2 Reaalifunktioista

2.1 Funktion käsite

- on matematiikan tärkeimpiä peruskäsitteitä ja soveltavassa matematiikassa sitä tarvitaan empiiristen ilmiöiden ominaisuuksia kuvaavien muuttujien välisten **yhteyksien** kuvaamiseen.

Nämä yhteydet voivat olla:

suoraan soveltavia, esim.

- ostetun kaukolämmön määrän ja laskun suuruuden yhteys (deterministinen)

- lainan määrän, korkoprosentin ja maksuajan pituuden (3 muuttujaa) yhteys annuiteettilainan maksuerän suuruuteen (deterministinen)

- hyödykkeen yksikköhinnan ja kysynnän määrän yhteys (stokastinen)

- alkoholin hinnanmuutoksen yhteys kulutukseen (stokastinen)

Sovellusten kannalta jotkin funktiot ovat apuvälineitä, jotka auttavat ”välivaiheina” ilmiöiden mallintamisessa.

Joillain funktioilla ei ole suoria empiirisiä sovelluksia, mutta ne ovat tärkeitä funktiokäsitteen yleisen hahmottamisen ja tutkimisen kannalta.

Esim. Kiinteistöhuoltoyhtiö ostaa teollisuusprosesseissa syntyvää lauhdevettä, jota se välittää edelleen kiinteistöille kaukolämmöksi. Kiinteistölle välitettävästä sopimuksesta yhtiö maksaa tehtaalle

- perusmaksun, joka on 20.30 € kuukaudessa ja

- kulutuksesta 16.10 €/MWh.

Tämä sopimus määrittelee **yhteyden** eli **funktion** (kuvauksen, mallin)

jokaisen mahdollisen ostettavan määrän (x MWh) ja laskun suuruuden (y €) välillä, joka voidaan esittää **ilman matemaattisia merkintöjä**:

1) **Jokaista** mahdollista kulutettavaa määrää (MWh) **vastaa täsmällinen** laskun suuruus (€), joka saadaan selville

2) kertomalla kulutuksen suuruus (MWh) yksikköhinnalla 16.10 €/MWh ja lisäämällä tähän perusmaksu 20.30 €.

Tämän mukaan lasketaan:

Jos kulutus on

0 MWh, **niin** laskun suuruus on 16.10·**0**+ 20.30 = 20.30 €,

1 MWh, **niin** 16.10·**1**+ 20.30 **=** 36.40 €

…

100 MWh, **niin** 16.10·**100**+ 20.30 **= 1630.30** €

jne.

Sopimuksen määrittelevä funktio voidaan esittää **tiivistettynä**:

1) Sovitaan, että ostettavan määrän (MWh) $x \in A = \mathbf{R}^+$ ja laskun suuruuden (€) $y \in B = \mathbf{R}^+$ väliseen yhteyteen voidaan viitata merkinnällä

$f: A \rightarrow B$.

2) Täsmennetään, miten x:n suuruista kulutusta vastaava laskun

suuruus y lasketaan tämän säännön f avulla. Merkinnällä f(x) ilmaistaan, että arvo y on laskettu nimenomaan säännön f avulla arvosta x lähtien:

$y = f(x) = 16.10x + 20.30$

Kun on sovittu merkinnöistä, voidaan kaukolämpösopimus kirjoittaa:

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = 16.10x + 20.30$, missä

kulutus (MWh) $x \in A = \mathbf{R}^+$ ja lasku (€) $y = f(x) \in B = \mathbf{R}^+$,

Joukkoa A, johon kuuluvista (tässä mahdollisen kulutuksen) arvoista x tarkastelu ”aloitetaan”, sanotaan **lähtöjoukoksi**.

Joukko B, johon määritellyn yhteyden perusteella ”päädytään” (tässä maksettavien laskujen suuruuksiin), on **maalijoukko**.

Ostettava määrä voi olla periaatteessa mikä tahansa arvo $x \in A = \mathbf{R}^+$, mutta maalijoukossa B on ”liikaa” mahdollisia laskun suuruuksia.

Sopimuksen (funktion määrittelyn) mukaan pienin mahdollinen laskun suuruus on perusmaksu 20.30 € ja kulutuksen x kasvaessa lasku y = f(x) voi kasvaa ”periaatteessa rajatta” (siis ylärajaa ei määritellä).

Silloin on funktion f **arvojoukko** $V_f = [20.30, \infty)$.

Kulutuksen määrän ja laskun suuruuden yhteyden kuvaavaksi malliksi voidaan siis kirjoittaa myös funktio

f: $\mathbf{R}^+ \to [20.30,\infty)$, $f(x) = 16.10x + 20.30$,

missä kulutus (MWh) $x \in \mathbf{R}^+$ ja lasku (€) $y = f(x) \in [20.30,\infty)$

Edellä kuvaillun mukaisesti **määritellään**

funktio joukosta $A \neq \emptyset$ joukkoon $B \neq \emptyset$:

Jos **jokaista** alkiota $x \in A$ **vastaa täsmälleen yksi** alkio $y \in B$,

niin tämä vastaavuus on **funktio (kuvaus) joukosta A joukkoon B**,

ja siitä käytetään merkintää f: $A \to B$.

- Kun funktio f kuvaa alkion x∈A alkioksi y∈B, sanotaan y:tä x:n **kuvaksi**.

- Joukko A on funktion f **lähtö- (määrittely)joukko**.

- Joukko B on **maalijoukko**.

- Kaikki joukon A alkioiden x∈A kuvat y= f(x) muodostavat funktion f **arvojoukon V_f**.

Lähtöjoukon A ja maalijoukon B alkiot voivat olla mitä tahansa olioita.

Jos A⊂**R** ja B⊂**R**, niin funktiota f sanotaan **reaalifunktioksi**.

Sovelluksissa nämä ovat erityisen tärkeitä.

x∈A ja y∈B voivat kuvata **määriä** ja funktio f kuvaa niiden yhteyden.

Esim. kaukolämpölaskun määräytymistä kuvaava funktio edellä on reaalifunktio.

2.2 Polynomifunktio

- on yksinkertainen ja laskemisessa helppokäyttöinen **malli** muuttujien välisen yhteyden mallintamiseen ja toisaalta

- ”monimutkaisempien” funktioiden arvot saadaan sarjakehitelmien(?) avulla. Käytännössä likiarvot lasketaan polynomien avulla.

Välitettävän määrän ja tehtaalle maksettavan laskun suuruuden yhteyttä kuvaava funktio

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = 16.10x + 20.30$,
missä kulutus (MWh) $x \in A = \mathbf{R}^+$ ja lasku (€) $y = f(x) \in B = \mathbf{R}^+$,

on **1. asteen polynomifunktio** (muuttujan x:n eksponentti on 1).

n:nnen asteen polynomifunktion määrittelee

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \mathbf{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}$,

missä **polynomin kertoimet** $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ovat vakioita.

Tämän funktion arvojen laskemiseen riittävät **peruslaskutoimitukset!**

Erikoistapauksia

1. asteen polynomifunktio

Esim. (jatkoa) f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow [20.30, \infty)$, $f(x) = 16.10x + 20.30$

Kulutuksen x kertoimena oleva yksikköhinta 16.10 €/MWh kertoo,

kuinka, paljon lasku f(x) muuttuu, kun kulutus x kasvaa 1 MWh.

Sitä sanotaan funktion kuvaajana olevan suoran **kulmakertoimeksi**.

- Kulmakerroin mittaa funktion f **(absoluuttista) muutosnopeutta**.

- Perusmaksu (**vakio**) 20.30 € on laskun suuruus f(x), kun x=0 MWh,

ja se on kuvaajan leikkauskohta y-akselilla.

Tällaista funktiota sanotaan **lineaariseksi funktioksi**.

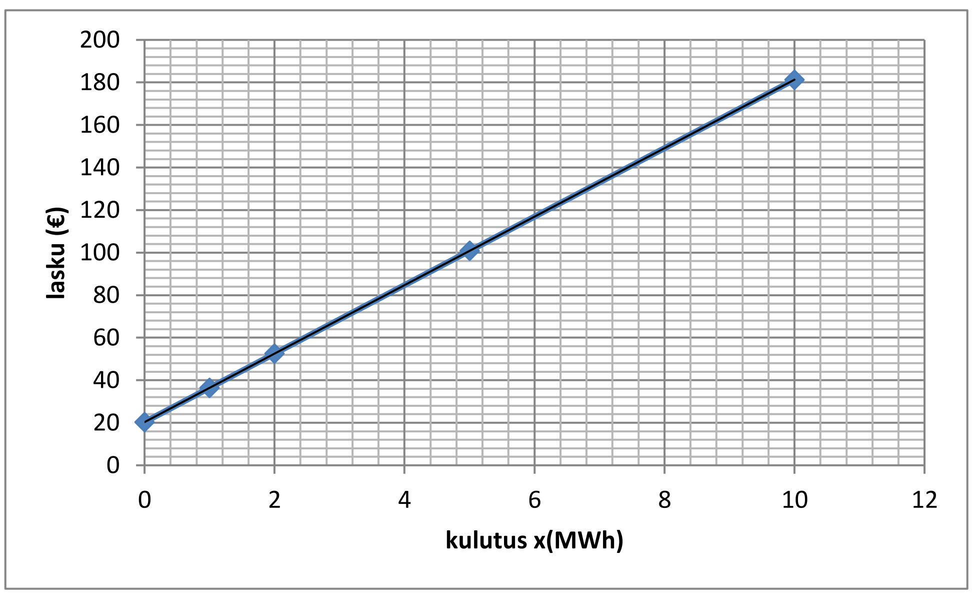
Vakioiden a ja b tulkinta on sama kaikilla 1. asteen polynomifunktiolla

f:**R**→**R**, f(x) = ax + b.

Arvopareja (x,f(x)) vastaavat pisteet koordinaatistossa asettuvat suoralle:

Kulutetun kaukolämmön määrän ja laskun suuruuden välinen yhteys

kulutus MWh x	lasku € y=f(x)
0	20,3
1	36,4
2	52,5
5	100,8
10	181,3



Tässä funktio f perustuu tehtyyn sopimukseen ja malli on **deterministinen**.

<u>Esim.</u> Ekonomisti E tutki teollisuuskiinteistön energiakustannusten ja ulkoilman lämpötilan välistä yhteyttä ja sai tuloksena (**tilastollisen**) mallin

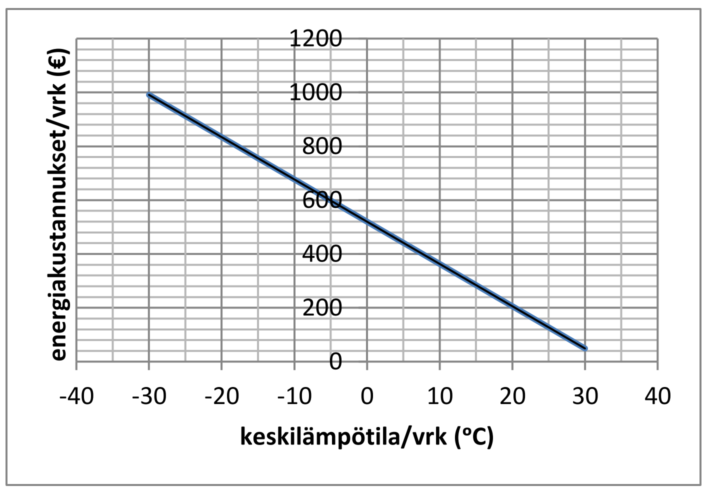
f:**R**→**R⁺**, f(x) = -15.7x + 520, missä

ulkoilman keskilämpötila (°C) x∈**R** ja kustannus (€/vrk) y=f(x)∈**R⁺**.

Kuvaajan piirtämiseen tarvitaan kaksi (mitä tahansa suoran) pistettä:

Esim. kun lämpötila x=0 °C, niin kustannus y= 520 €/vrk ja kun

x= -30 °C, niin y= 991 €/vrk.



- Kulmakerroin a = -15.7 (€/°C) kertoo, että kustannus pienenee 15.7 €, jos lämpötila nousee 1 °C.

- Vakio b = 520 (€/vrk) kertoo kustannuksen lämpötilassa 0 °C.

Tällainen funktio (malli) pystyy kuvaamaan vain likimain muuttujien välisen yhteyden.

- Malli perustuu **tilastolliseen analyysiin** ja sen tehdään (**estimoidaan**) mittausten avulla saadun **havaintoaineiston** avulla.

- Mallin lineaarisuus on (yleensä) **yksinkertaistava** approksimaatio ”todellisesta tilanteesta”.

- Sen **soveltuvuus** on yleensä varsin rajoitettu.

Kun tässä ratkaistaan **1. asteen yhtälö**

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -15.7x + 520 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -520/(-15.7) \sim 33.1\ ^{\circ}C$

nähdään, että **mallin ennustama** kustannus y = f(x) ei ole järkevä tätä korkeammissa lämpötiloissa.

Kaksi pistettä määrää **geometrisesti** (siis viivottimella piirrettäessä) suoran.

Samoin (**analyyttisesti**) kaksi koordinaatiston pistettä määrää **suoran yhtälön** eli lineaarisen funktion f, jonka kuvaaja kulkee näiden pisteiden kautta:

Esim. Lämpötilan mittaamien perustuu nesteen lämpölaajenemiseen ja

yhteys ”lämpötilan” ja nestepatsaan korkeuden välillä on **määritelty lineaariseksi** (empiirisesti järkevin perustein?) jakamalla korkeus **tasavälisesti** asteisiin. Jako tehdään Celsius- ja Fahrenheit-asteikolla eri tavalla ja niiden välillä ovat

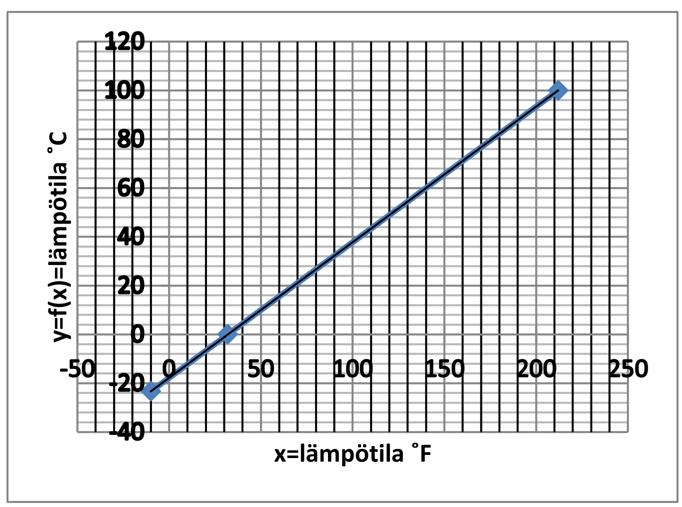
kiintopisteinä (esim.) 0 ˚C = 32 ˚F ja 100 ˚C = 212 F˚.

Ekonomisti E on Yhdysvalloissa, ja siellä lämpötila Fahrenheit-asteina on 70 F˚ (x). Hän ihmettelee, kuinka suuri se on Celsius-asteina (y)?

