



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2019

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

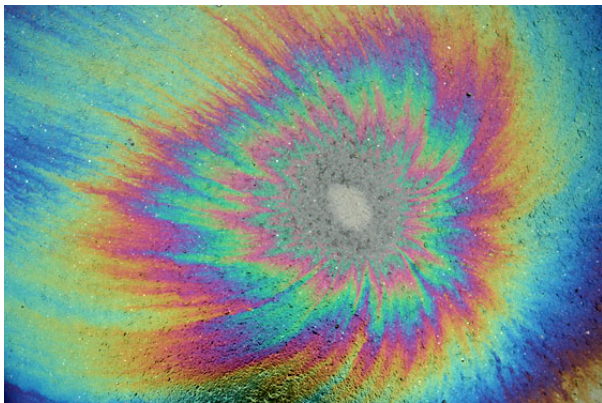
Luentoviikko 11

Interferenssi (YF 35)

- Interferenssi ja koherentit lähteet
- Kahden lähteen interferenssi
- Interferenssikuvioiden intensiteetti
- Interferenssi ohutkalvoissa
- Michelsonin interferometri
- Yhteenveto

Diffraktio (YF 36)

- Fresnel- ja Fraunhofer-diffraktio
- Diffraktio yhdestä raosta
- Yhden raon kuvion intensiteetti
- Monen raon diffraktio
- Diffraktiohila
- Röntgendiffraktio
- Pyöreät aukot ja erotuskyky
- Yhteenveto



Lähde: http://spiff.rit.edu/classes/phys312/workshops/w9b/dblslit/dblslit_long.html, Jeff Wignall

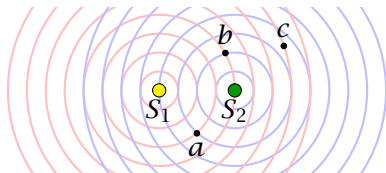
Tavoitteena on oppia

- ▶ mitä tapahtuu, kun kaksi aaltoa yhtyy (interferoi)
- ▶ miten tulkita koherenttien valoaaltojen interferenssikuvioita
- ▶ miten interferenssikuvion eri kohtien intensiteetti määritetään
- ▶ miten ohutkalvointerferenssi syntyy
- ▶ miten interferenssiä voi käyttää erittäin pienten etäisyyksien mittaamiseen

Interferenssi kahdessa tai kolmessa dimensiossa

- ▶ **Interferenssi** viittaa tilanteeseen, jossa avaruudessa on useita aaltoja päällekkäin – tilanteen tarkastelu on **fysikaalista optikkaa**
- ▶ **Superpositioperiaatteen** mukaisesti aaltojen **poikkeamat** (displacement: amplitudi tai kenttävektori) voidaan **laskea yhteen joka pisteessä joka hetki** (mahdollista **linearisessa** väliaineessa)
- ▶ Interferenssi-ilmiöt erottuvat parhaiten yhdistämällä **yksitaajuisia** (monokromaattisia) **sinimuotoisia aaltoja** (tarkastellaan kahta **skalaarista** lähdettä S_1 ja S_2):

$$A = A_1 \cos(k_1 r_1 - \omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(k_2 r_2 - \omega_2 t + \delta_2)$$



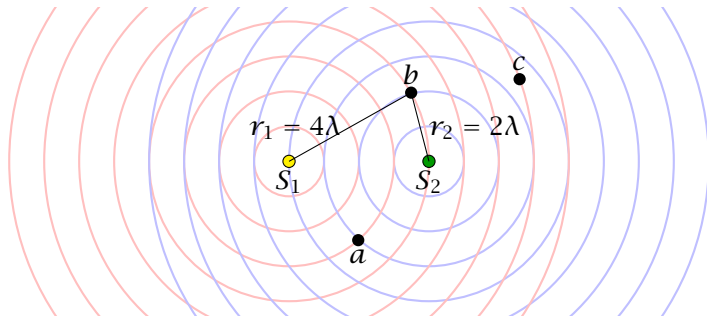
Koherentit lähteet

- ▶ Jos kahden yksitaajuisen sininmuotoisen lähteen taajuus on sama ja vaihe-ero on vakio ($\omega_1 = \omega_2$, $\delta_2 - \delta_1 = \text{vakio}$) lähteet ovat koherentteja ("vaihe"?), – tällaisen lähdeparin synnyttämät "aallot ovat koherentteja"
- ▶ Ääni- ja radiotekniikassa koherentteja lähteitä on helppo toteuttaa
- ▶ Valo muodostuu atomien (lämpöliikkeestä johtuvien) viritysten purkautumisesta
- ▶ Purkautumisen kesto tyypillisesti 10^{-8} s
- ▶ Purkaukset ovat riippumattomia toisistaan
 - ⇒ epäkoherentti ja ei-monokromaattinen valo; aurinko ja lamput lähettävät purskeista valoa (ilmassa purske on muutaman mikrometrin pituinen [= koherenssipituus])
- ▶ Laserissa viritysten purkautumiset riippuvat toisistaan
 - ⇒ koherentti ja (yleensä) monokromaattinen valo

Interferenssi ja matkaero

Sininmuotoiset samanamplitudiset (!) lähteet

$$A = A_1 \cos(k_1 r_1 - \omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(k_2 r_2 - \omega_2 t + \delta_2)$$



