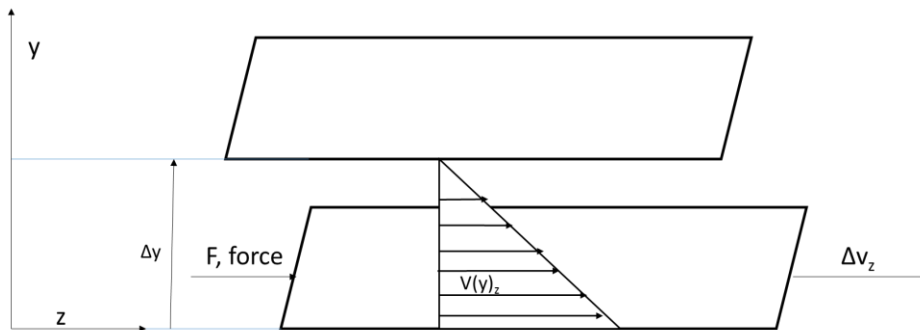


Laskuharjoitus 2

Osaamistavoitteet: Leikkausjännitys, Hagen-Poiseulle, Re -luvun eri variaatiot, dimensiottomien lukujen avulla tehty sekoituksen mallitus.

1. Laske leikkausjännitys τ_{yz} ja nopeusgradientti $\frac{dv_z}{dy}$ kuvan mukaisessa tilanteessa. Alempaa levyä vedetään nopeudella Δv_z oikealle, Δy on levyjen välinen etäisyys. Kolmiomainen muoto kuvaa virtausnopeuksia. Tilanteen tiedot $\Delta y = 5 \text{ cm}$, $\Delta v_z = 10 \text{ cm/s}$, levyjen välinen tila on täytetty etanolilla lämpötilassa 273 K , viskositeetti $\eta = 1.77 \text{ cP}$ (senttipoiisi). Laatumuunnoksia P (poisi) = $1 \text{ g}/(\text{cm s})$, $1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa s}$

(Esimerkki: Geankoplis Transport properties and unit operations. 3rd Edition, Example 2.4_1.)



2. Glyseriiniä, $T = 26.5 \text{ }^\circ\text{C}$, virtaa vaakasuoran halkaisijaltaan hyvin pienen putken läpi, pituus 0.3 m ja sisähalkaisija 0.0025 m , tästä saadaan mitattua painehäviöksi 275790 Pa . Glyseriinin tiheys on 1261 kg/m^3 , ja virtaus on $0.000001791 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - a) Mikä on glyseriinin viskositeetti?
 - b) Tarkista Reynoldsin luku ja arvioi onko virtaus laminaari vai turbulenti?
(Bird, Stewart, Lightfoot, Transport phenomena, Second edition, Bird, Stewart, Lightfoot, Second Edition, Example 2.3-1.)

Käytä ratkaisuun Hagen-Poiseullen yhtälöä löytyy: 2 Luento tai prujut kohta 3.1 Vastus suorassa putkessa, 3.1.1 Laminaarivirtaus

3. Laske Reynolds-luku seuraavissa tapauksissa ja mieti onko virtaus laminaari vai turbulenti.
 - a) Putkessa, jonka halkaisija 45 mm , veden keskivirtausnopeus on 1.2 m/s ja lämpötila on $5 \text{ }^\circ\text{C}$,
 $\rho = 999.992 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 1.5188 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$
 - b) a)-kohta, mutta keskimääräinen virtausnopeus on 3.5 m/s ja lämpötila on $80 \text{ }^\circ\text{C}$,

$$\rho = 971,829 \text{ kg/m}^3, \eta = 0,3565 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

- c) Poikkileikkaukseltaan suorakaiteenmuotoisessa avoimessa 0,5 m leveässä kanavassa virtaa nestettä 84 m³/h. Nesteen tiheys on 783 kg/m³ ja kinemaattinen viskositeetti on 0,7834 cSt (cSt = 10⁻⁶ m²/s). Nestettä kanavassa on 0,18 m korkeudelle. (Huomaa! Virtauskanava ei ole pyöreä pitää käyttää hydraulista halkaisijaa prujut 2.4.3 Hydraulinen halkaisija)
- d) Sisähalkaisijaltaan 300 mm tavallisessa putkessa virtaa öljyä, jonka keskivirtausnopeus on 2,5 m/s, lämpötilassa on 20 °C, $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 0,54 \text{ Pas}$

4. Tietyn sekoitintyyppin (6-lapainen rushton turbiini kuvassa alla) toiminta on korreloitu 2. luennon mukaisesti (kalvot "dimensiottomat luvut" ja sitä seuraava, tutki luennon kuvaajaa). Korreloidut arvot ovat $K_p=65$ ja $B = 5,75$. Sekoituksessa virtaus on varmasti turbulentti, jos $Re > 10\,000$. Virtaus on laminaaria, kun $Re < 100$. Luennossa on korreloitu Po-luku Re-luvun funktiona.