Koska yhteys on lineaarinen, on asteikkojen yhteyden kuvaava funktio

f:A→B, f(x) = ax + b, missä lämpötila (F˚) x∈A ⊂ **R** ja lämpötila (˚C) y=f(x)∈B ⊂ **R.**

Kiintopisteiden avulla tiedetään, että f(32) = 0 ja f(212) =100, minkä avulla voidaan piirtää f:n kuvaaja:



Kun lämpötila x kasvaa 212-32 = 180 °F arvosta 32 °F arvoon 212 °F,

lämpötila y kasvaa 100-0 = 100 °C.

Kulmakerroin a mittaa lineaarisen funktion muutosnopeutta, jolloin

$a = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{5}{9} \sim 0.556.$

Vakio b saadaan (esim.) sijoittamalla kuvaajalla olevan pisteen
(x,y) =(212,100) koordinaatit suoran yhtälöön y = ax + b, jolloin saadaan

$100 = \frac{5}{9} \cdot 212 + b \quad \Leftrightarrow \quad b \sim -17.778.$

Muunnosfunktio on siis

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = 0.556x - 17.778$,

missä lämpötila (°F) $x \in A \subset \mathbf{R}$ ja lämpötila (°C) $y = f(x) \in B \subset \mathbf{R}$,

ja esimerkiksi $f(70) = 0.556 \cdot 70 - 17.778 \sim 21$ °C.

Esim. Ekonomisti E tutki luomuturnipsin kysyntää ja tarjontaa. Tuloksina saatiin mallit:

Kysyntä: $f:A \rightarrow B$, $f(x) = -15.9x + 819.2$,

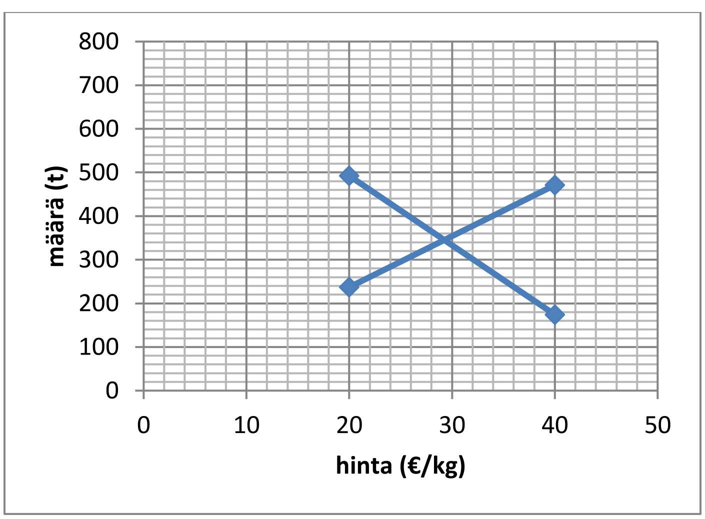
missä yksikköhinta (€/kg) $x \in A \subset \mathbf{R}^+$ ja kysyntä (t) $y=f(x) \in B \subset \mathbf{R}^+$.

Tarjonta: $g:A \rightarrow B$, $g(x) = 11.7x + 3.3$,

missä yksikköhinta (€/kg) $x \in A \subset \mathbf{R}^+$ ja tarjonta (t) $y=g(x) \in B \subset \mathbf{R}^+$.

$f(20)= 501.2$ ja $f(40)=183.2$ sekä $g(20)=237.3$ ja $g(40)= 471.3$, mistä saadaan kuvaajat:

Luomuturnipsin kysyntä ja tarjonta



- Kulmakertoimien mukaan:

kun hinta x → x + 1, niin kysyntä vähenee 15.9 t ja

kun hinta x → x + 1, niin tarjonta kasvaa 11.7 t

(kaikilla hintatasoilla x!)

Kuvaajien leikkauspisteen kohdalla **markkinat ovat tasapainossa**.

Leikkauspiste saadaan selville ratkaisemalla **yhtälöpari**

$y = -15.9x + 819.2$

$y = 11.7x + 3.3$, josta saadaan (tässä) suoraan **1. asteen yhtälö**

$-15.9x + 819.2 = 11.7x + 3.3$

Ratkaisuksi saadaan

$x \sim 29.6$ €/kg

ja sitä vastaava määrä on $y \sim 348.5$ t.

Paloittain lineaarinen funktio

<u>Esim.</u> (jatkoa) Kiinteistöhuoltoyhtiön välittämissä kaukolämpösopimuksissa on ehto, jonka mukaan

- perusmaksu toimituksesta on 20.30 €/kk

- ja kulutuksesta maksetaan tehtaalle 16.10 €/MWh 50 MWh:n määrään asti ja

- 50 MWh:n ylittävältä määrältä 10.50 €/MWh.

Aikaisemmin käsitelty funktio kuvaa ostettavan määrän x (MWh) ja laskun suuruuden y (€) välisen yhteyden, kun x $\leq$50 MWh.

f(50) = 16.10·50 +20.30 = 825.30 €.

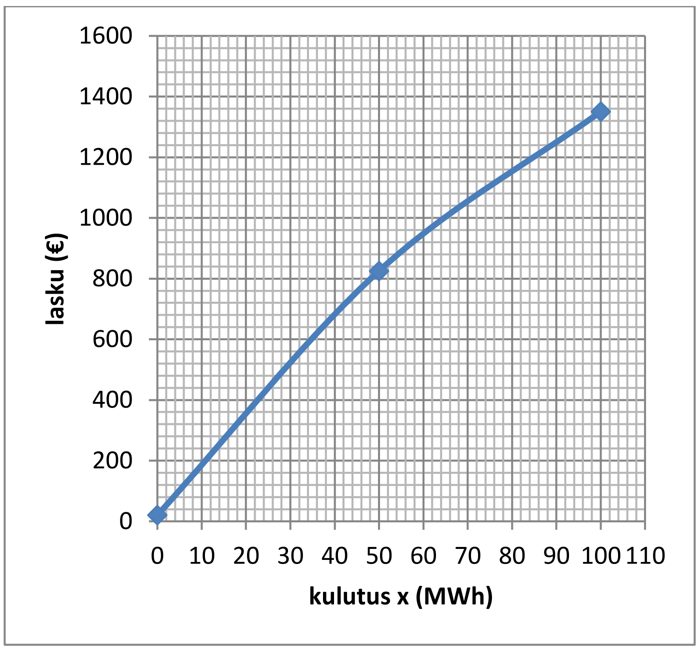
Kun x $>$50, lasku on

f(x) = 825.30   +   10.50(x – 50) = … = 10.50x + 300.30

$\uparrow$ $maksu\ 50\ MWh{:}lta + perusmaksu$	$\uparrow$ $maksu\ 50\ MWh{:}n\ yli\ menevältä\ osalta$

Sopimuksen perusteella saadaan kulutuksen $x \in \mathbf{R}^+$ ja laskun $f(x) \in \mathbf{R}^+$ välille malli $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$,

$$f(x) = \begin{cases} 16.10x + 20.30, \text{ kun } x \leq 50 \text{ ja} \\ 10.50x + 300.30, \text{ kun } x > 50 \end{cases}$$



Tällaista funktiota sanotaan **paloittain lineaariseksi**.

Lineaarinen interpolointi

Aikaisemmassa esimerkissä fysikaalisen todellisuuden järkevästi huomioon ottavasta lämpömittareiden **konstruointitavasta seurasi** lämpötilojen x ja y välisen yhteyden **lineaarisuus**.

Empiiristä ilmiötä kuvaavista muuttujista x ja y tunnetaan useimmiten vain joitain erillisiä arvoja (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Niiden välisen yhteyden lineaarisuus (tai jokin muunlainen) yhteys on yleensä **arvio**:

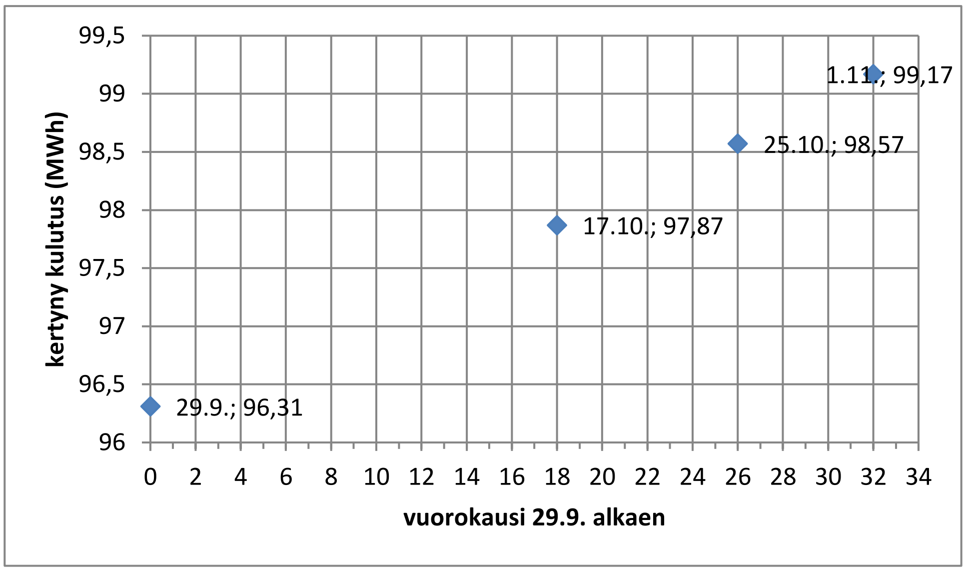
Esim. Kiinteistö on sitoutunut ilmoittamaan käytetyn kaukolämmön määrän noin viikon välein Energialaitokselle. Lämmittimen hoitaja on kuitenkin ollut huolimaton ja välistä on jäänyt pois yksi viikko. Viereisten viikkojen arvot ovat:

29.9. 96.31 (MWh)

Kuinka suuri on lukema ollut 7.10. ? →

17.10. 97.87

Tässä tapauksessa apuna on myös myöhempiä lukemia, joista saadaan tukea kulutuksen likimääräiselle lineaarisuudelle ajan suhteen:



Tässä voidaan (poikkeuksellisen hyvin perustein) olettaa kulutuksen muutos likimain lineaariseksi.

Silloin

- 29.9. – 17.10. aikavälillä on 18 vrk, jonka aikana

kulutuksen muutos on 97.87 - 96.31 = 1.56 MWh

- 29.9. – 7.10. aikavälillä on 8 vrk , jonka aikana

kulutuksen muutos on x MWh.

- Jos kulutus kasvaa lineaarisesti, on kulutuksen muutos suoraan verrannollinen kuluneen ajan pituuteen, joten

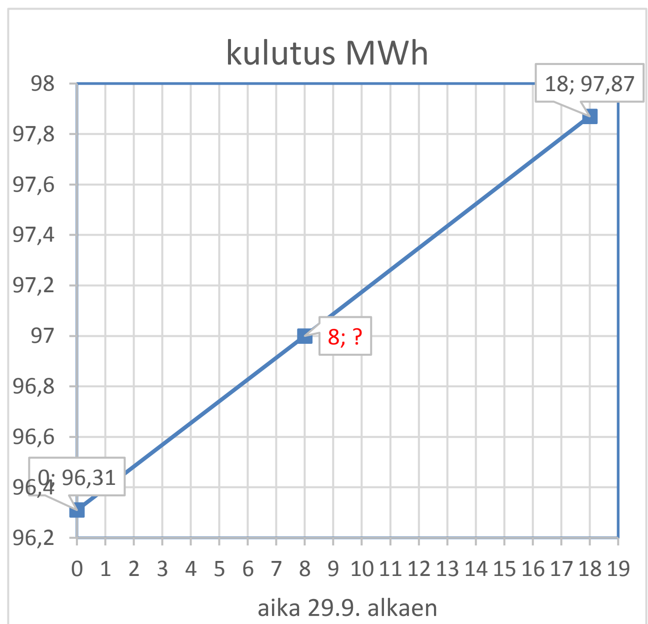
x = $\frac{8}{18} \cdot 1.56$ MWh ~ 0.69 MWh

ja 7.10. lukema on likimain 96.31 + 0.69 = 97.00 MWh.

Lukema voidaan myös interpoloida toisella tavalla:

Tilanne **siirretään koordinaatistoon** niin, että

- päivämäärää 29.9. asetetaan vastaamaan ajankohta x = 0 ja
- päivämäärää 17.10. asetetaan vastaamaan ajankohta x = 18.



Pisteiden (0, 96.31) ja (18, 97.81) kautta asetetaan kulkemaan

suora y = ax +b

ja sen yhtälöä vastaavan lineaarisen funktion f(x) = ax +b avulla

lasketaan päivämäärää 7.10. vastaava arvo f(8):

a = $\frac{97.81\ \mathrm{MWh} - 96.31\ \mathrm{MWh}}{(18-0)\ \mathrm{vrk}} = \frac{1.56\ \mathrm{MWh}}{18\ \mathrm{vrk}} \sim$ 0.0867 MWh/vrk

Kun sijoitetaan x = 0 ja y = 96.31 suoran yhtälöön y = 0.0867x + b, saadaan b= 96.31.

f(8) = 0.0867·8 + 96.31 ~ 97.00.

Suora avulla voidaan arvioida kulutettu määrä myös välin [0,18] ulkopuolelle, jos ajankohta ei ole ”kovin kaukana” arvion pohjana olevasta välistä.

Tätä sanotaan **ekstrapoloinniksi**.

Esim. arvio kulutetusta määrästä 27.9., jolloin x = -2, on

f(-2) = 0.0867·(-2) + 96.31 ~ 96.14.

Interpolointi tehdään vastaavalla tavalla myös yleisesti:

- Tunnetaan (muuttujan x) arvoja x_1 ja x_2 vastaavat (muuttujan y) arvot $y_1=f(x_1)$ ja $y_2=f(x_2)$.

- Tehtävänä on arvioida eli **interpoloida** $y_0= f(x_0)$, kun $x_1 < x_0 < x_2$.

- Jos voidaan järkevästi olettaa, että f on edes likimain kasvava tai vähenevä (eli **aidosti monotoninen**) välillä $[x_1,x_2]$ ja x_1 ja x_2 eivät ole ”kaukana” toisistaan, saadaan yleensä järkevä arvio y_0:lle esimerkissä kuvatulla tavalla.

Voi olla (kuten edellisessä esimerkissä), että muuttujien x ja y välillä ei todellisuudessa ole mitään lineaarisen (tai muun) funktion kuvaamaa yhteyttä.

Tällaisella mallinnuksella vain pyritään saamaan järkeviä arvioita joitain x:n arvoja vastaavista y:n arvoista.

Lineaarisesta optimoinnista

Esim. Velhoveljeskunta tekee ja myy päävelhon johdolla hyvinvointia edistäviä loitsuja uuden velholinnan rahoittamiseksi. Tuotannossa on Perusloitsu (PL) ja Erityisloitsu (EL), jonka voima on hieman väkevämpi.

Loitsut tuotetaan kahdessa työvaiheessa 8 tunnin työvuoroissa, joissa

1. vaiheessa 50 tavallista velhoa tekee loitsujen perusrakenteen ja

2. vaiheessa 10 ylivelhoa asentaa siihen vaikutuksen.