- ▶ **Vahvistava** interferenssi, kun aallot ovat samanvaiheiset (esim. *a, b*):
 $k_2 r_2 - \omega_2 t + \delta_2 = k_1 r_1 - \omega_1 t + \delta_1 + 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- ▶ **Sammuttava** interferenssi, kun aallot ovat vastakkaisvaiheiset (esim. *c*):
 $k_2 r_2 - \omega_2 t + \delta_2 = k_1 r_1 - \omega_1 t + \delta_1 + 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Interferenssiehdot

- ▶ Oletus: **lähteet ovat identtisiä** eli
 - ▶ amplitudit ovat samat
 - ▶ lähteiden taajuus ω on sama \iff ^{miksi?} aaltojen aallonpituus $\lambda = 2\pi/k$ on sama
 - ▶ lähteiden alkuvaihe δ on sama (eli lähteet ovat samanvaiheiset)
 - ▶ **aaltojen** polarisaatio on samansuuntainen (jottei tarvita vektorisummausta)
- ▶ Lähteet ovat siis **koherentit**
- ▶ Edellisen kalvon **interferenssiehdot** saavat muodon:

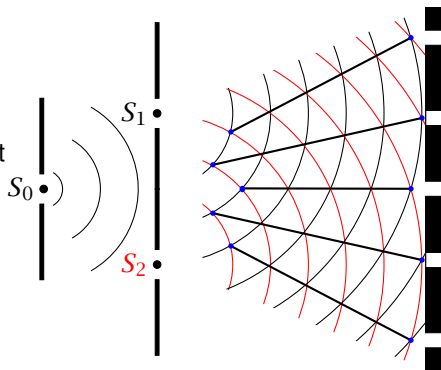
$$r_2 - r_1 = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{vahvistava eli konstruktivinen i.}$$

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{sammuttava eli destruktivinen i.}$$

- ▶ **Huomaa** rajoitukset, joilla ehdot pätevät!

Youngin kaksoisrakokoe (1800)

- ▶ Valaistetaan rakoja S_0 yksivärisellä valolla
- ▶ Raosta lähtevät (alkeis)aallot osuvat rakoihin S_1 ja S_2
- ▶ S_1 ja S_2 ovat koherentteja valonlähteitä
 - ⇒ interferenssikuvio (interferenssijuovia) varjostimella



Kaksoisraon interferenssiehdot

- ▶ Lähettimet **samassa vaiheessa**
- ▶ Aaltojen matkaero \Rightarrow vaihe-ero

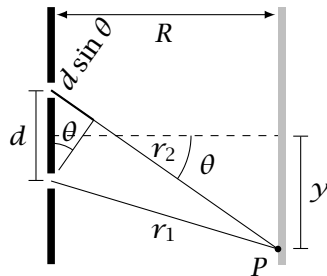
$$r_2 - r_1 \approx d \sin \theta, \text{ kun } r_1, r_2, R \gg d$$

- ▶ **Vahvistava interferenssi**, kun

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- ▶ **Sammuttava interferenssi**, kun

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

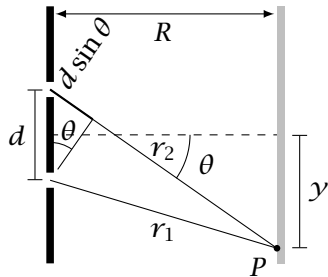


Kaksoisraon interferenssiehdot

Jatkoa

- ▶ Maksimikohtien sijainnit varjostimella:
 $y_m = R \tan \theta_m$
- ▶ **Pienillä kulmilla** $\tan \theta \approx \sin \theta$, joten saadaan Youngin kaksoisrakokokeen **interferenssimaksimien** paikat:

$$y_m \approx R \sin \theta_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_m \approx R \frac{m\lambda}{d}}$$



Kahden lähteen interferenssin intensiteetti

- ▶ Lähteiden S_1 ja S_2 interferenssin **amplitudi** pisteessä P :

$$E_1 = E \cos(\omega t + \phi/2), \quad E_2 = E \cos(\omega t - \phi/2) \quad \Rightarrow \quad E(t) = E_1 + E_2,$$

missä ϕ = aaltojen vaihe-ero P :ssä

- ▶ Kosinin summakaavan avulla (kaavakokoelma!) saadaan

$$E(t) = E \left[\cos(\omega t) \cos(\phi/2) - \sin(\omega t) \sin(\phi/2) + \cos(\omega t) \cos(-\phi/2) - \sin(\omega t) \sin(-\phi/2) \right] = 2E \cos(\omega t) \cos(\phi/2)$$

joten kahden lähteen summakentän amplitudi

$$E_P = 2E \cos(\phi/2)$$

- ▶ Intensiteetti $I = S_{\text{av}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_P^2 = \frac{4}{2} \epsilon_0 c E^2 \cos^2(\phi/2)$

- ▶ Maksimi, kun $\phi = 0$ on $I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$, ja yleensä

