentän suunnassa
 - ⇒ harmonisesti värähtelevä dipolimomentti
 - ⇒ dipolimomentti toimii antennina, joka lähettää uuden aallon ympärilleen (paitsi dipolin värähtelyn [akselin] suuntaan) = **sironta**



- ▶ Auringonvalo on polarisoitumatonta, mutta valonsäteen kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan sironnutta valoa tarkasteleva näkee lineaarisesti polarisoitunutta valoa (eli polarisoivien lasien kanssa...?)
- ▶ Valon taajuus ei muutu sironnassa (koska ei tapahdu virittymistä)!

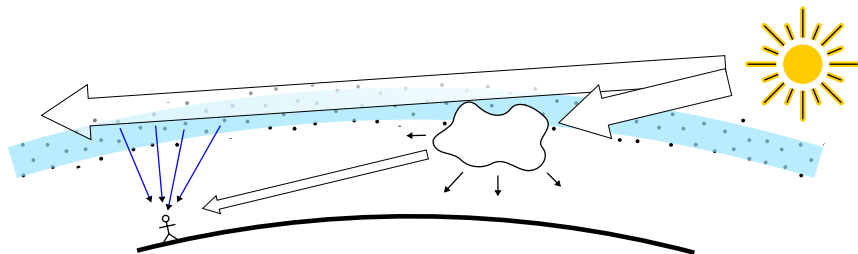


pystypolarisaatio



vaakapolarisaatio

Taivaan, auringonlaskun ja pilvien väri

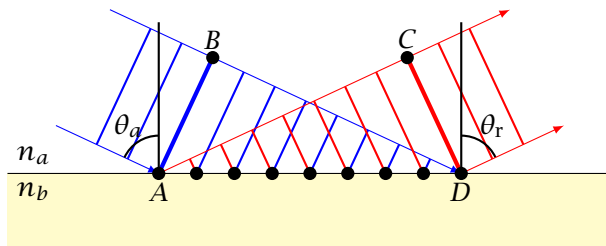


- ▶ Kun sirottajan koko $\ll \lambda$, kyseessä on **Rayleigh'n sironta**: sironnut intensiteetti $\sim 1/\lambda^4$ (eli $\sim f^4$)
 - ⇒ sininen valo siroaa n. 15 kertaa voimakkaammin kuin punainen
 - ⇒ taivaan väri
- ▶ **Auringonlaskua** seuraava näkee valoa, josta on sironnut pois sininen
- ▶ Tiheät pilvet sirottavat valoa moninkertaisesti joka suuntaan
 - ⇒ näkyvät valkoisina (vai pimentävät taivaan?)
- ▶ Maidon väri johtuu maidon rasvapalloista

Huygensin periaate (1678)

- ▶ **Huygensin periaate** ilmaisee, että jos tiedämme aaltorintaman muodon jollain hetkellä, voimme muodostaa sen perusteella rintaman myöhemmän muodon, eli:
Jokainen aaltorintaman piste toimii lähteenä alkeisaalloille, jotka etenevät kaikkiin suuntiin aallon etenemisnopeudella
 - ▶ Etenevän aaltorintaman **uusi paikka** myöhemmällä tarkasteluhetkellä on alkeisaaltojen yhteinen tangenttipinta eli **verhopinta** tuolla hetkellä
- ▶ Periaatteen avulla voi johtaa heijastumis- ja taittumislait
- ▶ Perustana mm. diffraktion ja interferenssin tai **aukkoantennien** (esim. parabolinen heijastinantenni) analyysille
- ▶ Johdettavissa Maxwellin yhtälöistä
(esim. Lindell, I.V., "Huygens' principle in electromagnetics," IEE Proceedings Science, Measurement and Technology, vol. 143, no. 2, pp. 103–105, Mar 1996: <http://ieeexplore.ieee.org.libproxy.aalto.fi/xpl/articleDetails.jsp?tp=&number=487647>)

Heijastuslaki Huygensin periaatteella



- ▶ Tuleva aaltorintama AB kohtaa rajapinnan pisteet eri aikoina
- ▶ Jokainen rajapinnan piste lähettää alkeisaallon (joka etenee nopeudella c/n_a)
- ▶ Alkeisaaltojen summa (verhopinta) muodostaa uuden aaltorintaman, joka etenee nopeudella $v_a = c/n_a$
- ▶ Kuvassa CD on AB :stä syntynyt heijastunut rintama, θ_a on tulokulma ja θ_r on heijastuskulma (ohuet viivat ovat rintamien paikkoja eri hetkillä)