$$Re = \frac{\rho N d^2}{\eta}, Po = \frac{P}{\rho N^3 d^5}, \text{ joissa muuttujat}$$

Re sekoituksen Re -luku dimensioton

Po sekoituksen teholluku dimensioton

P teho [P] W

N kierrosnopeus [N] 1/s

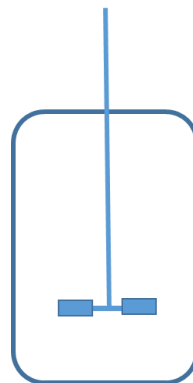
ρ nesteen tiheys [ρ]

d sekoittimen halkaisija [d] m

- a) Määritä onko virtaus laminaari vai turbulentti ja laske sekoituksen tehontarve P kun halkaisija $d = 0,61 \text{ m}$, nesteen tiheys $\rho=1120 \text{ kg/m}^3$, viskositeetti $\eta=1200 \text{ P}$, kierrosnopeus $N = 90 \text{ rpm}$ (rounds per minute). P (P = Poisi) ja $1P = 0,1 \text{ Pa s}$. Muista laadut, parasta muuttaa SI yksiköiksi.
- b) Määritä onko virtaus laminaari vai turbulentti ja laske sekoituksen tehontarve P kun halkaisija $d = 0,5 \text{ m}$, nesteen tiheys $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, viskositeetti $\eta=0,02 \text{ Pa s}$, kierrosnopeus 1 1/s . Onko virtaus laminaari vai turbulentti?



6-lapainen rushton turbiini



Sekoitin säiliössä

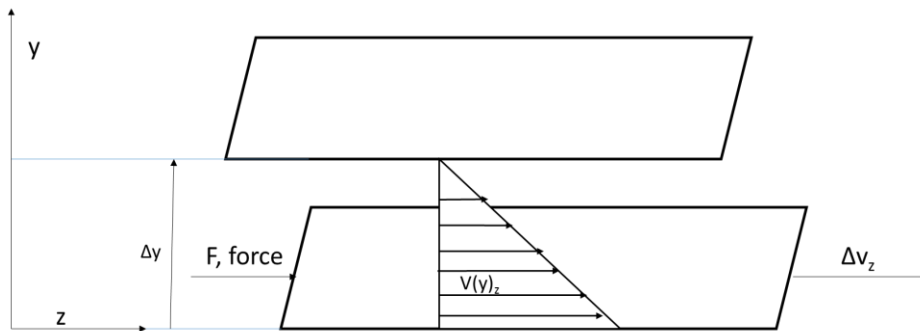
Ratkaisut

1. **1.** Laske leikkausjännitys τ_{yz} ja nopeusgradientti $\frac{dv_z}{dy}$ kuvan mukaisessa tilanteessa.

Alempaa levyä vedetään nopeudella Δv_z oikealle, Δy on levyjen välinen etäisyys.

Kolmiomainen muoto kuvaa virtausnopeuksia. Tilanteen tiedot $\Delta y = 5 \text{ cm}$, $\Delta v_z = 10 \text{ cm/s}$, levyjen välinen tila on täytetty etanolilla lämpötilassa 273 K , viskositeetti $\eta = 1.77 \text{ cP}$ (senttipoiisi). Laatumuunnoksia P (poisi) = $1 \text{ g}/(\text{cm s})$, $1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa s}$

(Esimerkki: Geankoplis Transport properties and unit operations. 3rd Edition, Example 2.4_1.)



Leikkausjännityksen yhtälö

$$\tau_{yz} = -\eta \frac{dv_z}{dy} \quad (1.1)$$

Erotetaan muuttujat

$$\tau_{yz} dy = -\eta dv_z \quad (1.2)$$

integroidaan

$$\tau_{yz} \int_{y_1=0}^{y_2=5} dy = -\eta \int_{v_1=10}^{v_2=0} dv_z \quad (1.3)$$

ratkaistaan

$$\tau_{yz} = \eta \frac{v_1 - v_2}{y_2 - y_1} \quad (1.4)$$

sijoitetaan tunnetut arvot

$$\tau_{yz} = 0,0177 \frac{\text{g}}{\text{cm s}} \frac{(10 - 0)\text{cm/s}}{(5 - 0)\text{cm}}$$

$$\tau_{yz} = 0,0354 \frac{g \text{ cm/s}^2}{\text{cm}^2}$$

Nopeusgradientti on lineaarinen

$$\text{Nopeusgradientti} = \frac{dv_z}{dy} = \frac{(10-0)\text{cm/s}}{(5-0)\text{cm}} = 2.0 \frac{1}{s} \quad (1.5)$$

2. Glyseriiniä, $T = 26.5 \text{ }^\circ\text{C}$, virtaa vaakasuoran halkaisijaltaan hyvin pienen putken läpi, pituus 0.3 m ja sisähalkaisija 0.0025 m, tästä saadaan mitattua painehäviöksi 275790 Pa. Glyseriinin tiheys on 1261 kg/m^3 , ja virtaus on $0.000001791 \text{ m}^3/\text{s}$.

a) Mikä on glyseriinin viskositeetti?

b) Laske Reynoldsin luku ja arvioi onko virtaus laminaari vai turbulenti?

