Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Harjoitukset, Viikko 4, 2019

Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita.

# Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{dw}{dt}$, kun

a) $w = xy + yz + zx, \quad x = e^t,\ y = 2t^2,\ z = e^{-t},$

b) $w = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad x = 2t,\ y = t^2,$

c) $w = \ln(x^2 + 3xy^2 + 4y^4), \quad x = 2t^2,\ y = 3t.$

TEHTÄVÄ J2 Approksimoi linearisoimalla funktion

$$f(x, y) = \sin(\pi xy + \ln y)$$

arvo pisteessä $(0.01, 0.15)$.

TEHTÄVÄ V1 Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ ja $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, kun

a) $w = x \ln(x^2 + y^2), \quad x = s + t,\ y = s - t,$

b) $w = e^{x+2y} \sin(2x - y), \quad x = s^2 + 2t^2,\ y = 2s^2 - t^2.$

TEHTÄVÄ V2 Approksimoi linearisoimalla funktion

$$f(x, y) = \frac{24}{x^2 + xy + y^2}$$

arvo pisteessä $(2.1, 1.8)$.

# Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

a) $f(x, y) = e^{x+y}, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (0, 0),$
b) $f(x, y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y^2), \quad \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad (1, 2),$
c) $f(x, y, z) = xy^2z^3, \quad 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad (-3, 2, 1),$
d) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad (3, -1, 4).$

**Ratkaisu:** a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.

TEHTÄVÄ J2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

a) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y},\ 2y + 1,\ xz^2),$
b) $f(x, y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2,$ keskus $= (0, 0),$ aste $= 3.$

**Ratkaisu:** a) $\begin{pmatrix} 1/y & -x^2/y & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix}$; b) $2xy^2 - 5y^3$.

TEHTÄVÄ V1 Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$. Tutki, mihin suuntaan pisteestä $(3, -1, 4)$ on edettävä, jotta a) funktio kasvaisi mahdollisimman nopeasti, b) funktio ei kasvaisi lainkaan. Mikä on funktion derivaatta nopeimman kasvun suuntaan?
**Ratkaisu:** a) $\mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k}$; b) kohtisuoraan eo. suuntaa vastaan. Derivaatta nopeimman kasvun suuntaan $\sqrt{5669} \approx 75.29$.

TEHTÄVÄ V2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

a) $f(x, y, z) = (xe^{-yz},\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y},\ \sqrt{x}z^2);$
b) $f(x, y) = y^2 \ln x,$ keskus $= (1, 0),$ aste $= 4.$

**Ratkaisu:** a) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}$; b) $(x-1)y^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2y^2$.

# Haaste

Tarkastellaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä $yu_x - xu_y = 0$, kun $u = u(x, y)$. Olkoon

$$U(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

ratkaisun esitys napakoordinaateissa.
a) Laske $U_r$, $U_\varphi$ ja ratkaise osittaisderivaatat $u_x$ ja $u_y$ niiden avulla lausuttuna.
b) Osoita alkuperäisen yhtälön avulla, että $U_\varphi = 0$ ja totea, että kaikki ratkaisut $u$ ovat radiaalisia.