Loitsujen tuotto, käsittelyajat ja tuotantokapasiteetti eri vaiheissa ovat:

	EL	PL	
Loitsujen määrä	x	y	max-kapasiteetti (min)
Tuotto €/kpl	150	100	
1. käsittelyaika min/kpl	30	60	24000
2. käsittelyaika min/kpl	10	5	4800

Miten tuotanto on suunniteltava, jotta työvuoron aikana saadaan paras mahdollinen tuotto?

Tuotettavat määrät x ja y on valittava niin, että tuotto (**kohdefunktio**)

$z = 150x + 100y$ saa maksimiarvon, kun **rajoitteina** ovat **reunaehdot**

(1. vaiheessa käytetty aika) $30x + 60y \leq 24000$,

(2. vaiheessa käytetty aika) $10x + 5y \leq 4800$ ja

ja (tietenkin) $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

Rajoitteita 1. ja 2. ylärajojen kohdalla vastaavat lineaariset funktiot ja niitä vastaavien suorien yhtälöt ovat:

1. $30x + 60y = 24000$

$$60y = -30x + 24000$$

$$y = -\frac{30}{60}x + \frac{24000}{60}$$

$$y = -0.5x + 400$$

2. Vastaavalla tavalla saadaan 2. reunaehdosta ylärajalla

$$y = -2x + 960$$

Suorien leikkauspisteet x ja y akselilla ovat

1. $x = 0 \Leftrightarrow y = 400$

   $y = 0 \Leftrightarrow y = -0.5x + 400 \Leftrightarrow x = -\frac{-400}{-0.5} = 800$

2. $x = 0 \Leftrightarrow y = 960$

   $y = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 960 \Leftrightarrow x = -\frac{-960}{-2} = 480$

Nämä ovat rajoitteita 1. ja 2. vastaavat **tasa-arvosuorat**, joissa tuotantokapasiteetit (24 000 min ja 4800 min) olisivat kokonaan käytössä.

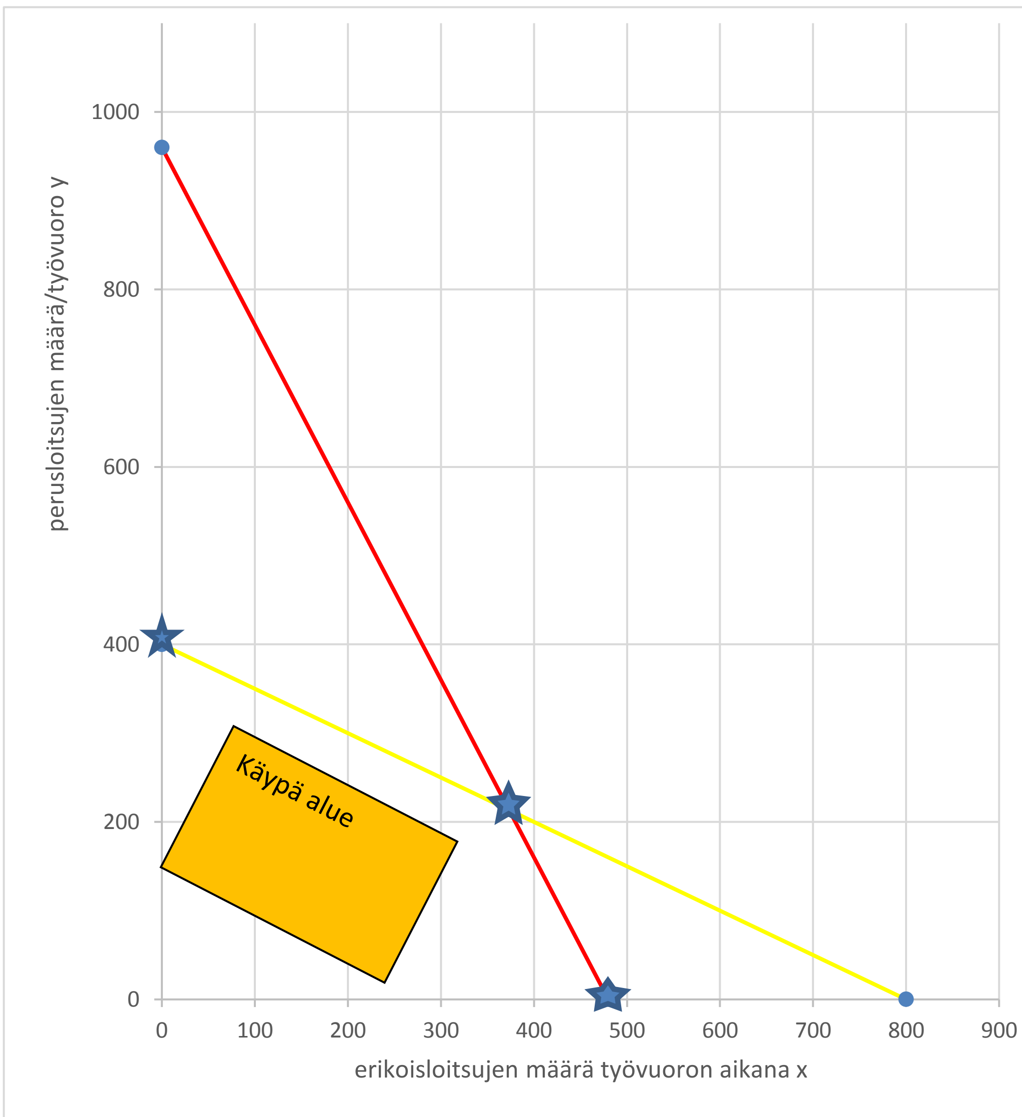
Suorien ”alapuolella” on käytetty aika

1. vaiheessa $\leq$ 24000 min ja

2. vaiheessa $\leq$ 4800 min

Silloin kuvion vasemmassa alakulmassa kummankin suoran ”alapuolella” olevat tuotettavia EL–PL – määriä kuvaavat (x,y)-arvoparit toteuttavat molemmat reunaehdot.

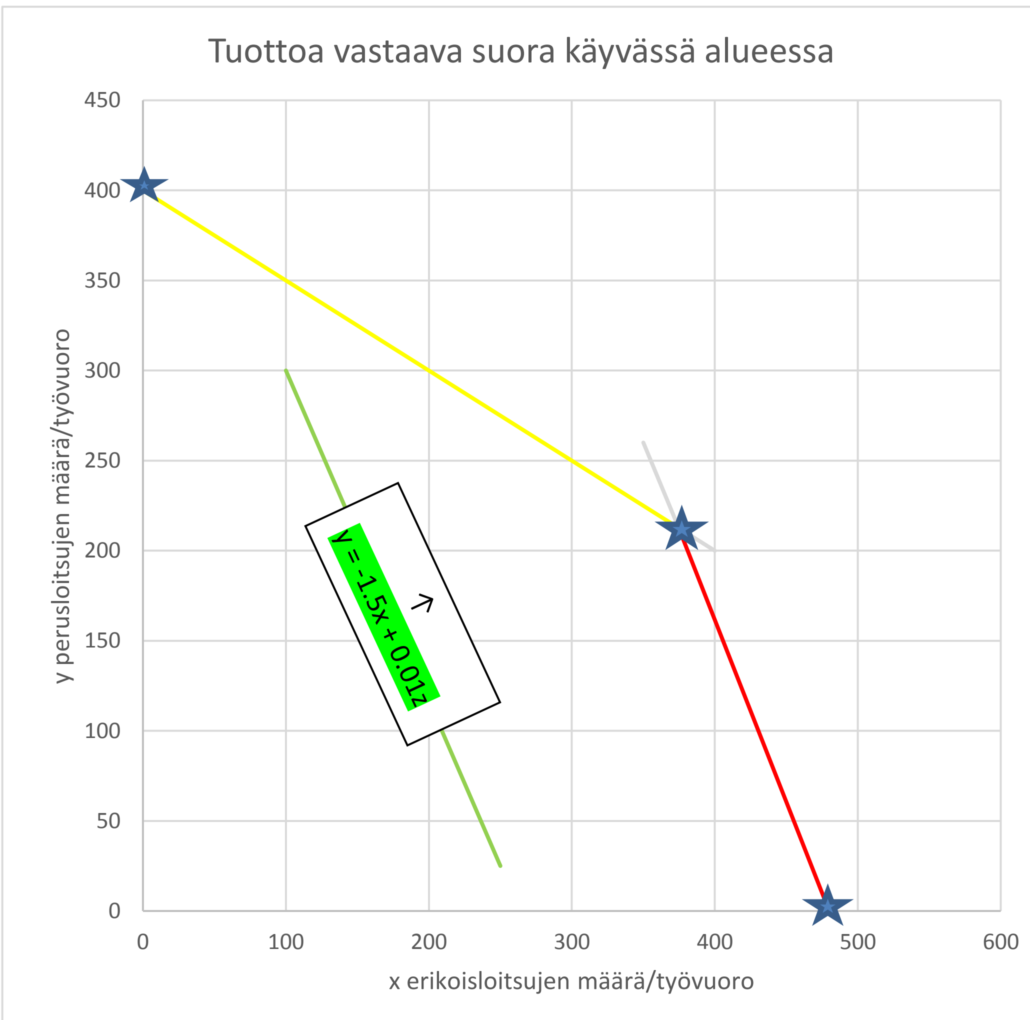
Tämä alue on ratkaisun **käypä** (luvallinen) **alue**.



Kohdefunktiona maksimoitavaa $z = 150x + 100y$ vastaa kuviossa suora

$$y = -1.5x + 0.01z,$$

joka siirtyy saman suuntaisena kohti käyvän alueen reunaa, kun tuottoa kuvaavaa arvoa z ”suurennetaan:



Ratkaisun on oltava käyvässä alueessa, joten siirtyminen on lopetettava rajoitteita kuvaavien suorien leikkauspisteeseen, jossa tuotto z saa maksimiarvonsa.

Rajoitteita

1. $y = -0.5x + 400$ ja 2. $y = -2x + 960$

vastaavien suorien yhtälöistä ratkeaa niiden leikkauspiste:

$$-0.5x + 400 = -2x + 960,$$

josta saadaan x = 373.3, ja vastaava y = 213.3.

Kun erikoisloitsuja tuotetaan noin 373 kpl ja perusloitsuja 213 kpl työvuoron tuotto on

$z = 150 \cdot 373 + 100 \cdot 213 = 77\ 250$ €.

Kaikki rajoitteita (myös suorat x = 0 ja y = 0) vastaavien suorien käyvässä alueessa olevat leikkauspisteet ovat mahdollisia maksimipisteitä.

Tässä tuotto z on

pisteessä (0,400) $150 \cdot 0 + 100 \cdot 400 = 40\ 000$ € ja

pisteessä (480,0) 62 000 €.

Silloin $z_{max} = 77\ 250$ € saavutetaan, kun erikoisloitsuja tuotetaan noin 373 kpl ja perusloitsuja 213 kpl

Edellä ratkaistiin **lineaarinen optimointitehtävä**, joka yleisessä muodossaan on vastaavanlainen:

On maksimoitava (tai minimoitava) lineaarinen **kohdefunktio**

$\mathbf{z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n}$

lineaarisilla **rajoitteilla (reunaehdoilla)**

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

…

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$

missä $c_1, \ldots, c_n$ ja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ ja $b_1, \ldots, b_m$ ovat vakioita.

Muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arvot ovat **käypä (luvallinen) ratkaisu**, jos ne toteuttavat rajoitteet.

Optimaalinen ratkaisu maksimoi (minimoi) kohdefunktion arvon.

Jos muuttujia on vain kaksi, tehtävä voidaan ratkaista vastaavalla tavalla kuin esimerkissä:

- Rajoitteita vastaavat suorat piirretään koordinaatistoon,

- jossa ne rajaavat ”toiselle puolelleen” käyvän alueen

(”alapuolelle”, jos etsitään maksimia; ks. edellinen esim.

ja ”yläpuolelle”, jos etsitään minimiä; ks. seuraava esim.)

- Kohdefunktion maksimi (minimi) on rajoitteita vastaavien suorien leikkauspisteessä.

Ratkaisuja voi olla yksi tai ääretön määrä tai ratkaisua ei ole ollenkaan.

<u>Esim.</u> Ekonomisti E lähtee retkelle. Eväänä on Voimamuonaa (VM) ja Kevytevästä (KE), joilla ovat ominaisuudet:

	VM	KE	E:n minimitarve
Määrä (kg)	x	y	
Hinta (€/kg)	15	10	
C-vitamiini (mg/kg)	80	100	150
Proteiini (g/kg)	300	150	300
Energiaa (kj/kg)	20000	10000	12000

Kuinka paljon Voimamuonaa ja Kevytevästä on varattava mukaan, jotta minimivaatimukset täyttyvät ja eväskori on **mahdollisimman halpa**?

Eväskorin hinta on $z = 15x + 10y$

ja ratkaistavana on lineaarinen optimointi- (tässä minimointi-) tehtävä

$$\min z = 15x + 10y,$$

kun rajoitteina ovat

(1) c-vitamiini $80x + 100y \geq 150$

(2) proteiini $300x + 150y \geq 300$

(3) energia $20000x + 10000y \geq 12000$

ja $x, y \geq 0$.