Heijastuslaki Huygensin periaatteella

Jatkoa

- ▶ Kun tuleva aaltorintama on kulkenut B :stä D :hen (ajassa t), pinnan pisteestä A lähteneet alkeisaallot ovat kulkeneet A :sta C :hen ja muodostavat muiden väliltä AD lähteneiden alkeisaaltojen kanssa rintaman CD :

$$t = \frac{|BD|}{v_a} = \frac{|AC|}{v_a} \quad \Rightarrow \quad |BD| = |AC|$$

- ▶ Kuvasta saadaan kolmioiden avulla

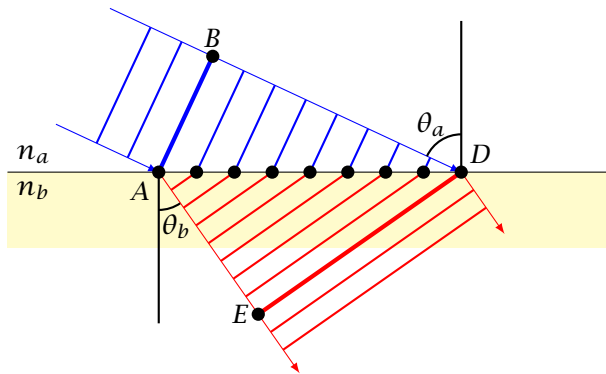
$$|BD| = |AD| \sin \theta_a, \quad |AC| = |AD| \sin \theta_r$$

- ▶ Yhdistämällä päätelmät saadaan

$$\sin \theta_a = \sin \theta_r \quad \Rightarrow \quad \theta_a = \theta_r,$$

mikä oli odotettu tulos

Taittumislaki Huygensin periaatteella



- ▶ Alkeisaallot etenevät läpäisypuolen materiaalissa nopeudella c/n_b
- ▶ Alkeisaallot muodostavat uuden aaltorintaman (nopeus $v_b = c/n_b$)
- ▶ AB :stä syntyy taittunut rintama ED ; θ_a on tulokulma, θ_b taittumiskulma

Taittumislaki Huygensin periaatteella

Jatkoa

- ▶ Kun tuleva aaltorintama on kulkenut B :stä D :hen (ajassa t), pinnan pisteestä A lähteneet alkeisaallot ovat kulkeneet A :sta E :hen ja muodostavat muiden väliltä AD lähteneiden alkeisaaltojen kanssa rintaman ED :

$$t = \frac{|BD|}{v_a} = \frac{|AE|}{v_b} \quad \Rightarrow \quad n_a |BD| = n_b |AE|$$

- ▶ Kuvasta saadaan kolmioiden avulla

$$|BD| = |AD| \sin \theta_a, \quad |AE| = |AD| \sin \theta_b$$

- ▶ Yhdistämällä päätelmät saadaan

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b,$$

mikä oli odotettu tulos

Yhteenveto luvusta 33

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Aaltorintama ja säde
- ▶ Aallon (valon) heijastuminen ja taittuminen
- ▶ Taitekerroin n (oli jo viime viikolla)
- ▶ Kokonaisheijastus
- ▶ Dispersio
- ▶ Polarisaatio, polarisaattori ja polarisoiva akseli
- ▶ Brewsterin kulma = polarointikulma

Tärkeitä kaavoja

Snellin laki

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b$$

Kokonaisheijastuksen rajakulma

$$\sin \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a}$$

Malusin laki

$$I = I_{\text{max}} \cos^2 \phi$$

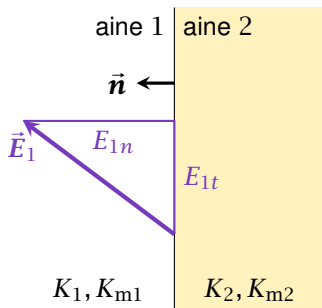
Brewsterin kulma

$$\tan \theta_p = \frac{n_b}{n_a}$$

Kenttien rajapintaehdot (lisämateriaalia)

Kenttien rajapintaehdot

Alkuasetelma



- ▶ Alaindeksi 1 tai 2 kertoo kummassa aineessa kenttä on.
- ▶ Alaindeksi t tarkoittaa kentän tangentialikomponenttia rajapinnan suhteen ja alaindeksi n kentän normaalikomponenttia (yksikkövektorin \hat{n} suuntaan).
- ▶ Kenttien $\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{E}_2$ ja \vec{B}_2 on toteutettava Maxwellin yhtälöt molemmiin puolin rajapintaa.

Kenttien rajapintaehdot

Maxwellin yhtälöt

1. Magnetismin Gaussin laki

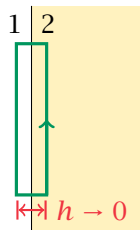
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{1n} = B_{2n}$$

koska magneettikenttäviivat muodostavat suljettuja silmukoita.

2. Faradayn laki

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \Rightarrow \quad E_{1t} = E_{2t}$$

Kuvan polun läpi menee nollavuo, kun $h \rightarrow 0$.



Kenttien rajapintaehdot

Maxwellin yhtälöt, jatkoa

3. Gaussin laki

$$\oint K \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl-free}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_1 E_{1n} = K_2 E_{2n}}$$

kun rajapinnalla ei ole vapaata varausta. (Tarkastellaan rajapinnalla pillerirasiaa, jonka korkeus menee nolnaan ...)

