Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Harjoitukset, Viikko 3, 2019

Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Olkoon funktiolla $\mathbf{f} : E^3 \to E^3$ raja-arvo

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \neq \mathbf{o}.$$

Todista raja-arvon määritelmään perustuen, että

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{|\mathbf{f}(\mathbf{r})|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Ratkaisu: Arvioi etäisyyttä $|\mathbf{f}(\mathbf{r})/|\mathbf{f}(\mathbf{r})| - \mathbf{a}/|\mathbf{a}||$ samalla tavoin kuin todistettaessa osamäärän raja-arvoa koskevaa lausetta yhden muuttujan funktioille.

TEHTÄVÄ J2 Olkoon geometrisessa avaruudessa E^3 määriteltynä reaaliarvoinen funktio

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} \neq 0,$$

missä $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita. Tutki, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{o}} f(\mathbf{r}).$$

Ratkaisu: Ei ole.

TEHTÄVÄ V1 Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a)}\ \frac{(1+y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b)}\ \frac{x\tan y}{y}.$$

Ratkaisu: a) 1; b) 0.

TEHTÄVÄ V2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{a)}\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad \text{b)}\ \frac{xy(x^3 + y)}{x^4 + y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?
Ratkaisu: a) Ei voida; b) $a = 0$.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske kunkin funktion tapauksessa annettu osittaiderivaattalauseke ja saata se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon:

a) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \quad xf_x + yf_y,$
b) $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz), \quad f_x + f_y + f_z,$
c) $f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x/z}, \quad xf_x + yf_y + zf_z.$

Ratkaisu: a) $1/2$; b) $3/(x + y + z)$; c) 0.

TEHTÄVÄ J2 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + v \cos u\, \mathbf{j} + \cos u \cos v\, \mathbf{k}$ pisteeseen $(0, 0, 1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.
Ratkaisu: $z = 1$.

TEHTÄVÄ V1 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u, v) = u(1 + v)\mathbf{i} + u^2(1 - v)\mathbf{j} + u^3 v\mathbf{k}$ pisteeseen $(1, 1, 0)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.
Ratkaisu: $2x - y - 3z = 1$.

TEHTÄVÄ V2 Olkoon $f(x, y) = x^3 y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että nämä ovat yhtä suuria.
Ratkaisu: Yhteinen lauseke $12xy + 12x^2 \cos y - 2y \cos(xy) + xy^2 \sin(xy)$.

Haaste

Kertausta differentiaaliyhtälöistä: Laplace-yhtälön $\Delta u = 0$ radiaalinen eli säteittäinen muoto n-ulotteisessa avaruudessa on

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0.$$

(Tulkinta: $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = f(r)$, kun $n = 3$ jne. Tähän palataan myöhemmin.)
Määritä kaikki radiaaliset ratkaisut $f(r)$, kun
a) $n = 3$;
b) $n = 2$.
Vihjeitä: a-kohta: Kerro puolittain lausekkeella r^2, jolloin saadaan Euler-tyyppinen DY: siihen yrite $f(r) = r^\lambda$.
b-kohta (kertaluvun pudotus): Merkitse $v(r) = f'(r)$, jolloin $v'(r) = f''(r)$ ja saadaan separoituva (ja myös lineaarinen) 1. kertaluvun DY funktiolle $v(r)$. Lopuksi $f(r)$ integroimalla $v(r)$.