Rajoitteita vastaavat suorat ovat:

(1) $80x + 100\,y = 150 \Leftrightarrow 100y = -80x + 150 \Leftrightarrow y = -\,0.8x + 1.5$

(2) $300x + 150y = 300 \Leftrightarrow \qquad y = -2x + 2$

(3) $20000x + 10000y = 12000 \Leftrightarrow \qquad y = -2x\ \ 1.2$

Suorien leikkauspisteet koordinaattiakselien kanssa:

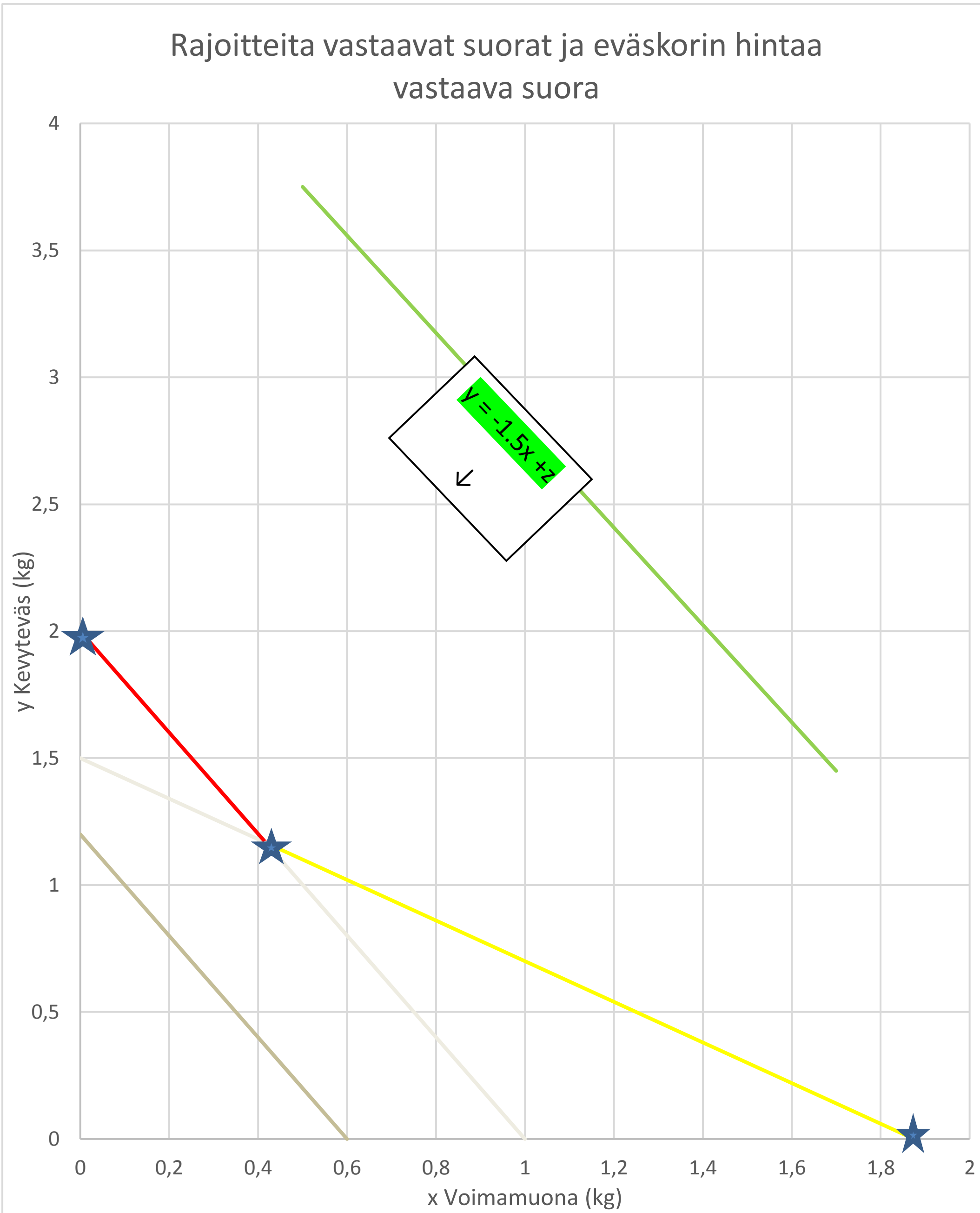
(1) $x = \mathbf{0}$, $y = -\,0.8 \cdot 0 + 1.5 = \mathbf{1.5}$ ja

$y = -\,0.8x + 1.5 = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = -1.5/(-0.8) = \mathbf{1.875}$

(2) $x = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{2}$ ja $y = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{1}$

(3) $x = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{1.2}$ ja $y = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0.6}$

Nyt käypä alue on rajoitteita vastaavien suorien ”yläpuolella”:



Eväskorin hintaa z = 15x + 10 y vastaava suora koordinaatistossa on

$y = -1.5x + 0.1z$, joka ”liikkuu” suuntansa säilyttäen kohti käyvän alueen rajaa, kun arvoa z pienennetään.

Optimaalinen ratkaisu (tässä minimi) on taas käyvän alueen äärirajalla rajoitteita vastaavien suorien jossain leikkauspisteessä.

Tässä energian tarve (3) täyttyy aina, kun (x,y) on käyvässä alueessa.

Reunaehtoja (1) ja (2) vastaavien rajasuorien leikkauspiste on:

$-0.8x + 1.5 = -2x + 2$, josta saadaan $x \sim 0.417$ ja

(sijoittamalla ehtoon (1) tai (2) $y \sim 1.167$

Eväskori, jossa on x=**0.417** kg Voimamuonaa ja y=**1.167** kg Kevytevästä

maksaa $z = 15 \cdot 0.417 + 10 \cdot 1.17 \approx$ **17.93** €.

Tämä on reunaehdot toteuttava minimikustannus, kun muissa

leikkauspisteessä (koordinaattiakseleilla) pisteessä (0,2) on z = 15·0+10·2 = 20 € ja

pisteessä (1.875,0) on z = 28.125 €.

Lineaarisen optimointitehtävän ratkaisemiseen on kehitetty useita algoritmeja, joiden avulla tehtävä voidaan ratkaista myös silloin, kun muuttujia on enemmän kuin kaksi, jolloin ratkaiseminen ei onnistu tasossa piirtämällä.

Eräs sellainen on Simplex-menetelmä, jonka avulla tehtävä ratkeaa myös Excelin avulla.

Seuraavassa ovat suuntaviivat edellisten esimerkkien tehtävien ratkaisemisesta Excelin avulla:

Esim. (jatkoa)

	EL	PL	
Loitsujen määrä	x	y	max-kapasiteetti (min)
Tuotto €/kpl	150	100	
1. käsittelyaika min/kpl	30	60	24000
2. käsittelyaika min/kpl	10	5	4800

Tehtävä kirjoitetaan Exceliin seuraavaan tapaan:

Tekstit ovat pelkästään muistilista ja taulukon voi sijoittaa minne vain.

	A	B	C	D	E	F
1	Muuttujat		Alaraja	Valmistamisajat		Tuotto
2	Loitsuja	Optimimäärä		Vaihe1	Vaihe2	
3	x	------------------	0	30	10	150
4	y	------------------	0	60	5	100
5			Rajoitefunktio	1.rajoite	2.rajoite	Kohdefunktio
6			Max-kapasiteetti	24000	4800	

- Soluun D5 kirjoitetaan 1. rajoitefunktio (30x + 60y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;D3:D4)

- Soluun E5 kirjoitetaan 2. rajoitefunktio (10x + 5y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;E3:E4)

- Soluun F5 kirjoitetaan kohdefunktio (150x + 100y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;F3:F4)

- Excelistä otetaan käyttöön Data → Solver (?→ oikeassa laidassa)

- Kohdefunktioksi tulee solun F5 funktio.

- Tässä tehtävässä valitaan maksimointi.

- Koskettamalla hiirellä taulukon soluja tehtävä voidaan siirtää Solver-taulukkoon:

- Muuttujat, joiden suhteen maksimoidaan, ovat soluissa B3 ja B4. Solver-taulukkoon tulee $B$3:$B$4

- Lisätään yksi kerrallaan rajoitteet:

$B$3:$B$4 >= $C$3:$C$4 ($x \geq 0$ ja $y \geq 0$)

$D$5:$E$5 ≤ $D$6:$E$6 ($30x + 60y \leq 24000$ ja $10x + 5y \leq 4800$)

- Menetelmäksi valitaan Simplex LP ja ja ratkaistaan tehtävä.

- Tulos (optimaaliset x:n ja y:n arvot ja maksimiarvo) saadaan soluihin B3, B4 ja F5:

	A	B	C	D	E	F
1	Muuttujat		Alaraja	Valmistamisajat		Tuotto
2	Loitsuja	Optimimäärä		Vaihe1	Vaihe2	
3	x	373,3333333	0	30	10	150
4	y	213,3333333	0	60	5	100
5			Rajoitefunktio	24000	4800	77333,33
6			Max-kapasiteetti	24000	4800	

Excel ei tunnista, että loitsujen määrät ovat kokonaislukuja, ja laskee maksimin B3:n ja B4:n arvoista.

Esim. Ekonomisti E:n eväskorin sisällön optimointi.

Exceliin tehdään taulukko:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Muuttujat		Alaraja	VM:n ja KE:n ominaisuudet			**Hinta**
2	Määrät	Optimimäärä		C-vitamiini	Proteiini	Energia	
3	VM x		0	80	300	20000	15
4	KE y		0	100	150	10000	10
5			Rajoitefunktio	0	0	0	0
6			Minimimäärä	150	300	12000	

- Soluun D5 kirjoitetaan 1. rajoitefunktio (80x + 100y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;D3:D4)

- Soluun E5 kirjoitetaan 2. rajoitefunktio (300x + 150y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;E3:E4)

- Soluun F5 kirjoitetaan 3. rajoitefunktio (2000x + 10000y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;F3:F4)

- Soluun G5 kirjoitetaan kohdefunktio (15x + 10y)
=SUMPRODUCT($B3:$B4;G3:G4)

- Excelistä otetaan käyttöön Data → Solver

- Kohdefunktioksi tulee solun G5 funktio.

- Nyt valitaan minimointi.

- Muuttujat, joiden suhteen minimoidaan, ovat soluissa B3 ja B4. Solver-taulukkoon tulee $B$3:$B$4

- Lisätään rajoitteet:

$B$3:$B$4 >= $C$3:$C$4 ($x \geq 0$ ja $y \geq 0$)

$D$5:$E$5 ≥ $D$6:$E$6
($30x + 60y \geq 150$, $300x + 150y \geq 300$ ja $20000x + 10000y \geq 12000$)

- Menetelmäksi valitaan Simplex LP ja ratkaistaan tehtävä.

- Tulos (optimaaliset x:n ja y:n arvot ja minimiarvo) saadaan soluihin B3, B4 ja G5:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Muuttujat		Alaraja	VM:N ja KE:n ominaisuudet			Yksikköhinta
2	Määrät	Optimimäärä		C-vitamiini	Proteiini	Energia	
3	VM x	0,416666667	0	80	300	20000	15
4	KE y	1,166666667	0	100	150	10000	10
5			Rajoitefunktio	150	300	20000	17,91666667
6			Minimitarve	150	300	12000	

2. asteen polynomifunktio

Esim. (jatkoa) Luomuturnipsin tuottajat aikovat tehdä kartellin ja heidän käytössään on kysyntäfunktio, (jossa on mallinnettuna kuluttajien joukkokäyttäytyminen!)

$f: A \to B$, $f(x) = -15.9x + 810.2$,

missä yksikköhinta (€/kg) $x \in A \subset \mathbf{R}^+$ ja kysyntä (t) $y = f(x) \in B \subset \mathbf{R}^+$.

Kuinka suureksi turnipsin kilohinta on asetettava, jotta markkinoilta saadaan **suurin mahdollinen voitto**, kun kustannukset ovat 5 €/kg?

Kun myyntihinta on x €/kg,

- kysyntäfunktio f **ennustaa** keskimäärin myytävän määrän f(x)

- ja voitto/tappio myytyä kiloa kohti on x-5 €/kg

Silloin voittoa/tappiota kuvaa funktio

v:**R⁺**→**R⁺**, v(x) = f(x)(x-5)

= (-15.9x + 810.2) (x-5)

…

= $-15.9x^2 + 889.7x – 4051.0$,

joka on **2. asteen polynomifunktio**.

Voittofunktiolla on kaksi **nollakohtaa**:

$$v(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = -15.9x + 810.2 = 0 \quad (\text{siis?}) \\ \text{tai} \\ x - 5 = 0 \quad (\text{siis?}) \end{cases}$$

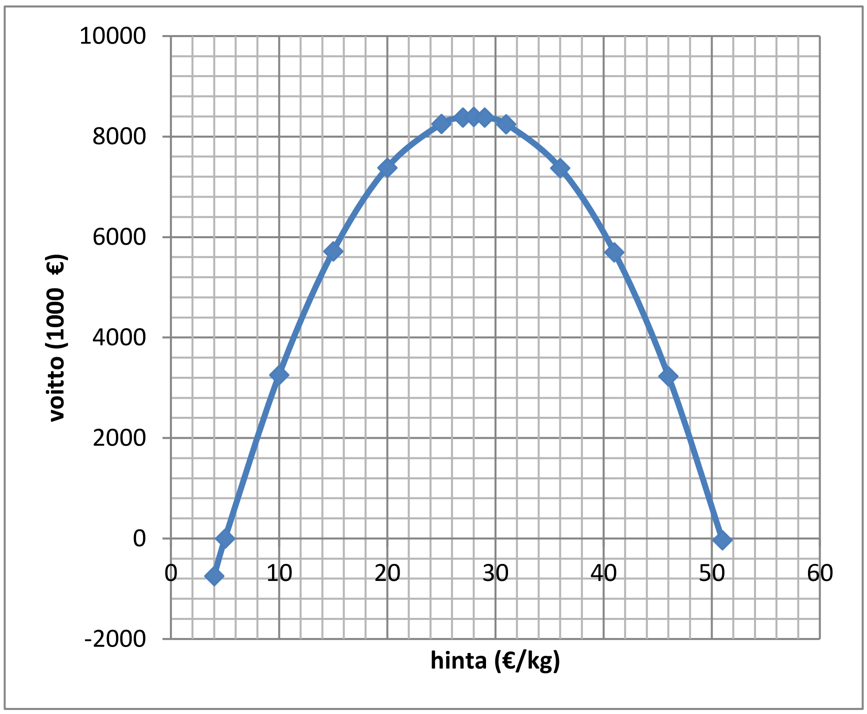
$\Leftrightarrow$ x ≈51 tai x = 5 €/kg.

Näiden välillä voitto on positiivinen.

Kun hinnalle x annetaan nollakohdista ”sisäänpäin aina saman verran edeten” arvoja, saadaan

Luomuturnipsin markkinoilta saatava voitto kartellitilanteessa

hinta x (€/kg)	voitto v(x) 1 000 €
4	-746,6
5	0
10	3256
15	5717
20	7383
25	8254
27	8379,8
28	8395
29	8378,4
31	8249,8
36	7371,8
41	5698,8
46	3230,8
51	-32,2~0



”Näyttää siltä”, että kuvaaja on symmetrinen ja funktiolla on maksimikohta nollakohtien puolivälissä (, mikä voidaan varsin helposti myös yleisesti todistaa).

2. asteen polynomifunktion f:**R**→**R**, $f(x) = ax^2 + bx + c$

kuvaaja on aina vastaavanmuotoinen symmetrinen käyrä, jota sanotaan **paraabeliksi**.

Jos 2. asteen termin kerroin $a < 0$ (kuten esimerkissä),

niin kuvaajaa sanotaan **alaspäin aukeavaksi** ja funktiolla f on **maksimiarvo**,

ja jos $a > 0$, niin paraabeli on **ylöspäin aukeava** ja funktiolla f on **minimiarvo**

nollakohtien (, jos niitä on,) **puolivälissä**.

Voittoa kuvaava 2. asteen polynomifunktio saatiin kahden lineaarisen funktion tulona, jolloin nollakohdat ratkeavat helposti näistä kahdesta tekijästä. Toisin päin:

Nollakohdat voidaan aina ratkaista muokkaamalla tutkittavan funktion lauseketta ”sopivalla tavalla” (mm. neliöksi täydentäminen).

2. asteen polynomifunktion nollakohtien eli **2. asteen yhtälön** ratkaiseminen on melko usein osana matematiikan soveltamisessa, ja pitkähkö lasku kannattaa oikaista suoraan viimeiselle riville:

Melko helposti voidaan johtaa 2. asteen polynomifunktion

f:**R**→**R**, $f(x) = ax^2 + bx + c$ **nollakohtien** ratkaisemiseksi sääntö

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

<u>Esim.</u> (jatkoa)

$v(x) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051.0 = 0$

$$x = \frac{-889.7 \pm \sqrt{889.7^2 - 4 \cdot (-15.9) \cdot (-4051.0)}}{2 \cdot (-15.9)},$$

mistä saadaan samat nollakohdat kuin edellä $x_1 = 5.00$ ja $x_2 = 50.96$.