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

Vaihe-eron ja matkaeron yhteys

- ▶ Aaltojen vaihe- ja matkaerolla on yhteys

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$$

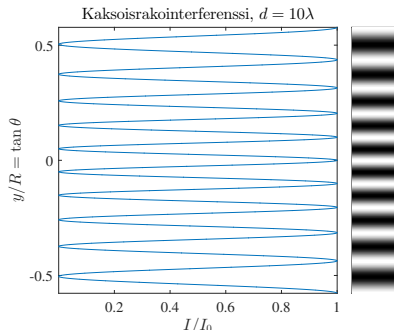
- ▶ Jos $d \ll R$, $r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \Rightarrow \phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$

- ▶ Tällöin intensiteetti

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- ▶ Jos vielä varjostin on kaukana raoista, $y \ll R$ ja $\sin \theta \approx y/R$

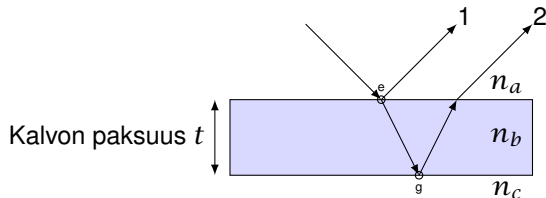
$$\Rightarrow I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi y d}{\lambda R} \right)$$



Interferenssi ohutkalvossa

Heijastuskerroin

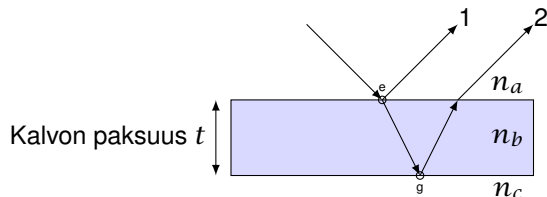
- Tutkitaan heijastusta ja interferenssiä, kun valo osuu ohueen kalvoon (esim. öljyläikkä veden pinnalla tai saippuakupla)



- Fresnelin kertoimet (vrt. luentoviikko 9) kertovat, kuinka suuri osa tulevasta (i) kentästä heijastuu (r) ja läpäisee (t) rajapinnan
- Kohtisuoralle heijastukselle heijastuskerroin $\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$
(n_i on tulopuolen taitekerroin ja n_t läpäisypuolen)

Interferenssi ohutkalvossa

Vaihesiirto



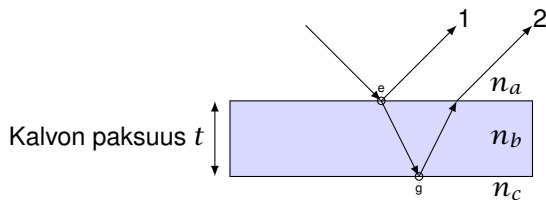
- Heijastuskertoimesta seuraa π :n vaihesiirto heijastuneen ja tulevan säteen välille, jos $n_t > n_i$; esim. säde 1:

$$n_b > n_a \quad \Rightarrow \quad E_r = - \left| \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} \right| E_i \cos(kx - \omega t) = |\Gamma| E_i \cos(kx - \omega t + \pi)$$

(tapahtuuko säteelle 2 pisteessä (g) vaihesiirtoa?)

Interferenssi ohutkalvossa

Matkaero



- ▶ Heijastuksessa pisteessä (e) säteelle 1 syntyy **vaihesiirto** $\phi_1 = \pi$ ja levyn sisällä säteen 2 vaihe muuttuu kulmalla ϕ_2 , joten säteiden 1 ja 2 **vaihe-ero** δ kohtisuorassa heijastuksessa on $\delta = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \pi$, kun λ on **aallonpituus levyssä**
- ▶ Matkaero $r_2 - r_1 \approx 2t \implies \delta = 2t \frac{2\pi}{\lambda} - \pi$
 - ▶ **Huomaa:** Vaihesiirto syntyy siinä heijastuksessa, jossa $n_t > n_i$

Interferenssi ohutkalvossa

Interferenssiehdot

- ▶ Säteiden 1 ja 2 välillä on **vahvistava** interferenssi, kun ($n = n_b$, $n_a = n_c = 1$; λ_0 on aallonpituus ilmassa)

$$\delta = 2\pi m \quad \Rightarrow \quad \delta = 2t \frac{2\pi n}{\lambda_0} - \pi = 2\pi m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4nt}{\lambda_0} - 1 = 2m \quad \Rightarrow \quad 2t = \frac{\lambda_0}{n} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ **Sammuttava** interferenssi, kun $\delta = (2m - 1)\pi$:

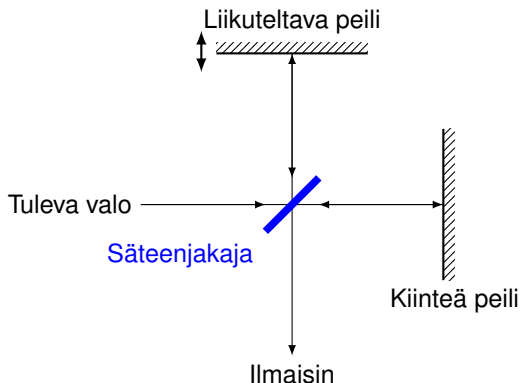
$$2t = \frac{m\lambda_0}{n}, \quad m = 1, 2, \dots$$