4. Ampèren laki

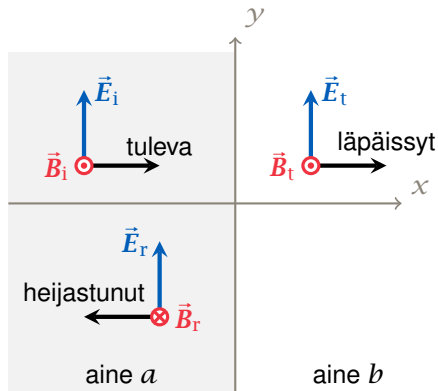
$$\oint \frac{1}{K_m} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_C + i_D)_{\text{encl}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{1t}/K_{m1} = B_{2t}/K_{m2}}$$

kun rajapinnalla ei ole pintavirtaa. (Sama polku kuin Faradayn lain yhteydessä.)

Tässä oletettiin siis, että molemmat materiaalit ovat **ei-johtavia**. (Edellisen sivun ehdot ovat yleispäteviä.)

Amplitudin heijastus- ja läpäisykertoimet

Kohtisuora heijastus ja läpäisy kahden ei-johtavan eristeen rajapinnassa



Yrite kolmella tasoallolla:

$$\vec{E}_i(x, t) = +\hat{j} E_i \cos(k_a x - \omega t), \quad x \leq 0$$

$$\vec{E}_r(x, t) = +\hat{j} E_r \cos(k_a x + \omega t), \quad x \leq 0$$

$$\vec{E}_t(x, t) = +\hat{j} E_t \cos(k_b x - \omega t), \quad x \geq 0$$

$$\vec{B}_i(x, t) = +\hat{k} B_i \cos(k_a x - \omega t), \quad x \leq 0$$

$$\vec{B}_r(x, t) = -\hat{k} B_r \cos(k_a x + \omega t), \quad x \leq 0$$

$$\vec{B}_t(x, t) = +\hat{k} B_t \cos(k_b x - \omega t), \quad x \geq 0$$

Rajapinnalla $x = 0$ kokonaiskenttien **on toteuttava rajapintaehdot** kaikilla t . Tulevan tasoallon amplitudi E_i (ja $B_i = E_i/v_a = n_a E_i/c$) oletetaan tunnetuksi.

Amplitudin heijastus- ja läpäisykertoimet

Rajapintaehtojen tarkistus

- ▶ Sähkö- ja magneettikenttien normaalikomponentit ovat nollia \Rightarrow rajapintaehdot ok.

- ▶ Tangentiaalinen \vec{E} on jatkuva \Rightarrow

$$E_i + E_r = E_t \quad (I)$$

- ▶ Tangentiaalinen \vec{B}/K_m on jatkuva \Rightarrow

$$B_i - B_r = B_t \quad \Leftrightarrow \quad n_a E_i - n_a E_r = n_b E_t \quad (II)$$

- ▶ Määritellään sähkökentän **heijastus-** ja **läpäisykertoimet** Γ ja τ ,

$$E_r = \Gamma E_i \quad \text{ja} \quad E_t = \tau E_i,$$

ja ratkaistaan kertoimet yhtälöistä (I) ja (II) eli $1 + \Gamma = \tau$ ja $n_a - n_a \Gamma = n_b \tau$

Fresnelin kertoimet

- ▶ **Kohtisuorasti** rajapintaan tulevan aallon **Fresnelin kertoimet** eli sähkökentän heijastus- ja läpäisykertoimet ovat siis:

$$\Gamma = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} \quad \text{ja} \quad \tau = \frac{2n_a}{n_a + n_b} = 1 + \Gamma$$

(ei-johtava eristeaine)

(Ylikurssia:)

- ▶ **Vinosti** kahden ei-johtavan eristeaineen rajapintaan tuleva tasoaalto on jaettava **tulotason kanssa yhdensuuntaisesti** (\parallel) ja **tulotaso vastaan kohtisuorasti** (\perp) lineaaripolarisoituneeseen komponenttiin
- ▶ Näiden kahden **ominaispolarisaation** Fresnelin kertoimet ovat

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= \frac{n_a \cos \theta_a - n_b \cos \theta_b}{n_a \cos \theta_a + n_b \cos \theta_b} & \Gamma_{\parallel} &= \frac{n_a \cos \theta_b - n_b \cos \theta_a}{n_a \cos \theta_b + n_b \cos \theta_a} \\ \tau_{\perp} &= \frac{2n_a \cos \theta_a}{n_a \cos \theta_a + n_b \cos \theta_b} & \tau_{\parallel} &= \frac{2n_a \cos \theta_a}{n_a \cos \theta_b + n_b \cos \theta_a} \end{aligned}$$

missä sähkökenttien suunnat on valittu yhtymään kohtisuoran tapauksen kanssa, kun $\theta_a = \theta_b = 0$

- ▶ Näistä ilmenee yhdessä Snellin lain kanssa mm. **heijastuksen polarisuus**