Funktion f:**R**→**R** nollakohtien ratkaisukaavasta

x = $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ näkyy, että funktiolla f on

- **kaksi** 0-kohtaa, jos (**diskriminantti**) $b^2 - 4ac > 0$

- **yksi** 0-kohta, jos $b^2 - 4ac = 0$

- **ei yhtään** (reaalista) 0-kohtaa, jos $b^2 - 4ac < 0$.

Nollakohtien ratkaisukaavasta

x = $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

näkyy myös, että ääriarvokohta (, joka voidaan helposti perustella derivaatan avulla) on

$$\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}$$

Esimerkissä maksimivoitto saadaan, kun hinta on

x = $\frac{-889.7}{2(-15.9)} \approx 27.98 \approx 28$ €/kg,

ja voitto on silloin v(27.98) = … $\approx 8395 \approx 8400$ (1000 €).

Mallina käytettävästä funktiosta tarvitaan useimmiten ”vain osa” empiiristä ilmiöitä tutkittaessa:

Esim. Ekonomisti E tutki kapakalan kysyntää ja tarjontaa markkinoilla.

Malleiksi saatiin:

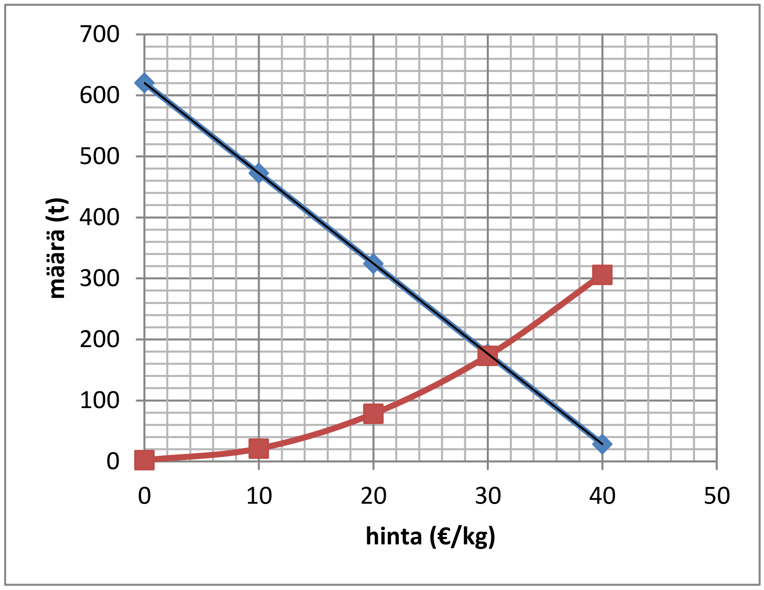
Kysyntä: $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = -14.8x + 620.5$,

missä x = hinta (€/kg) ja f(x) = kysyntä (t)

Tarjonta: $g:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $g(x) = 0.19x^2 + 2.1$,

missä x = hinta (€/kg) ja g(x) = tarjonta (t)

hinta	kysyntä	tarjonta
x (€/kg)	f(x) (t)	g(x) (t)
0	620,5	2,1
10	472,5	21,1
20	324,5	78,1
30	176,5	173,1
40	28,5	306,1



Tässä markkinat ovat tasapainossa, kun

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -14.8x + 620.5 = 0.19x^2 + 2.1$

$\Leftrightarrow 0.19x^2 + 14.8x - 618.4 = 0$ …

$x \approx 30.1$ €/kg (tai $x \approx -108.8$ €/kg, mikä on mahdoton ratkaisu)

Sekä kysyntä- että tarjontafunktion järkevä sovellusalue on varsin rajallinen.

3 Korkeamman asteen polynomifunktioita

tarvitaan

- malleina empiiristen ilmiöiden kuvaamiseen

- apuvälineinä (sarjakehitelmät) muiden funktioiden arvojen laskemisessa.

Esim. Kun mallinnetaan Suomen bkt:n pitkän ajan kehittymistä

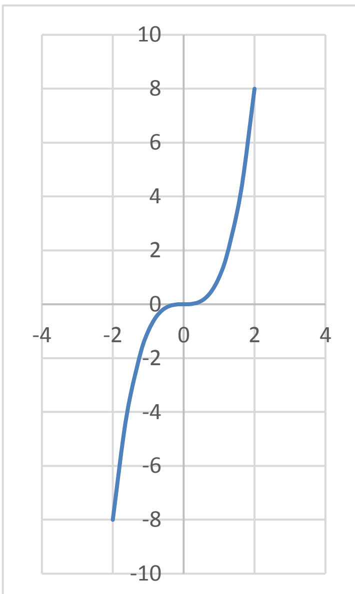
ja "selittävänä" muuttujana on aika, mallina käy jokseenkin yhtä hyvin 1. tai 2. tai 3. asteen polynomifunktio.

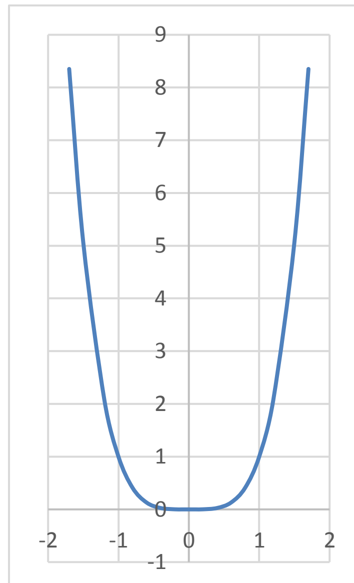
Erikoistapauksissa funktion

$f:\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

kulku voidaan helposti hahmottaa:

Esim. f:**R**→**R**, $f(x) = x^3$ (n on pariton) f:**R**→**R**, $f(x) = x^4$ (n on parillinen)





Kun funktion lausekkeessa on mukana myös alemman asteisia termejä, sen kuvaajassa on (voi olla) äärellisellä alueella ”mutkia” (paikallisia ääriarvoja).

Niiden määräämisessä tarvitaan apuna derivaattaa.

3. ja 4. asteen polynomifunktion nollakohtien määräämiseen on olemassa yleiset ratkaisukaavat, mutta ei tätä korkeamman asteen polynomifunktioille.

2.3 Käänteisfunktio ja yhdistetty funktio

<u>Esim.</u> (jatkoa) Kun kaukolämpösopimus kirjoitetaan funktiona

f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow [20.30,\infty)$, $\mathbf{f(x) = 16.10x + 20.30}$,

missä kulutus (MWh) $x \in \mathbf{R}^+$ ja lasku (€) $y = f(x) \in [20.30,\infty)$,

jokaista maalijoukon $B = [20.30,\infty)$ (= arvojoukko V_f) laskun suuruutta kuvaavaa arvoa y (€) vastaa **jokin lähtöjoukon** $A = \mathbf{R}^+$ kulutuksen määrää kuvaava arvo x (MWh).

Siis maalijoukossa ei ole ”turhia arvoja.”

Tällaista funktiota sanotaan **surjektioksi**.

Jos eri kertoina ostetut kaukolämpömäärät eivät ole samat, myös laskujen suuruudet ovat tietenkin erisuuruiset.

Jos funktio on tällainen eli $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow \mathbf{x_1 = x_2}$,

sitä sanotaan **injektioksi**.

Laskun suuruutta kuvaava funktio

f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow [20.30,\infty)$, $f(x) = 16.10x + 20.30$,

on sekä surjektio että injektio.

Nyt esimerkiksi, jos laskun suuruus $y = f(x) = 16.10x + 20.30 = 200$ €,

niin ….

$x \approx 11.16$ MWh

Siis

- **jokaista** maalijoukon alkiota $y \in B$ (mahdollista laskun suuruutta)

- vastaa (tietenkin) **täsmälleen yksi** lähtöjoukon alkio $x \in A$ (kulutuksen määrä),

- joka johtaa (sopimuksessa määritellyn laskutuksen kuvauksen eli) funktion f kautta (tähän laskun suuruuden) arvoon $y = f(x)$.

Tällaista funktiota sanotaan **bijektioksi**.

Käänteisfunktio

Kun funktio on **bijektio**, voidaan esimerkin

- alkuperäinen kysymys:

”Jos kulutus on x MWh niin, mikä on lasku y (€)?”

- **kääntää** toisin päin:

”Jos laskun suuruus on y € niin, mikä on kulutus x (MWh)?”

Edellä ratkaistu tehtävä

- jos lasku y on 200 €, niin ostettu määrä x on ollut n. 11.16 MWh,

- voidaan tehdä samalla tavalla uudelleen minkä tahansa laskun suuruuden $y \in [20.30, \infty)$ osalta.

Silloin

kulutuksen määrän x ja laskun suuruuden y välisen yhteyden kuvaavaan malliin

f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow [20.30, \infty)$, $f(x) = 16.10x + 20.30$,

missä kulutus (MWh) $x \in \mathbf{R}^+$ ja lasku (€) $y = f(x) \geq 20.30$

on ”kätkeytyneenä” myös sääntö (funktio), jonka vastaa kysymykseen:

Jos (laskun suuruus) f(x) = y, mikä on (kulutus) x?

Käänteinen sääntö saadaan selville ratkaisemalla x yhtälöstä

$$
\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow 16.10x + 20.30 = y \\
&\Leftrightarrow 16.10x = y - 20.30 \quad |:16.10 \\
&\Leftrightarrow x = 0.06211y - 1.26087
\end{aligned}
$$

Näin kaukolämpösopimuksen sisältöä kuvaavasta funktiosta f seuraa **käänteinen yhteys** eli funktio jokaisen mahdollisen laskun suuruuden $y \geq 20.30$ € ja kulutetun määrän $x \geq 0$ MWh välillä. Tätä funktiota sanotaan funktion f **käänteisfunktioksi** ja siitä käytetään merkintää f^{-1} ja tässä

f^{-1}: $[20.30, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^{+}$, $\mathbf{f^{-1}(y)=0.06211y-1.26087}$,

missä lasku (€) $y \in [20.30, \infty)$ ja kulutus (MWh) $x = f^{-1}(y) \in \mathbf{R}^{+}$.

Siis kaukolämpösopimukseen sisältyy **funktiopar**i:

$$\begin{tikzcd} x = f^{-1}(y) \bullet \arrow[rr, bend left, "\text{funktio } f"] & & \bullet\ y = f(x) \arrow[ll, bend left, "\text{käänteisfunktio } f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Jos (reaali-)funktio $f: A \rightarrow B$ on bijektio, niin se on surjektio ja injektio.

Jos näin ei ole, niin maalijoukkoa B ja/tai lähtöjoukkoa A ”sopivasti” rajoittamalla voi f saada nämä ominaisuudet:

Surjektio: Kaukolämpöesimerkissä alkuperäinen maalijoukko $\mathbf{R}^+$

”typistettiin” arvojoukoksi [20,30, ∞)

Mikä tahansa funktio saadaan samalla tavalla surjektioksi.

Injektio: Laskun suuruutta kuvaavan funktion injektiivisyys seuraa siitä,

että lasku y = f(x) kasvaa, jos kulutus x kasvaa.

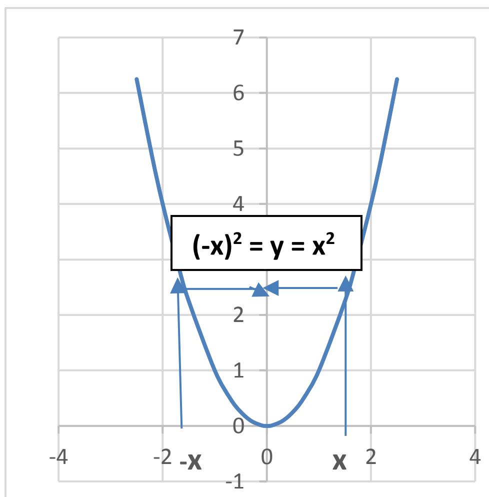
Jos funktion f:A→B määrittely voidaan rajoittaa A:n osajoukkoon C, jossa f on **aidosti monotoninen** eli **kasvava** tai **vähenevä,**

on tämä funktion f **rajoittuma** f:C→B injektio.

Esim. Funktio $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$

ei ole surjektio eikä injektio:

Kuviosta näkyy (tässä tarkat perustelut sivuuttaen), että



- arvojoukko on $\mathbf{R}^+$ ja
- f on **vähenevä**, kun $x \leq 0$ ja f on **kasvava**, kun $x > 0$.

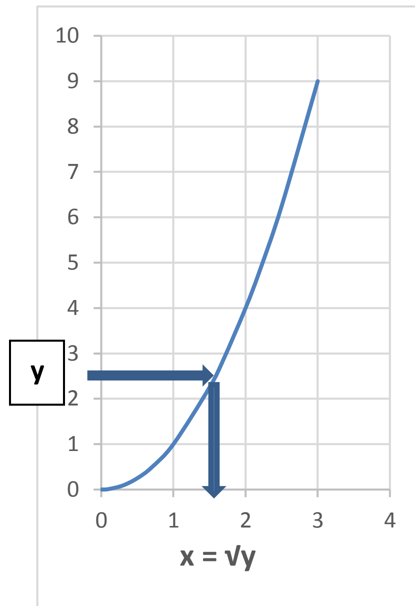
Kun määritellään $f:(-\infty,0] \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x)=x^2$ tai $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x)=x^2$

on f kummassakin tapauksessa bijektio.

Silloin (esim.) funktiolla f:**R**$^+$→**R** $^+$, f(x)=x^2 on käänteisfunktio.

Siis on jokin(?) sääntö, joka vastaa yksikäsitteisesti kysymykseen

Jos f(x) = y, mikä on x?



Tämä ratkeaa "helposti":

$$\mathrm{f(x) = y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x^2 = y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{y}}$$

ja käänteisfunktioksi saadaan

f^{-1}:**R**$^+$→**R**$^+$, f^{-1}(y)=$\sqrt{y}$ (?).

- Tämä funktio on **aivan erityyppinen** funktio kuin (2. asteen polynomifunktio) f

- ja sen arvojen laskeminen perustuu "f:n arvojen laskemisen muisteluun"

"$\sqrt{0}$ = 0, koska 0^2 = 0",

"$\sqrt{0{,}25}$ = 0,5, koska 0,5^2 = 0,25 "

”$\sqrt{4}$ = 2, koska $2^2 = 4$ ” jne.

Sen sijaan esimerkiksi (irrationaalisen) arvon $\sqrt{2}$,

- joka siis ”on luku, joka 2. korotettuna on 2”,

laskemiseen ei ole mitään suoraa helppoa tapaa. Kuitenkin funktion f bijektiivisyyden perusteella täsmällinen arvo varmasti on olemassa. Sovelluksissa tämä arvo tietenkin korvataan rationaalisella likiarvolla.

Näin funktio $f:\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x)=x^2$ generoi parikseen käänteisfunktionsa olemassaolon kautta uudentyyppisen **juurifunktion**, joka on erikoistapaus yleisestä **potenssifunktiosta.**

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \arrow[r, bend left, "\text{funktio } f"] & y = f(x) = x^2 \arrow[l, bend left, "\text{käänteisfunktio } f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Yhdistetty funktio

<u>Esim.</u> (jatkoa) Kiinteistöyhtiö ostaa kaukolämpöeriä markkinahintaa halvemmalla samaan konserniin kuuluvalta tehtaalta.