- ▶ Huomaa, että nämä tulokset **pätevät ainoastaan** systeemille, jossa on suhteellinen **puolen aallon vaihesiirto** (esim. ilma-lasi-ilma) – muille tapauksille ne pitää johtaa erikseen
- ▶ Laskuissa on **oltava tarkkana**, syntykö jossain **suhteellinen puolen aallon vaihesiirto**

Michelsonin interferometri

- ▶ Tärkeä interferenssin sovellus
- ▶ Kun peiliä siirretään matka y , ilmaisimen yli pyyhkäisee interferenssijuovamäärä m ja voidaan laskea y tai säteen aallonpituus λ :

$$y = m \frac{\lambda}{2} \text{ tai } \lambda = \frac{2y}{m}$$



- ▶ Interferenssijuovista voidaan myös määrittää esim. tuntemattoman kaasun taitekerroin

Yhteenvedo luvusta 35

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Koherentit lähteet
- ▶ Vahvistava (konstrukttiivinen) ja sammuttava (destrukttiivinen) interferenssi
- ▶ Interferenssikuvio ja interferenssijuova
- ▶ Ohutkalvointerferenssi

Kaavoja?

- ▶ Matkaero $m\lambda \Rightarrow$ vahvistava interferenssi
- ▶ Matkaero $(m + 1/2)\lambda \Rightarrow$ sammuttava interferenssi
- ▶ Suhteellinen $\lambda/2$ vaihesiirto heijastuksien takia \Rightarrow matkaero toisin päin

Tämän osuuden kaikki -kaavat ovat kaavakokoelmassa.

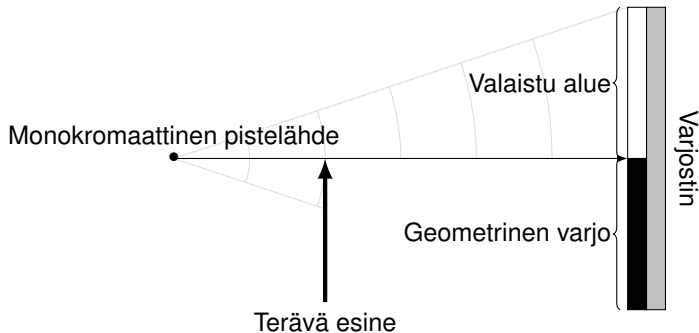
Diffraktio (YF 36)

Tavoitteena on oppia

- ▶ mitä tapahtuu, kun koherentti valo valaisee kohteen reunaa tai aukkoa
- ▶ ymmärtämään, miten kapean raon läpi kulkeva koherentti valo synnyttää diffraktiokuvion
- ▶ miten intensiteetti yhden raon diffraktiokuvion eri kohdissa määritetään
- ▶ mitä tapahtuu, kun koherentti valo valaisee lähekkäisten kapeiden rakojen rivistöä
- ▶ miten diffraktiohilaa voi käyttää aallonpituuden tarkkuusmittaukseen
- ▶ miten röntgendiffraktio paljastaa kiteiden atomirakenteen
- ▶ miten diffraktio asettaa rajat pienten yksityiskohtien havaitsemiselle teleskoopilla

Geometrisen optiikan rajoitukset

- ▶ Geometrisen optiikan mukaan valonsäde ei taivu kulkiessaan terävän reunan ohi, joten varjon reuna on terävä



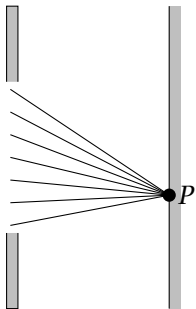
- ▶ Todellisuudessa varjon reuna ei ole terävä, vaan valon ja varjon reunassa on **diffraktiokuvio** (miksi – miten selitettävissä?)

Diffraktio ja Huygensin periaate

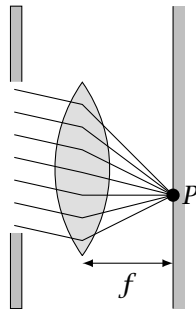
- ▶ **Diffraktio** on interferenssi-ilmiö, jota esiintyy reunojen ja aukkojen läheisyydessä
- ▶ Huygensin periaatteen mukaisesti aaltorintaman jokainen piste toimii (toisio)alkeisaaltojen lähteenä (alkeisaallot leviävät joka suuntaan aallon etenemisnopeudella) ja alkeisaaltojen verhopinta myöhempänä ajanhetkenä osoittaa aaltorintaman sijainnin tuolla hetkellä
- ▶ Uuden aallon hetkellinen ”poikkeama” (amplitudi tai kenttävektori) saadaan summaamalla alkeisaaltojen hetkelliset poikkeamat kussakin pisteessä (eli aaltoja tarkastellaan vaihe-eroineen)
- ▶ ”Interferenssi” on pienen lähdemäärän (~kahden lähteen) ilmiö, ”diffraktio” on suuren lähdemäärän tai aukkojakautuman ilmiö – kumpikin on seurausta superpositiosta ja Huygensin periaatteesta, joten ilmiöiden jako kahteen luokkaan on osin keinotekoinen

Lähi- ja kaukokenttädiffraktio

Lähikenttädiffraktio
eli **Fresnelin** diffraktio
= lähde, kohde ja varjostin lähellä (raosta lähtevät säteet eivät ole yhdensuuntaisia)