(Bird, Stewart, Lightfoot, Transport phenomena, Second edition, Bird, Stewart, Lightfoot, Second Edition, Example 2.3-1.)

Käytä ratkaisuun Hagen-Poiseullen yhtälöä löytyy: 2 Luento tai prujut kohta 3.1 Vastus suorassa putkessa, 3.1.1 Laminaarivirtaus

Hagen Poiseulle on voimassa (virtaus laminaari).

$$\Delta p = \frac{8\eta\Delta L}{R^2} \bar{v} \Rightarrow \eta = \frac{R^2 \Delta p}{8\Delta L \bar{v}} \quad (2.1)$$

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} \quad (2.2)$$

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \Delta L \dot{V}} = \frac{\pi (0,0025 / 2)^4 (m)^4 275790 (Pa)}{8 * 0,3 (m) * 0,000001791 (m^3 / s)} = 0.49 \text{ Pas} \quad (2.3)$$

Reynoldsin luku

$$\text{Re} = \frac{\bar{v} D \rho}{\eta} = \frac{4 \dot{V} \rho}{\pi D \eta} = \frac{4 * 0,000001791 (m^3/s) * 1261 \text{ kg/m}^3}{\pi 0,0025 \text{ m} * 0,49 \text{ Pas}} = 2,34 \quad (2.4)$$

Virtaus on laminaari $\text{Re} < 2100$

3. Laske Reynolds-luku seuraavissa tapauksissa ja mieti onko virtaus laminaari vai turbulentti.

d) Putkessa, jonka halkaisija 45 mm, veden keskivirtausnopeus on 1,2 m/s ja lämpötila on 5 °C,

$$\rho = 999,992 \text{ kg/m}^3, \eta = 1,5188 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

e) a)-kohta, mutta keskimääräinen virtausnopeus on 3,5 m/s ja lämpötila on 80 °C,

$$\rho = 971,829 \text{ kg/m}^3, \eta = 0,3565 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

f) Poikkileikkaukseltaan suorakaiteenmuotoisessa avoimessa 0,5 m leveässä kanavassa virtaa nestettä 84 m³/h. Nesteen tiheys on 783 kg/m³ ja kinemaattinen viskositeetti on 0,7834 cSt (cSt = 10⁻⁶ m²/s). Nestettä kanavassa on 0,18 m korkeudelle. (Huomaa! Virtauskanava ei ole pyöreä pitää käyttää hydraulista halkaisijaa prujut 2.4.3 Hydraulinen halkaisija)

d) Sisähalkaisijaltaan 300 mm tavallisessa putkessa virtaa öljyä, jonka keskivirtausnopeus on 2,5 m/s, lämpötilassa on 20 °C, $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 0,54 \text{ Pas}$

a) $t = 5 \text{ °C}$

$$D = 0,045 \text{ m}, \bar{v} = 1,2 \text{ m/s}, \rho = 999,992 \text{ kg/m}^3, \eta = 1,5188 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

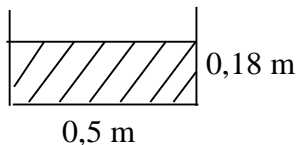
$$\text{Re} = \frac{\bar{v}D\rho}{\eta} = \frac{1,2 \text{ m/s} \cdot 999,992 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,045 \text{ m}}{1,5188 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}} = 35554,1 = 3,56 \cdot 10^4 \quad \text{turbulentti Re} > 4000$$

b) $t = 80 \text{ °C}$

$$D = 0,045 \text{ m}, \bar{v} = 3,5 \text{ m/s}, \rho = 971,829 \text{ kg/m}^3, \eta = 0,3565 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{v}D\rho}{\eta} = \frac{3,5 \text{ m/s} \cdot 971,829 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,045 \text{ m}}{0,3565 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}} = 4,29 \cdot 10^5 \quad \text{turbulentti Re} > 4000$$

c) suorakaiteen muotoinen virtauskanava:



$$D_h = 4 \frac{A}{P}$$

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \text{ kinemaattinen viskositeetti}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\bar{v} D_h \rho}{\eta} = \frac{\dot{V} \cdot 4A \rho}{AP \eta} = \frac{4\dot{V}}{P \nu} \\ &= \frac{4 \cdot 84 \text{ m}^3 / 3600 \text{ s}}{(2 \cdot 0,18 \text{ m} + 0,5 \text{ m}) \cdot 0,7834 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}} = 1,39 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Virtaus turbulentti $\text{Re} > 4000$

d) öljy 20 °C: $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$
 $\eta = 0,54 \text{ kg/ms}$

$$\text{Re} = \frac{\bar{v} D \rho}{\eta} = \frac{2,5 \text{ m/s} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 940 \text{ kg/m}^3}{0,54 \text{ kg/ms}} = 1306 \text{ (laminaari virtaus } \text{Re} < 2100)$$