Yhtiö myy kaukolämmön edelleen kuluttajille

- 50 %:lla korotettuun hintaan ja

- veloittaa kuukaudessa käsittelymaksuna 25.00 €.

Jos kuluttaja ostaa määrän x (esim. 5 MWh), jonka

- **ensin** tehdas myy kiinteistöyhtiölle ja

- **sitten** tämä välittää sen edelleen kuluttajalle,

kuinka suuri on lopullisen laskun suuruus?

Laskun suuruus muodostuu **kahdessa vaiheessa**:

1) Välittävän kiinteistöyhtiön maksama hinta y saadaan edellä käsitellyn mallin avulla:

f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow [20.30,\infty)$, $\mathbf{f(x) = 16.10x + 20.30}$,

missä kulutus (MWh) $x \in \mathbf{R}^+$ ja lasku (€) $y= f(x) \in [20.30,\infty)$,

Jos esim. x = 5 MWh, niin

$y = f(5) = 16.10 \cdot 5 + 20.30 = 100.80$ €.

2) Määrän edelleen välittävä kiinteistöyhtiö korottaa tämän arvon y 50 %:lla ja lisää vielä lopulliseen laskuun 25.00 €.

Tämän säännön mukaan välittäjän maksamasta hinnasta
y = 100.80 € saadaan kuluttajan maksama hinta

$z = 1.50 \cdot 100.80 + 25.00 = 176.20$ €.

Jälkimmäisen hinnan muodostumisen määrää siis funktio

g: $[20.30,\infty) \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\mathbf{g(y) = 1.50y + 25.00}$, missä

kiinteistöyhtiön lasku (€) $y \in [20.30,\infty)$ ja kuluttajan lasku (€) $z=g(y) \in \mathbf{R}^+$.

Kuluttajan maksama lopullinen hinta z **muodostuu vaiheittain**, joissa

- ensin ”sisempi” funktio f kuvaa määrän x muuntumisen välittäjän maksamaksi hinnaksi y ja

- ”ulompi” funktio g sitten y:n muuttumisen kuluttajan laskuksi z.

Tehdas   Välittäjä   Kuluttaja

$$x\ (\text{MWh}) \xrightarrow{f} y=f(x)\ (€) \xrightarrow{g} z=g(y)\ (€)$$

↗

Jos halutaan **”oikaista”** kiinteistöyhtiön maksaman hinnan y ohi, voidaan ensimmäinen ”sisempi” funktio f ja jälkimmäinen ”ulompi” funktio g yhdistää **yhdistetyksi funktioksi**, kun

- g:n lausekkeeseen $g(y) = 1.50y + 25.00$

- sijoitetaan y:n arvo funktion f lausekkeen $y = f(x) = 16.10x + 20.30$ avulla esitettynä.

Tästä funktiosta käytetään merkintää $g \circ f$.

(Luetaan:”g pallo f”)

Siis

$z = g \circ f\,(x) = g(y) = 1.50y + 25.00 = 1.50(16.10x + 20.30) + 25.00$

$= 24.15x + 55.45.$

Esimerkiksi edellä vaiheittain lasketun 5 MWh:n kuluttajahinta saadaan tästä lyhyemmin

$g \circ f\,(5) = 24.15 \cdot 5 + 55.45 = 176.20$ €.

Funktioiden yhdistäminen käy samalla tavalla myös yleisesti:

Oletetaan, että määriteltyinä ovat funktiot $f: A \rightarrow B$ ja $g: V_f \rightarrow C$.

Niiden **yhdistetty funktio** on $g \circ f: A \rightarrow C$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Funktiota f (,” jonka arvo ensin lasketaan”) sanotaan **sisäfunktioksi**.

ja funktiota g (,”jonka arvo lasketaan tämän jälkeen”,) **ulkofunktioksi**.

Peräkkäisiä yhdistettäviä funktioita voi olla myös useampia kuin kaksi.

Edellä on käytetty sisä- ja ulkofunktion muuttujille eri symboleja x ja y (, kuten tässä tietenkin pitääkin).

Jos f ja g ovat ”mitä tahansa” funktioita niiden määrittelyssä on yleensä sama muuttujasymboli (yleensä x).

Funktioiden yhdistäminen voi kuitenkin olla helpompaa, jos muuttujista käytetään eri merkintää.

Yhdistetyn funktion käsite on tärkeä ainakin seuraavista syistä:

1) Sovelluksissa monet funktiot muodostuvat vaiheittain.

2) (”derivoijan paras ystävä”) Monet funktiot voidaan hahmottaa kahden tai useamman funktion yhdistettynä funktiona, mikä helpottaa niiden käsittelyä.

3) Teorian kehittelyssä (mm. seuraavassa käsiteltävän yleisen potenssifunktion määrittelyssä) yhdistetyn funktion käsitteen avulla voidaan generoida uusia funktiotyyppejä.

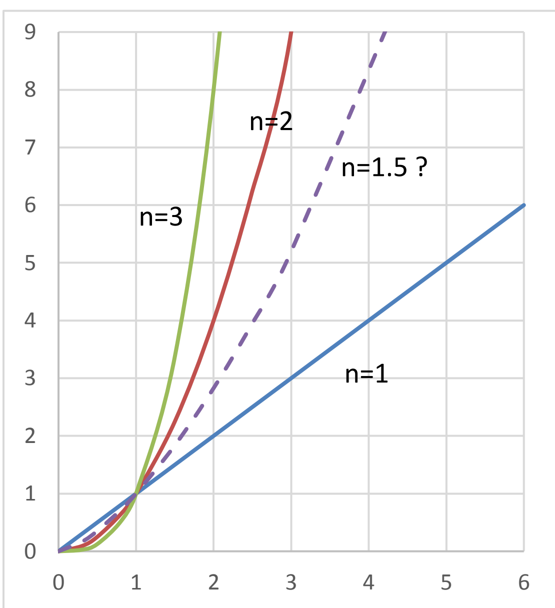
2.4 Potenssifunktio

Polynomifunktio on lineaarinen yhdistely ”osafunktioista”

f:**R**→**R,** missä $f(x) = x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n$.

Näiden funktioiden $\mathbf{f_n(x) = x^n}$ kuvaajat sijoittuvat koordinaatistoon eksponentin n:n mukaan järjestykseen:

<u>Funktioita f_n:**R⁺**→**R⁺**, $f_n(x) = x^n$</u>:



Kuvaajien välille jää paljon ”tyhjää tilaa”. Joidenkin muuttujien x ja y välisen yhteyden mallintamiseen voisi sopia vaikkapa jokin funktio, joka

- kasvaisi hiukan lineaarista voimakkaammin,
- mutta ei kuitenkaan niin voimakkaasti kuin 2. asteen polynomifunktio.

Voisiko olla olemassa ”**jotain niiden väliltä**”?

Mitä voisi olla esim. funktio $f_{1.5}(x) = x^{1.5}$ (= $x^{\frac{3}{2}}$) ?

Vastaus tähän **ei voi olla** yleistys tavallisesta potenssiin korotuksesta, joka on vain lyhennysmerkintä kertolaskulle:

$x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, …

Kuitenkaan **ei ole olemassa** mitään sellaista, että vaikkapa ”luku 2 kerrottaisiin itsellään 1.5 kertaa.”

Vaikka edellistä tietä ei päästä eteenpäin, voidaan kuitenkin yrittää **määritellä jollain (ehkä aivan) toisella tavalla** funktio

f_a:**R^+**$\rightarrow$**R^+**, $f_a(x) = x^a$, missä eksponentti $a \in$ **R** (esim**.** a = 1.5 kuten edellä),

joka ”muistuttaa” edellisiä funktioita

f_n:**R^+**$\rightarrow$**R^+**, $f_n(x) = x^n$, missä $n \in$ **N**.

Tällöin **toiveiksi** on ainakin asetettava:

1) Kuvaajat ovat **”samanmuotoisia”** kuin edelliset ja asettuvat koordinaatistoon **eksponentin mukaiseen järjestykseen**.

Siis esimerkiksi $f_{1.5}(x) = x^{1.5}$ on $f_1(x) = x$ ja $f_2(x) = x^2$ ”välissä”.

2) Näillä uusilla funktioilla on **samanlaisia ominaisuuksia** kuin ”vanhoilla”.

Ainakin tavallisesta kertolaskusta seuraavien

potenssin laskusääntöjen

1° $\boldsymbol{x^n \cdot x^m = x^{n+m}}$

2° $\boldsymbol{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$ (tässä vielä m<n ∈ **N**)

3° $\boldsymbol{(x^n)^m = x^{nm}}$

4° $\boldsymbol{(xy)^n = x^n y^n}$

5° $\boldsymbol{(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}}$

on oltava voimassa myös näille funktioille.

Tavoitteena on, että funktio f_a:A→**R⁺**, $f_a(x) = x^a$

voidaan määritellä, olipa eksponentti a∈**R** mikä tahansa vakio.

Yleisessä tapauksessa lähtöjoukko A on $\mathbf{R}^+$ tai $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$,

jotta edelliset potenssin laskusäännöt ovat voimassa.

Lisäksi tarvitaan **sopimus: $x^0 = 1$**.

1. yleistyksenä on funktio f:**R**\{0}→ **R**, **f(x) =** $\mathbf{x^{-n}}$, missä n∈**N**.

Määrittely perustuu

luvun x ≠0 käänteisluvusta $\frac{1}{x}$ **sovittuun merkintään** x^{-1}.

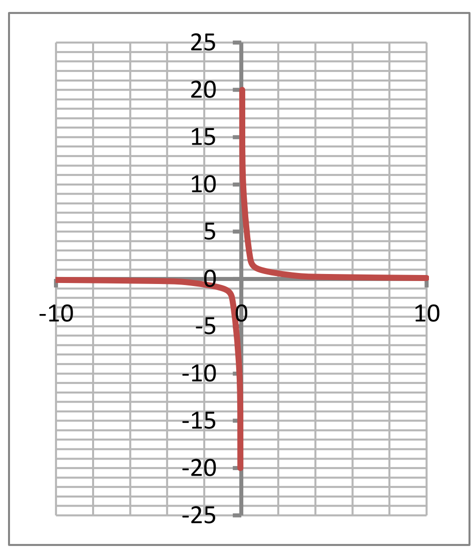
Samoin **sovitaan**, että

luvun x^n käänteisluvusta $(x^n)^{-1}$ käytetään **merkintää** x^{-n}.

Tämän sopimuksen perusteella määritellään funktio

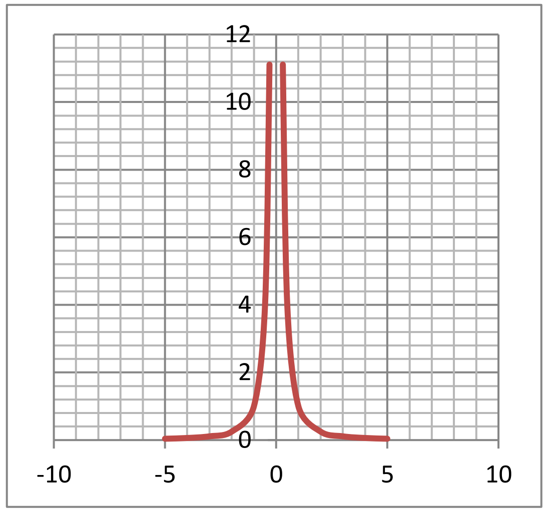
merkintä ↘

f:**R**\{0}→ **R**, f(x) = $\mathbf{x^{-n}}$ = $\mathbf{\frac{1}{x^n}}$ ← merkinnän sisältö



<u>Esim.</u> f:**R**\{0}→ **R**, f(x) = x^{-1}

Kaikki funktiot f(x) = x^{-n} ovat hyvin samanlaisia, kun n on **pariton.**



Esim. f:**R**\{0}→ **R**, f(x) = x^{-2}

Kun n on **parillinen**, ovat

kuvaajat hyvin samanlaisia.

Määrittely on **tarkoituksenmukainen**, koska voidaan varsin helposti osoittaa, että

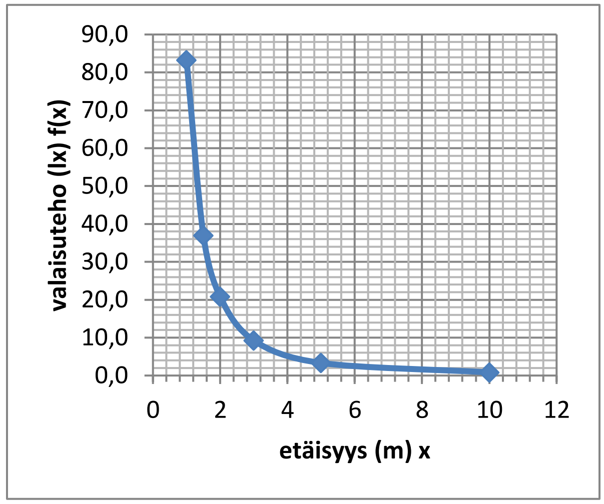
potenssin laskusäännöt ovat voimassa.

Esim. On havaittu, että lampun valaisuteho on kääntäen verrannollinen valaistavan kohteen etäisyyden neliöön. Tutkittavalle lampputyypille saatiin (mittausten ja tilastollisen analyysin avulla) malli

f:$\mathbf{R}^{+}$\{0}→$\mathbf{R}^{+}$, f(x) = $\frac{83.2}{x^2}$, missä

x = etäisyys (m) ja f(x) = valaisuteho (lx)

1	83,2
1,5	37,0
2	20,8
3	9,2
5	3,3
10	0,8



Tämän **vähenevän funktion** kuvaaja ei ole samanmuotoinen kuin (kasvavien) funktioiden

f_n:$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f_n(x) = x^n$, missä $n \in \mathbf{N}$,

mutta

- sen määrittely perustuu positiiviseen kokonaislukupotenssiin korottamiseen

- sillä on samanlaisia ominaisuuksia kuin näillä lähtökohtana olevilla funktioilla

- ja se käy malliksi vastaavanlaisiin tilanteisiin.

Siksi tällaiset funktiot halutaan myös mukaan tähän funktiotyyppiin.

2. yleistyksenä on funktio f:A→$\mathbf{R}^+$, $\mathbf{f(x) = x^a}$, missä $\mathbf{a = \frac{m}{n}} \in \mathbf{Q}$.

Jos murtoluku a > 0, niin lähtöjoukko A = $\mathbf{R}^+$ ja, jos a < 0, niin A = $\mathbf{R}^+ \backslash \{0\}$.

Siis esimerkiksi, mitä voisi olla funktio

$f_{1.5}:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f_{1.5}(x) = x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}}$,

jonka kuvaajan pitäisi toiveiden mukaan

- ”asettua” f_1:n ja f_2:n ”väliin”

- ja toteuttaa potenssin laskusäännöt?