Kaukokenttädiffraktio
eli **Fraunhoferin** diffraktio
= pitkät etäisyydet (raosta lähtevät säteet ovat liki yhdensuuntaisia)



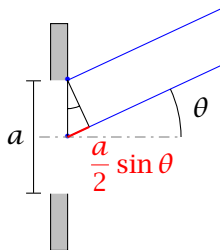
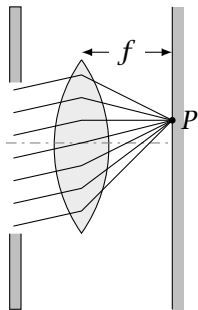
Yksi rako

- ▶ Valaistaan pitkää kapeaa rakoja monokromaattisella valolla (**tasoaallolla**) ja tarkastellaan kaukaiselle varjostimelle syntyvää kuviota
- ▶ Geometrisen optiikan **väite**: varjostimella näkyy raon kuva (samanmuotoisena ja -kokoisena)
- ▶ **Todellisuudessa** varjostimella on diffraktiokuva, jossa **tummat** ja valoisat alueet vuorottelevat keskuskuvion laidoilta ulospäin mentäessä (valoisa keskuskuvio **saattaa olla** jopa leveämpi kuin rako)
- ▶ **Huygensin periaatteen** mukaisesti raon jokainen pinta-alkio toimii uuden aallon lähteenä (kapean raon tapauksessa lähteet ovat raon pituussuuntaisia **suikaleita**, jotka tuottavat **syntierialkeisaaltoja**)
- ▶ Syntyneet aallot muodostavat uuden aaltorintaman, joka etenee alkuperäisen aallon nopeudella (koska väliaine on sama)
- ▶ Aaltojen intensiteetti varjostimella saadaan summaamalla kaikkien alkeisaaltojen vaikutukset aaltojen vaihe ja amplitudi huomioon ottaen

Tummien juovien suunnat

- ▶ Oletetaan pitkä kapea rako (raon **leveys** olkoon a ; raon pituussuunta on pirroksia vastaan kohtisuorassa ja **pituus** $\gg a$)
- ▶ **Kaukaiselle** varjostimelle osuvat diffraktoituneet säteet ovat lähes **yhdensuuntaisia** (= Fraunhoferin diffraktio)
- ▶ Diffraktiokuvio **tiivistetään** sylinterilinssillä, jonka polttoviivalla varjostin on
- ▶ Raon reunalla ja raon keskellä olevista **lähdesuikaleista** lähteneiden alkeisaaltojen matkaero varjostimella on $\Delta x = (a/2) \sin \theta$
- ▶ Sammuttava interferenssi, kun $\Delta x = \lambda/2$; pätee **kaikille** $a/2$ -etäisyyksisille suikaleille
- ▶ Rako voidaan jakaa neljään, kuuteen jne. suikaleeseen \Rightarrow **sammuttava** interferenssi, kun ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

$$\Delta x = \frac{a}{2m} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}}$$



Tummien juovien paikat

- ▶ Yleensä $\lambda \ll a$, joten θ on pieni:

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{m\lambda}{a} \quad ([\theta] = \text{rad})$$

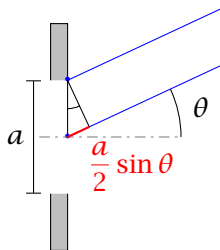
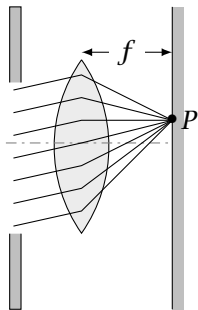
- ▶ Raon ja varjostimen etäisyys olkoon x (jos **ei ole** linssiä; jos **linssi on mukana**, $x = f$ eli linssin ja varjostimen välimatka)
- ▶ Tumman juovan m **paikka** (= juovan etäisyys kuvion keskikohdasta)

$$y_m = x \tan \theta \approx x\theta \quad \Rightarrow \quad y_m = x \frac{m\lambda}{a};$$

pätee, kun $y_m \ll x$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

- ▶ Tyypillisesti $\lambda \sim 500 \text{ nm}$ ja $a \sim 100 \mu\text{m}$
- ▶ Esim. HeNe-laser ($\lambda \approx 633 \text{ nm}$) valaisee kapeaa rakoa. Laske raon leveys, kun $x = 6 \text{ m}$ ja keskimmäisten tummien juovien välimatka on 32 mm :

$$y_1 = \frac{32 \text{ mm}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x\lambda}{y_1} \approx 0.24 \text{ mm}$$



Diffraktion kokonaisamplitudi

- ▶ Diffraktiokuvion intensiteetti lasketaan samalla tavalla kuin aiemmin kahden raon interferenssin intensiteetti
- ▶ Kokonaisamplitudi E_P (pisteessä P) saadaan raon ylä- ja alareunasta lähteneiden aaltojen vaihe-eron β (radiaaneina!) ja kuvion keskikohdan amplitudin E_0 avulla (E_0 on lähdesuikaleiden säteilemien amplitudien summa, kun aaltojen vaihe-ero on merkityksettömän pieni):

$$E_P = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_P^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