4. Tietyn sekoitintyyppin (6-lapainen rushton turbiini kuvassa alla) toiminta on korreloitu 2. luennon mukaisesti (kalvot ”dimensiottomat luvut” ja sitä seuraava, tutki luennon kuvaajaa). Korreloidut arvot ovat $K_p=65$ ja $B = 5,75$. Sekoituksessa virtaus on varmasti turbulentti, jos $Re > 10\,000$. Virtaus on laminaaria, kun $Re < 100$. Luennossa on korreloitu Po-luku Re-luvun funktiona.

$$Re = \frac{\rho N d^2}{\eta}, \quad Po = \frac{P}{\rho N^3 d^5}, \quad \text{joissa muuttujat}$$

Re sekoituksen Re-luku dimensioton

Po sekoituksen teholluku dimensioton

P teho [P] W

N kierrosnopeus [N] 1/s

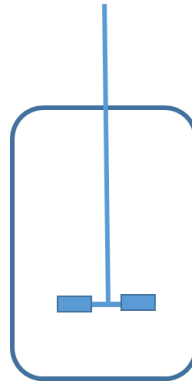
ρ nesteen tiheys [ρ]

d sekoittimen halkaisija [d] m

- a) Määritä onko virtaus laminaari vai turbulentti ja laske sekoituksen tehontarve P kun halkaisija $d = 0,61$ m, nesteen tiheys $\rho=1120$ kg/m³, viskositeetti $\eta=1200$ P, kierrosnopeus $N=90$ rpm (rounds per minute). P (P = Poisi) ja $1P = 0,1$ Pa s. Muista laadut, parasta muuttaa SI yksiköiksi.
- b) Määritä onko virtaus laminaari vai turbulentti ja laske sekoituksen tehontarve P kun halkaisija $d = 0,5$ m, nesteen tiheys $\rho=1000$ kg/m³, viskositeetti $\eta=0,02$ Pa s, kierrosnopeus 1 1/s. Onko virtaus laminaari vai turbulentti?



6-lapainen rushton turbiini



Sekoitin säiliössä

a) Lasketaan ensin Re -luku, jotta tiedetään millä alueella ollaan käyrällä.

$$\rho = 1120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$N = 90 \text{ rpm} \rightarrow 1,5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$d = 0,61 \text{ m}$$

$$\eta = 1200 \text{ P} = 120 \text{ Pa s} = 120 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho N d^2}{\eta}$$

$$\text{Re} = \frac{1120 (\text{kg} / \text{m}^3) \cdot 1,5 (1 / \text{s}) \cdot 0,61^2 (\text{m}^2)}{120 (\frac{\text{kg}}{\text{m s}})} = 5,2$$

Virtaus on laminaari $\text{Re} < 100$, joten teholluku saadaan

$$Po = \frac{K_p}{\text{Re}} = \frac{65}{5,2} = 12,5$$

$$Po = \frac{P}{\rho N^3 d^5} \Leftrightarrow$$

$$P = Po \rho N^3 d^5 = 12,5 \cdot 1120 (\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}) \cdot 1,5^3 (1 / \text{s}^3) \cdot 0,61^5 (\text{m}^5) = 3990 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = 3,99 \text{ kW}$$

b) Lasketaan ensin Re -luku, jotta tiedetään millä alueella ollaan käyrällä.

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$N = 1,0 \frac{1}{\text{s}}$$

$$d = 0,5 \text{ m}$$

$$\eta = 0,02 \text{ Pa s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho N d^2}{\eta}$$

$$\text{Re} = \frac{1000 (\text{kg} / \text{m}^3) \cdot 1 (1 / \text{s}) \cdot 0,5^2 (\text{m}^2)}{0,02 (\frac{\text{kg}}{\text{m s}})} = 12500$$

Virtaus on turbulenti $Re > 10000$, joten teholluku saadaan suoraan

$$Po = B = 5,75$$

$$Po = \frac{P}{\rho N^3 d^5} \Leftrightarrow$$

$$P = Po \rho N^3 d^5 = 5,75 \cdot 1000 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot 1,0^3 (1/\text{s}^3) \cdot 0,5^5 (\text{m}^5) = 180 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = 0,18 \text{ kW}$$