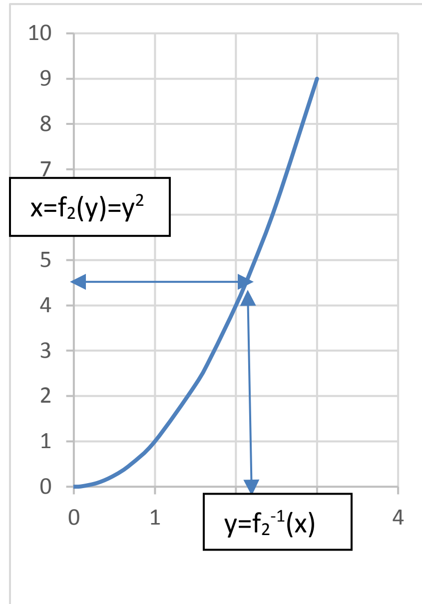
Kun nyt ”on odotettavissa”, että potenssin laskusäännöt tulevat olemaan voimassa (?), voidaan tilanne hahmottaa yhdistelynä

$x^{\frac{3}{2}} = x^{3 \cdot \frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3$,

jos (juurifunktio) $f_{0.5}:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $\mathbf{f_{0.5}(x) = x^{0.5}} = \mathbf{x^{\frac{1}{2}}}$ saadaan ensin järkevästi määritellyksi.

Tämä oli jo edellä esimerkkinä **käänteisfunktion** määräytymisestä:

Funktio f_2:A→B, $x = f_2(y) = y^2$ on **bijektio**.



(tässä merkinnät nimenomaan

y∈A=**R⁺** ja x=f(y)∈B= **R⁺**)

Silloin sillä **on käänteisfunktio**

f_2^{-1}:B=**R⁺**→A=**R⁺**, $f_2^{-1}(x)=y$.

Tämä on määriteltävänä oleva funktio ja on **sovittu**, että

merkintänä käytetään $y = (f_2^{-1}(x)) = \mathbf{x^{\frac{1}{2}}}$

Siis

- $x^{\frac{1}{2}}$ on pelkästään merkintä.

- ja sen **sisältönä** on:

”On saatava selville luku y, joka 2. korotettuna on x.”

Funktio, josta tässä käytetään merkintää

$f_{0.5}$:**R**⁺→**R**⁺, $f_{0.5}(x) = x^{\frac{1}{2}}$,

on siis tuttu ”neliöjuuri” $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$:

$0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$, koska $0^2 = 0$

$0.25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.25} = 0.5$, koska … jne.

Juurifunktion $f_{0.5}$:**R**⁺→**R**⁺, $f_{0.5}(x) = x^{\frac{1}{2}}$

arvojen laskeminen onnistuu tällä tavalla ”päässä laskemalla” vain erikoistapauksissa.

Esimerkiksi (irrationaaliluvulle) $2^{\frac{1}{2}}$ voidaan saada vain (rationaalinen, mutta kuinka tarkka tahansa) likiarvo $2^{\frac{1}{2}} \sim 1.4142$ … ($1.4142^2 \sim 2$).

Funktio $f_{0.5}$:**R**⁺→**R**⁺, $f_{0.5}(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ”syntyi”

funktion f_2:**R**⁺→ **R**⁺, $f_2(y) = y^2$ (=x) käänteisfunktiona

eikä siinä ”koroteta potenssiin 0.5 ”.

Juurifunktion yleinen tapaus määritellään samalla tavalla:

Funktio f_n:**R^+**→ **R^+**, $f_n(y) = y^n = x$

- on aidosti kasvava
- ja V_f = **R^+** (=maalijoukko),

joten se on bijektio.

Silloin on olemassa **käänteisfunktio**

f_n^{-1}:**R^+**→ **R^+**, $f_n^{-1}(x) = y$

ja ”käänteisfunktion palauttamasta” arvosta y käytetään **merkintää**

$f_n^{-1}(x) = \mathbf{x^{\frac{1}{n}}}$ (ja myös $\sqrt[n]{x}$).

Tätä funktiota sanotaan **n:nneksi juureksi**.

- Voidaan osoittaa, että **potenssin laskusäännöt** ovat voimassa.
- ”Alkuperäisen” funktion f_n ja vastaavan juurifunktion f_n^{-1} kuvaajat ovat toistensa ”peilikuvia”,

mikä toteuttaa ”**samanmuotoisuuden**” vaatimuksen.

Esim. Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden

f_2:$\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f_2(t) = t^2$ ja $f_{0.5}$:$\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f_{0.5}(t) = t^{0.5} = \sqrt{t}$

kuvaajat.

Käänteisfunktion käsite generoi juurifunktiot. Yhdistetyn funktion käsitteen avulla saadaan tästä yleinen **murtopotenssifunktio**:

Esimerkkifunktiona on pohdittu: ”Mitä on $x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}}$?”

Määriteltäville murtofunktioille asetettiin toiveeksi, (jonka toteutuminen pitää ja voidaan myös todistaa,) että potenssin laskusäännöt ovat voimassa.

Tällöin ”on luonnollista” lähteä määrittelyssä ”tavoitteesta”

$x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2} \cdot 3} = (x^{\frac{1}{2}})^3$.

Tämä rakenne syntyy, kun yhdistetään funktiot $f_{0.5}$ ja $f_{3.}$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "f_{0.5}"] & \bullet \arrow[r, bend left, "f_3"] & \bullet \end{tikzcd}$$

x $\quad$ $y=f_{0.5}(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $z=f_3(y) = y^3$

Yhdistämällä saadaan

$f_{1.5}= f_3\circ f_{0.5} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+, f_{1.5}(x) = f_3\circ f_{0.5}(x) = f_3(f_{0.5}(x)) = f_3(x^{\frac{1}{2}}) = (x^{\frac{1}{2}})^3$,

↓ 1) 2. juuri

ja **sovitaan**, että merkintänä käytetään $x^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3$ ← 2) 3. korotus

↗ ↑

merkintä sisältö

Yleinen määrittely on vastaavanlainen.

Merkintä $\mathbf{x}^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}$ tarkoittaa:

↓ 1) n:s juuri

$$\mathbf{x}^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}} = \left(\mathbf{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}}\right)^{\mathbf{m}}$$ ← 2) potenssiin m korottaminen

↗ ↑

merkintä sisältö

Tässä erikoistapauksessa funktioiden yhdistämisjärjestys voidaan vaihtaa.

<u>Esim.</u> On laskettava $x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}}$, kun x = 4.

$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

- ja toisessa järjestyksessä

$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

Jos eksponentti on negatiivinen murtoluku, yhdistetään edelliseen vielä **käänteislukumuunnos** ja määritellään (kolmen funktion yhdistelmänä) merkintä sisältö

↘ ↓

$$\mathbf{x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}}$$

Myös tässä laskujärjestys on joustava:

<u>Esim.</u> Laskettava $x^{-\frac{2}{3}}$, kun x=8.

$$x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Käänteisluku, 3. juuri ja 2. korottaminen voidaan laskea monessa järjestyksessä, ja tulos (¼) on sama. Kokeile toisessa järjestyksessä!

<u>Esim.</u> Ekonomisti E tutki kultakalakaviaarin kysyntää ja tarjontaa ja sai malleiksi funktiot:

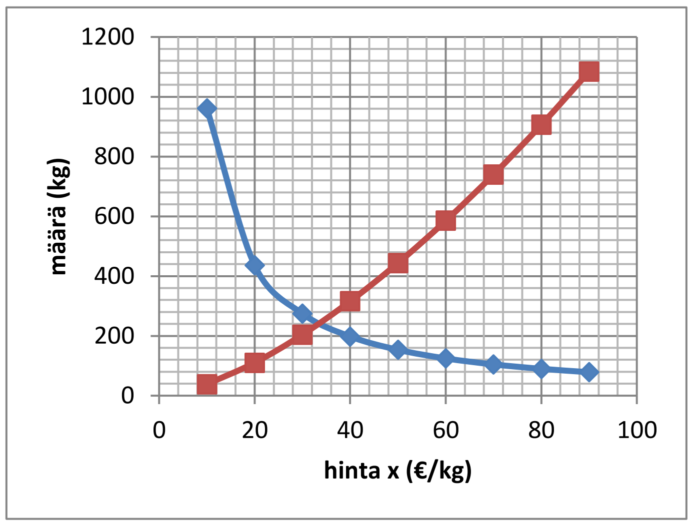
<u>kysyntä:</u> f:$\mathbf{R}^+\setminus\{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 13262x^{-1.14}$

<u>tarjonta:</u> g:$\mathbf{R}^+\setminus\{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 1.16x^{1.52}$

f(x)=kysyntä (kg), g(x)=tarjonta (kg) ja x=hinta (€/kg)

Kultakalakaviaarin kysyntä ja tarjonta

x	kysyntä	tarjonta
10	961	38
20	436	110
30	275	204
40	198	316
50	153	443
60	125	585
70	105	740
80	90	906
90	78	1084



Käytännössä potenssifunktioiden arvot saadaan laskimista, joissa arvojen laskeminen perustuu sarjakehitelmiin(?).

Kun markkinat ovat tasapainossa, on f(x) = g(x). Tässä saadaan

$13262x^{-1.14} = 1.16x^{1.52}$ |: $x^{-1.14}$ |:1.16

ja potenssin laskusääntöjä käyttämällä saadaan

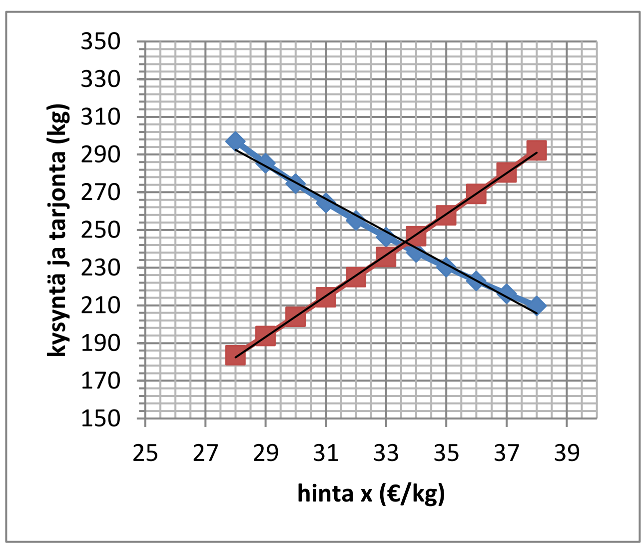
$$x^{2.66} \sim 11433$$

$$\Leftrightarrow \ (x^{2.66})^{\frac{1}{2.66}} \sim 11433^{\frac{1}{2.66}} \sim 11433^{0.37594} \sim 33.54 \text{ (€/kg)}.$$

Tämä **eksponenttiyhtälö** voidaan ratkaista (kuten yleensä tehdäänkin) myös **logaritmifunktion** avulla.

Lähellä kysynnän ja tarjonnan tasapainopistettä näyttävät f ja g olevan lähes lineaarisia:

x	f(x)	g(x)
28	297	184
29	285	194
30	275	204
31	265	214
32	255	225
33	246	236
34	238	247
35	230	258
36	223	269
37	216	281
38	210	292



Viimeinen yleistys on funktio $f:A \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = x^a$, ($A = \mathbf{R}^+$ tai $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$)

missä eksponentti a voi olla myös irrationaaliluku.

Tämä matematiikan teorian kannalta tärkeän tapauksen käsittely perustuu irrationaaliluvun a approksimointiin rationaalisten jonojen avulla ala- ja yläpuolelta. Tämä käsittely ei ole tässä tarpeellista.

Käytännön sovelluksissa voidaan aina käyttää riittävän tarkkoja rationaalisia likiarvoja.

Funktiot $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, missä $f(x) = x^1, x^2, x^3, \ldots , x^n$

on näin saatu yleistetyksi ”funktioperheeksi”

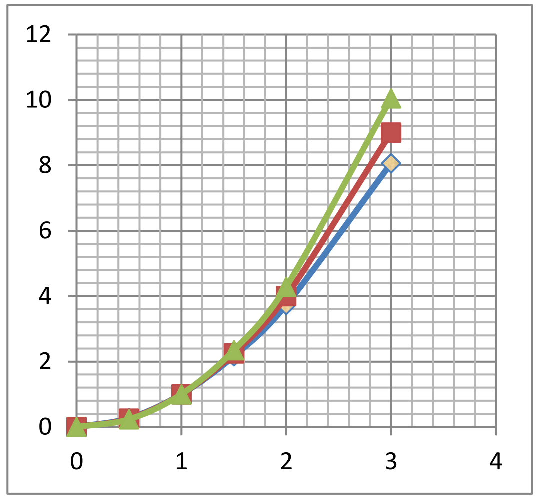
$f_a:A \to \mathbf{R}^+$, $\mathbf{f_a(x) = x^a}$, ($A = \mathbf{R}^+$ tai $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$),

jossa

- voidaan osoittaa, että **samat säännöt** (potenssin laskusäännöt, derivointi, integrointi) ovat voimassa kuin lähtökohtana olleilla funktioilla ja

- funktiot ovat **”saman näköisiä”** kuin lähtökohtana olleet funktiot, n=1

x	$x^{1.9}$	x^2	$x^{2.1}$
0	0	0	0
0,5	0,267943	0,25	0,233258
1	1	1	1
1,5	2,160595	2,25	2,343104
2	3,732132	4	4,287094
3	8,063626	9	10,04511

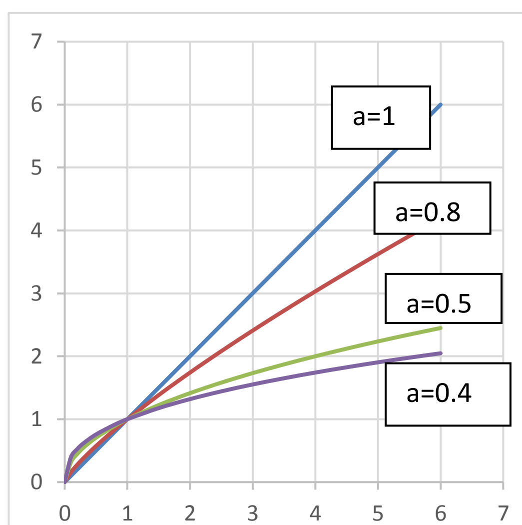


- ja nämä funktiot ”täyttävät koordinaatistossa olleet tyhjät tilat” eksponentin mukaisessa järjestyksessä.

Kun eksponentti a $>$ 1, funktiot $\mathbf{f_a: R^+ \rightarrow R^+, f_a(x) = x^a}$ ovat kasvavia ja kasvu on kiihtyvää.

Kun 0 $<$a $<$ 1, funktioiden f_a

kasvu on hidastuvaa.



2.5 Eksponentti- ja logaritmifunktio

Eksponenttifunktio

Esim. Geenimuunneltujen bakteerien avulla tuotetaan lääkkeen L erästä raaka-ainetta. Käytetystä bakteerikannasta tiedetään, että sen koko 2-kertaistuu tunnissa 20 °C lämpötilassa.

Jos bakteeriviljelmässä on tarkasteluhetkellä n. 10000 bakteeria, määrän kehitystä 0, 1, 2, … tunnin kuluttua kuvaa **geometrinen lukujono**, joka voidaan esittää funktiona

$f:\mathbf{N}\cup\{0\}\rightarrow\mathbf{R}^+$, $f(n)=10000\cdot 2^n$,

missä n = aika tunteina tarkastelun alusta alkaen
ja f(n) = arvio bakteerien määrälle **täysien tuntien** kuluttua.