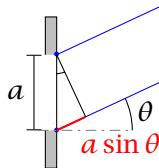
(säteilymaksimi on suunnassa $\beta = 0$ rad)

- ▶ Vaihe-ero β saadaan geometriasta:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{matkaero}$$

- ▶ Piirroksen mukaan matkaero on $a \sin \theta$, joten

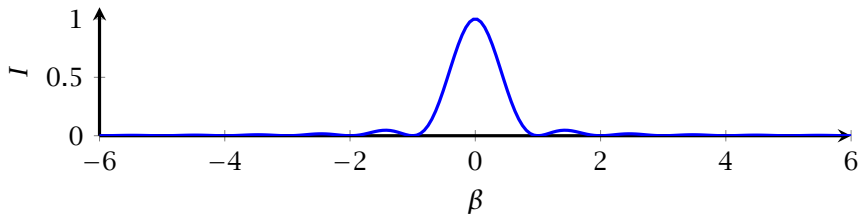
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$



Yhden raon diffraktion intensiteetti

- ▶ Yhden raon kuvion intensiteetti on siten

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2$$



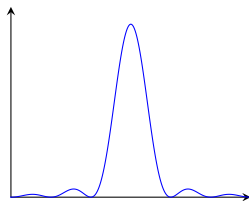
- ▶ Minimikohdat: $I(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 2\pi m \Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{a}$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$)
- ▶ Maksimien selvittäminen onkin konstikkaampaa...
- ▶ Raon **levittäminen kaventaa** keskusmaksimia!

Kaksi rakoa

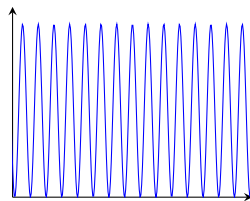
- ▶ Usean raon kuvio koostuu
 - ▶ diffraktiosta (minimit $m_d = \pm 1, \pm 2, \dots$; kunkin raon leveys on a)
 - ▶ interferenssistä (maksimit $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; rakojen on välimatka d)
- ▶ Kokonaisintensiiteetti on interferenssin ja diffraktion intensiteettien tulo

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2,$$

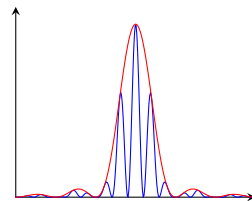
missä $\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$ ja $\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$



Diffraktio

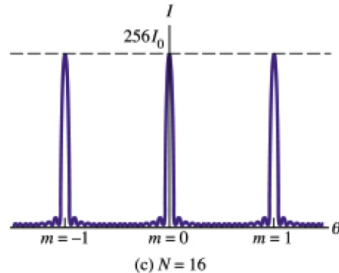
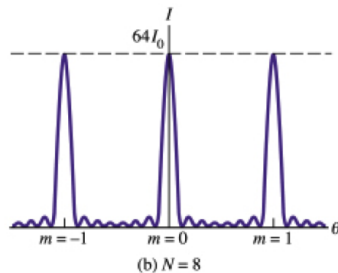
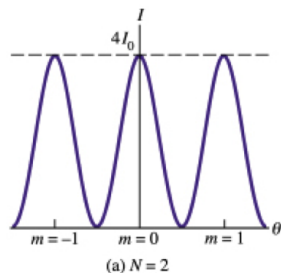


Interferenssi

Yhteisvaikutus ($d = 3a$)

Monta rakoa

- ▶ Kun rakoja on N kpl, diffraکتiomaksimien välissä on $(N - 1)$ minimikohtaa; maksimikohtien intensiteetti $I \sim N^2$ ja maksimin leveys $\sim 1/N$
- ▶ Suurten kapeiden maksimikohtien (eli **päämaksimien**) sijainnit voidaan **mitata tarkasti** \Rightarrow **sovellukset**



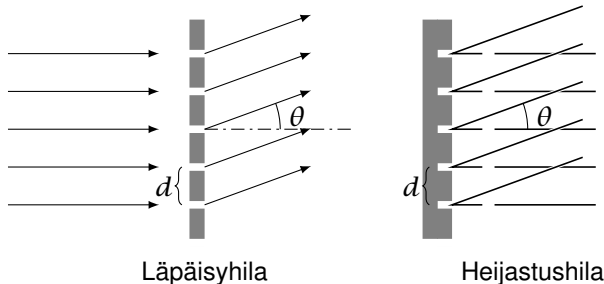
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Diffraktiohila

- = Suuri joukko tasavälisiä, yhdensuuntaisia aukkoja tai **uria**
- ▶ Voidaan tehdä esim. raapimalla timanttiterällä uria lasilevyn pintaan
- ▶ Kaksi tyyppiä: läpäisy- ja heijastushila
- ▶ **Intensiteettimaksimien** ehto on sama molemmille tyypeille:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(esim. $m = \pm 1$ -huiput ovat **ensimmäisen kertaluvun viivoja**)



