Usean muuttujan funktiot

Tarkastellaan kuvauksia $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.

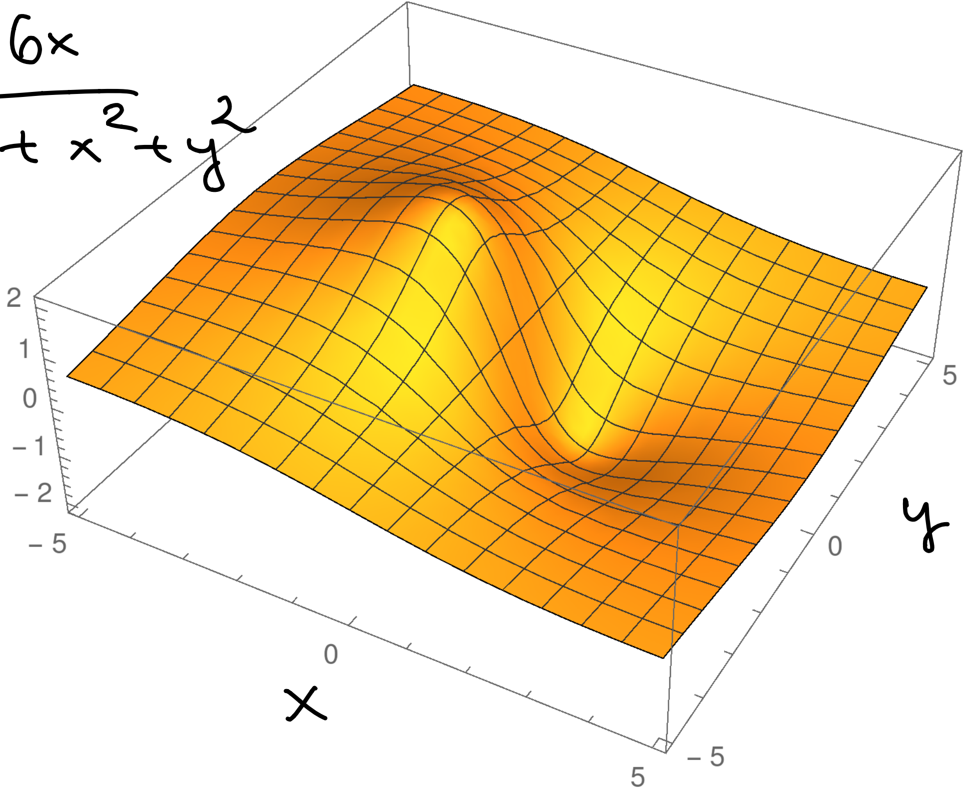
Jos $n = 1$, F on skalaarisuure,
muutoin, kyseessä on vektoriarvoinen
suure.

<u>Esimerkki</u> Piste $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
luentosalissa.

Lämpötila $T(x, y, z) \in \mathbb{R}$
Ilmanpaine $p(x, y, z) \in \mathbb{R}$
Ilmavirran suunta $w(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