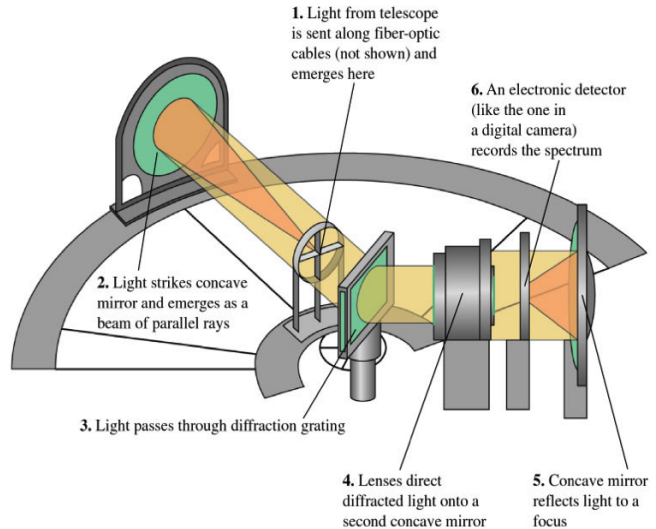
Hilaspektrografi

► Diffraktioehto

$$d \sin \theta = m\lambda$$

- Tutkittavan valon aallonpituus voidaan määrittää mittaamalla θ (= liu'utettavan peilin [2.] asento)
- Koko spektri saadaan käymällä kaikki kulmat läpi

(Kuva: YF)



Kromaattinen erotuskyky

- ▶ Spektrografin **kromaattinen erotuskyky** määritellään suhteena $R = \lambda / \Delta\lambda$, missä $\Delta\lambda$ on pienin erotettavissa oleva aallonpituusero
- ▶ Suurempi $R \equiv$ parempi laite
- ▶ **Valitaan** erottelukriteeri: erotamme lähekkäisten aallonpituuksien maksimit, kun yhden aallonpituuden **diffraktiomaksimi** osuu toisen aallonpituuden ensimmäiseen **diffraktiiminimiin**
- ▶ Maksimi saadaan, kun vierekkäisten rakojen säteilyn vaihe-ero on $\phi = 2\pi m$
- ▶ Maksimista päästään lähimpään minimiin kasvattamalla vaihe-eroa lisäyksellä $d\phi = 2\pi / N$, missä $N =$ rakojen lukumäärä
- ▶ Vierekkäisten rakojen säteilyn vaihe-ero on myös (**huomaa**: antiikva- d on differentiaalilin symboli, kursiivi- d rakojen välimatka!)

$$\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \quad \xrightarrow{d} \quad d\phi = \frac{2\pi d \cos \theta}{\lambda} d\theta$$

Spektrografin erotuskyky

- ▶ Saadaan

$$d\phi = \frac{2\pi d \cos \theta}{\lambda} d\theta = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow d \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{N}$$

(vaihe-eron muutos maksimista minimiin)

- ▶ Toisaalta maksimeille pätee

$$d \sin \theta = m\lambda \xrightarrow{d} d \cos \theta d\theta = m d\lambda \quad (\text{lähekkäisten aallonpituuksien maksimit})$$

- ▶ Yhdistämällä yhtälöt saadaan ($d\lambda \rightarrow \Delta\lambda$)

$$\frac{\lambda}{N} = m\Delta\lambda \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

- ▶ Erotuskyky **paranee, kun N kasvaa**

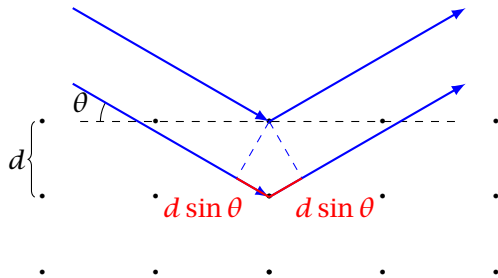
Röntgendiffraktio

- ▶ Röntgensäteiden aallonpituus on kiteen atomien välisen etäisyyden suuruusluokkaa, $\lambda \sim 1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm}$
- ▶ Röntgensäteillä valaistu kide sirottaa säteitä ja sironneista säteistä syntyy diffraktiokuvio kiteen säännöllisen hilan vuoksi (vaikka suurin osa säteistä kulkee kiteen läpi suoraan)
- ▶ **Röntgendiffraktio** (oikeastaan -interferenssi) on tärkeä menetelmä esim. kiteiden ja proteiinien rakenteen tutkimuksessa
- ▶ Vahvistava interferenssi saadaan, kun vierekkäisistä atomiriveistä sironneiden aaltojen matkaero toteuttaa **Braggin ehdon**

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

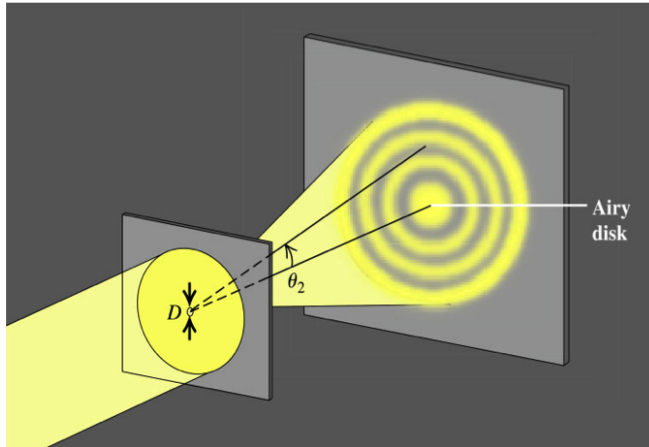
missä θ on **tulevan säteen ja pinnan välinen kulma** ja d on kiteen atomitasojen välinen etäisyys; lisäksi säteiden **tulokulman ja tarkastelukulman** pitää olla yhtä suuri ja $m\lambda < 2d$ (m on jälleen kertaluku)

Braggin ehto



Pyöreän aukon diffraktiokuvio

- ▶ Valo taipuu pyöreässä aukossa kuten kapeassa raossa
- ▶ Pyöreän raon diffraktiokuviossa on valoisa **keskuskieppo** sekä valoisia ja tummia **renkaita**

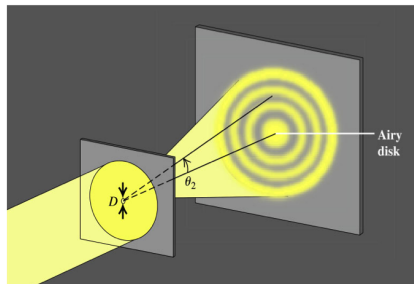


Airy'n kiekko

- ▶ Valoisa keskuskiekkko on **Airy'n kiekko**
- ▶ Kiekko rajautuu ensimmäiseen tummaan renkaaseen suunnassa θ_1 (aukon halkaisija olkoon D):

$$\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

[Ylikurssia: Kuvion intensiteetti muuttuu säteittäissuunnassa funktion $(J_1(ka \sin \theta)/(ka \sin \theta))^2$ verrannollisena ($a = D/2$); J_1 on ensimmäisen kertaluvun ensimmäisen lajin Besselin funktio ja 1.22 on funktion ensimmäinen nollakohta jaettuna piillä]

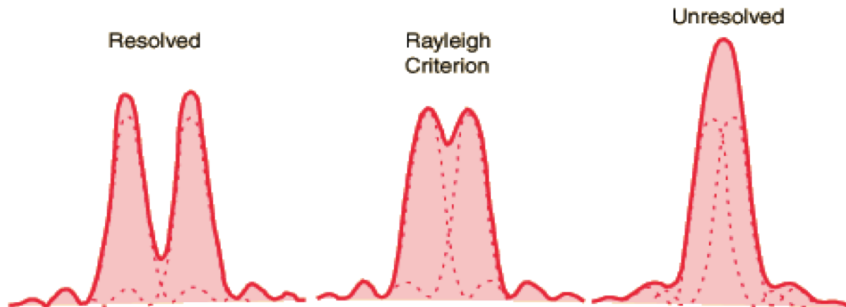


Erotuskyky

- ▶ Diffraktion takia **piste** kuvautuu optisissa laitteissa **ympyräkiekoksi**
- ▶ Optisen kojeen tuottamien **kuvapisteid** keskinäiset kulmaetäisyydet ovat samat kuin **kohdepisteiden** keskinäiset kulmaetäisyydet
- ▶ Kahden lähekkäisen kohdepisteen kuvat ovat vielä erotettavissa toisistaan, jos yhden pisteen diffraktiokuvan **huippu** on toisen pisteen diffraktiokuvan ensimmäisen **minimin** kohdalla
- = **Rayleigh'n kriteeri** kohteidenerotuskyvyllä – kohteet voi erottaa, jos niiden kulmaetäisyydelle θ pätee

$$\sin \theta > 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

- ▶ Järjestelmä on **diffraktiorajoitteinen**, jos **erotuskykyä** rajoittaa diffraktio

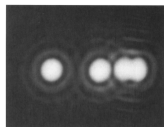


Aukon vaikutus erotuskykyyn

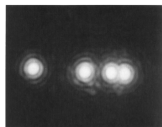
- ▶ Rayleigh'n kriteeristä seuraa optisten järjestelmien (kulma)erotuskyvyn raja:

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

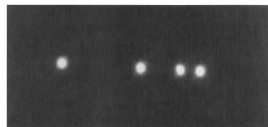
- ▶ Määritelmä on mielivaltainen mutta antaa suuruusluokan
- ▶ Suuren optisen aukon käyttö parantaa erotuskykyä – millä hinnalla?



Pieni aukko



Keskikokoinen aukko



Suuri aukko

(Kuvissa pistelähteet pysyvät paikoillaan ja optisen järjestelmän aukkoa kasvatetaan: erotuskyky paranee)

(Kuvat: YF)

Yhteenveto luvusta 36

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Fresnelin ja Fraunhoferin diffraktio
- ▶ Diffraktiokuvio (erityisesti tummat juovat)
- ▶ Diffraktiohila
- ▶ Hilaspektrografi ja kromaattinen erotuskyky
- ▶ Röntgendiffraktio ja Braggin ehto
- ▶ Airyn kiekko
- ▶ Rayleigh'n kriteeri

Tärkeitä kaavoja

Yhden raon tummat juovat ja intensiteetti

$$\sin \theta = m\lambda/a, \quad I = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2$$

Diffraktiohilan intensiteettimaksimit

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Braggin ehto

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

Rayleigh'n kriteeri \Rightarrow

$$\sin \theta > 1.22\lambda/D$$