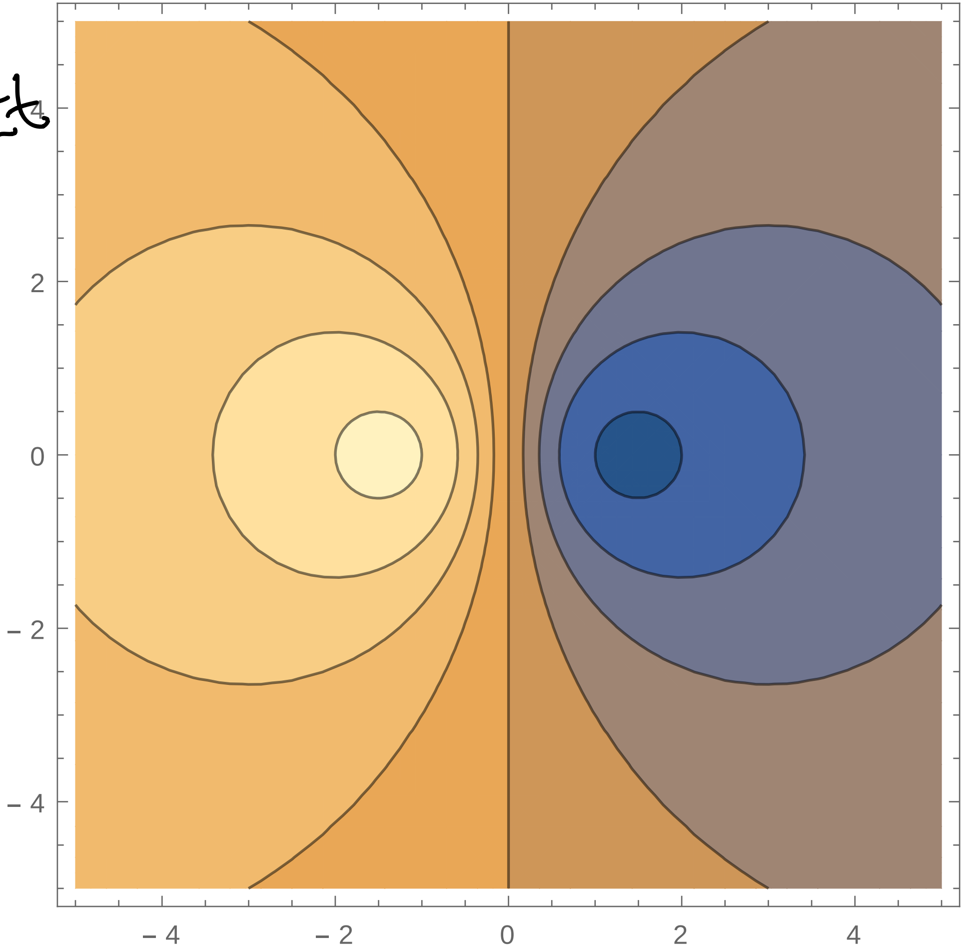
<u>Kuvaajista</u> : Yhtälön $z = f(x, y)$
ratkaisut muodostavat
pistejoukon $(x, y, f(x, y))$
eli kyseessä on pinta.

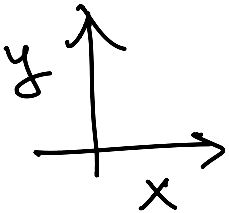
$$z = -\frac{6x}{2+x^2+y^2}$$



Pinta

Tasa-arvokäyrät





Tasa-arvokäyrät

Karttojen korkeuskäyrät (korkeus, ilmanpaine sääkartassa) ovat formaalisti tasa-arvokäyriä.

Pinnalla $z = f(x,y)$ tasa-arvokäyrä on pistejoukko, jonka alkiot ovat yhtälön $C = f(x,y)$ ratkaisut eli pisteet (x, y, C).

Huomaa, että tasa-arvokäyrien joukko ei määritä pintaa yksikäsitteisesti!

Esimerkki $z = g(x,y)$; $z \geq 0$

Implisiittisesti: $x^2 + (y-z)^2 = 2z^2$

Asetetaan $z = g(x,y) = C$, mistä

$$x^2 + (y-C)^2 = 2C^2$$

Kyseenä on ympyrä, jonka kp on $(0,C)$ ja säde on $\sqrt{2}C$.

Eli, kun C eli z kasvaa, taso-arvo-käyrien (ympyröiden) säde kasvaa ja niiden kp:t etääntyvät origosta y-akselia pitkin.

Raja-arvot ja jatkuvuus

Määritelmä $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, jos

(i) f on määritelty jokaisessa pisteen (a,b) ympäristössä

(ii) kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $\delta = \delta(\varepsilon)$ s.e. $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ aina kun f on määritelty pisteessä (x,y) ja $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$.

Esimerkki $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Raja-arvo origossa $= 0$ (?)

Arvioidaan: $x^2 \le x^2 + y^2$

Siis:

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right|$$

$$\leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Formaalisti: Olkoon $\varepsilon > 0$, joten valitaan $\delta = \varepsilon$, jolloin

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon \quad \text{aina kun}$$
$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

eli määritelmän mukaan raja-arvo on olemassa ja $= 0$.