Kuinka suuri määrä on esim. 2.5 tunnin kuluttua **” $f(2.5) = 10000\cdot 2^{2.5}$ ”**?

”Mitä on $2^{2.5}$”, ratkeaa valitsemalla **potenssifunktio**

$f_{2.5}:\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}^{+}$, $f_{2.5}(y) = y^{2.5}$

apuvälineeksi.

Sijoittamalla y = 2 saadaan $f_{2.5}(2) = 2^{2.5} \sim 5.65685$

ja $f(2.5) = 10000\cdot 2^{2.5} \sim 10000\cdot 5.65685 \sim 56569 \sim 56600$

tulee näin määritellyksi.

Vastaavalla tavalla saadaan arvioiduksi määrä esim. 1.5 h aikaisemmin valitsemalla **avuksi** taas tähän tilanteeseen sopiva **uusi potenssifunktio**

$f_{-1.5}:\mathbf{R}^{+}\backslash\{0\}\to\mathbf{R}^{+}$, $f_{-1.5}(y) = y^{-1.5}$

Kun siihen sijoitetaan y=2, tulee

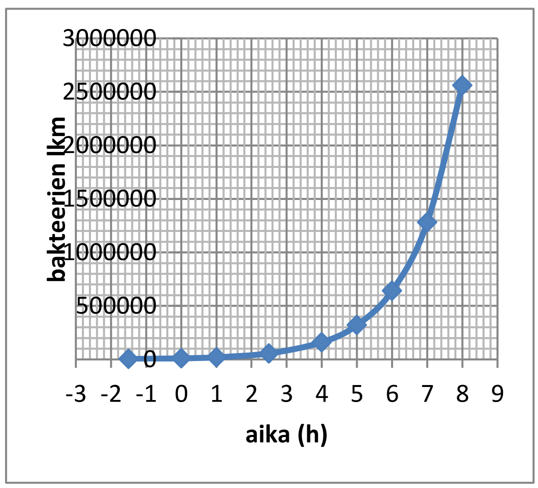
$f(-1.5) = 10000\cdot \mathbf{2^{-1.5}} \sim 10000\cdot 0.35355 \sim 3536 \sim 3500$ määritellyksi.

Olipa aika $x\in\mathbf{R}$ mikä tahansa arvo, voidaan potenssifunktioista aina valita sopiva ”apuväline”, jonka avulla 2^x määritellään.

Näin saadaan f määritellyksi kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kuvaaja ajan suhteen jatkuvaksi:

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 10000 \cdot 2^x$, missä x = aika (h) ja f(x) = bakteerien määrä.

aika	lkm
-1,5	3536
0	10000
1	20000
2,5	56569
4	160000
5	320000
6	640000
7	1280000
8	2560000



Tämän mukaisesti määritellään:

Olkoon a>0 vakio. **Eksponenttifunktion** $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$

arvot määritellään potenssifunktion avulla:

- Jokaista eksponentin x arvoa vastaa potenssifunktio

f_x:A→**R**$^+$, $f_x(y) = y^x$ (A=**R**$^+$, jos $x \geq 0$, ja A=**R**$^+$\{0}, jos $x < 0$),

- johon sijoitetaan kantaluku y=a ja $f(x) = f_x(a)$.

Siis

x muuttuu → uusi potenssifunktio → lasketaan sen arvo a:ssa

Huom! Vaikka eksponenttifunktion arvot saadaan potenssifunktioiden avulla, ovat nämä aivan eri funktioita:

- Yleinen **potenssifunktio**

f_b:A→**R**$^+$, $\mathbf{f_b(x) = x^b}$ (A=**R**$^+$, jos $x \geq 0$, ja A=**R**$^+$\{0}, jos $x < 0$)

on polynomien ”osasten” x^1, x^2, x^3, … yleistys ja siinä

- kantaluku x on muuttuja ja

- eksponentti b vakio.

- **Eksponenttifunktiossa** f:**R**→**R**$^{+}$, **f(x) = a^{x}** on

- **kantaluku a on vakio ja**

- **eksponentti x muuttuja.**

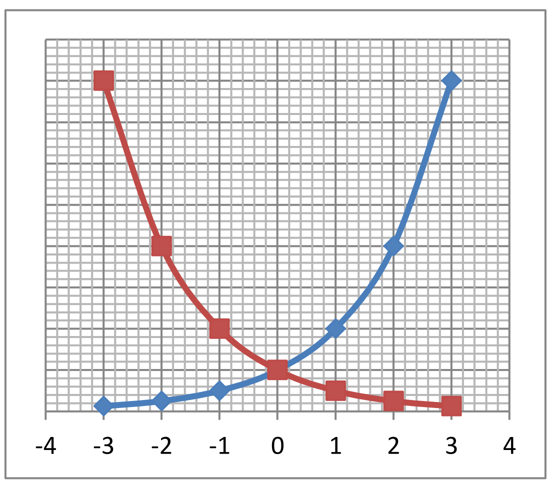
Eksponenttifunktio on geometrisen jonon x:n (esim. ajan) suhteen jatkuva yleistys ja sopii siten malliksi vastaavanlaisiin tilanteisiin, joissa

suhteellinen muutos on vakio.

Eksponenttifunktion ominaisuuksia:

<u>Esim.</u>

x	2^x	0.5^x
-3	0,125	8
-2	0,25	4
-1	0,5	2
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125



Esimerkeistä näkyy (ja voidaan yleisesti osoittaa), että

eksponenttifunktio f:**R**→**R**$^+$, $f(x) = a^x$ on

- **kasvava**, kun kantaluku $a > 1$

- **vähenevä**, kun kantaluku $(0<)\ a < 1$

Koska on **sovittu**, että $\mathbf{x^0 = 1}$,

niin kaikkien eksponenttifunktioiden kuvaajat leikkaavat y-akselin ykkösen kohdalla.

Näin kuvaajat eivät katkea, ja (mm.) tämä perustelee sopimuksen tarkoituksenmukaisuuden.

Tärkeä erikoistapaus on funktio f:**R**→**R**$^+$, $f(x) = e^x$,

missä $e \sim 2.7182818\ldots$ on **Neperin luku**.

Neperin luku on tärkeimpiä matemaattisia vakioita, ja sen määrittelee lukujonon raja-arvo

$$\mathbf{e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n} \qquad (?)$$

Tästä määritelmästä ei tietenkään suoraan näy Neperin luvun e tärkeys matematiikassa ja sen soveltamisessa. Jo tämän lukujonon suppenemisen osoittaminen ei ole aivan yksinkertaista.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2,0000000
2	2,2500000
10	2,5937425
100	2,7048138
1000	2,7169239
10000	2,7181459
100000	2,7182682
1000000	2,7182805
10000000	2,7182817
100000000	2,7182818

Kuitenkin kokeilemalla aina suuremmilla n:n arvoilla saadaan jonon (rationaalisille) termeille arvot, jotka ”näyttävät lähestyvän” kiinteää (irrationaalista (?)) arvoa.

Voidaan kuitenkin osoittaa ja osoittautuu, että tämä funktio f on hyvin keskeisessä asemassa mm. seuraavista syistä:

- f on helppokäyttöinen. Erityisesti derivaatta ja integraalifunktio ovat yksinkertaisia.

- Kaikki eksponenttifunktiot voidaan esittää f:n muunnoksina, jolloin myös niiden käsittely on yksinkertaista.

- Todennäköisyyslaskennassa f:n eräs muunnos määrittelee **normaalijakauman**, joka on tilastotieteen tärkeimpiä apuvälineitä.

- e on luonnollisen logaritmifunktion kantaluku.

Eksponenttifunktion arvojen määrittely perustuu ”sopivan” potenssifunktion arvon laskemiseen.

Siten myös **potenssifunktion laskusäännöt** ovat voimassa:

Kun (kantaluvut) $a>0$ ja $b>0$ ovat vakioita ja $x,y\in\mathbf{R}$, niin

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Esim. Yhtiön tulevaisuutta koskevissa arvioissa käytetään aiempaan hintatason muutokseen perustuvaa oletusta, että tuotannossa tarvittavien raaka-aineiden hinnat nousevat keskimäärin 5 % vuodessa.

Tällöin hintatason suhteellista muutosta kuvaa funktio

f:**R**→**R**$^+$, f(x) =1.05^{x}, missä

x = aika (v) tarkasteluajankohdasta lukien ja
f(x) = hintatason suhteellinen muutos.

Tämän avulla voidaan (esim.) arvioida, että

2.5 seuraavan vuoden aikana hintataso

f(2.5) =$1.05^{2.5}$ $\sim$ 1.1297 - kertaistuu

ja

tämän jälkeen seuraavien 7.5 vuoden aikana

f(7.5) =$1.05^{7.5}$ $\sim$1.4418 – kertaistuu.

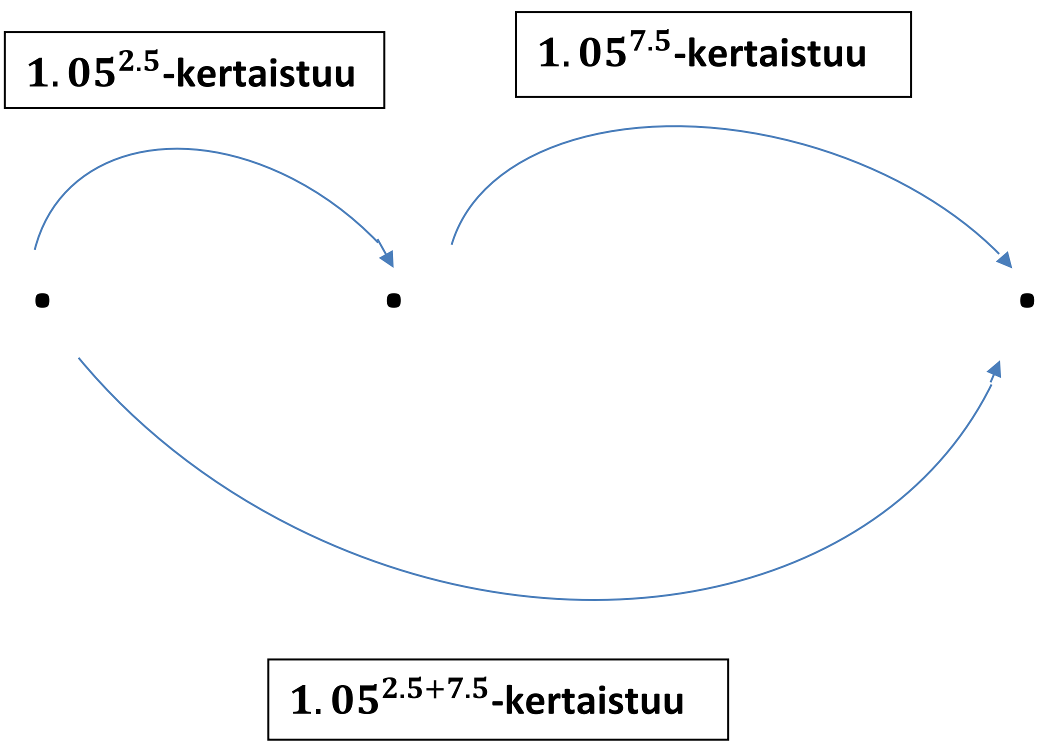
Suhteelliset muutokset ovat kerrannaisia, ja koko 2.5 + 7.5 = 10 vuoden aikana hintataso

(f(2.5)· f(7.5) =$\mathbf{1.05^{2.5} \cdot 1.05^{7.5}}$ = 1.1297·1.4418 ~ 1.63-kertaistuu.

Toisaalta

f(10) = 1.05^{10} (= $\mathbf{1.05^{2.5+7.5}}$) ~ 1.63

ja sääntö 1. on tässä suhteellisten muutosten luonnollinen ketjutusominaisuus:

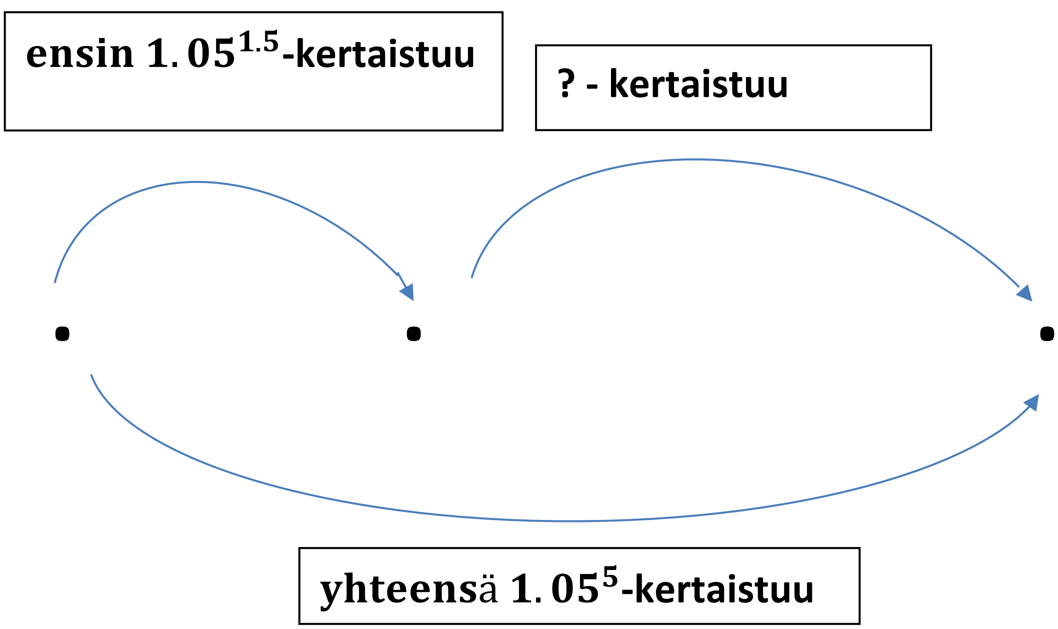


Sääntö 2. toimii tässä vastaavalla tavalla:

5 vuoden aikana hintataso f(5) = $1.05^5 \sim 1.2763$ – kertaistuu,

kun se ensin

1.5 ensimmäisen vuoden aikana f(1.5) = $1.05^{1.5} \sim 1.0759$ - kertaistuu.



Silloin viimeisten 5 – 1.5 = 3.5 vuoden aikana hintatason suhteellinen

muutos on ($\dfrac{\mathbf{1.05^5}}{\mathbf{1.05^{1.5}}}$) $\sim \dfrac{1.2763}{1.0759} \sim 1.186$.

Toisaalta

$f(3.5) = 1.05^{3.5}$ (= $\mathbf{1.05^{5-1.5}}$) ~ 1.186

Esim. Maatalousalueelle pääsee leviämään uusi tuhohyönteislaji, jonka populaatio koostuu alussa 100 yksilöstä.

- Hyönteisten määrän arvellaan 2.5-kertaistuvan vuodessa (empiirisiin havaintoihin perustuen)

- ja tiedetään, että tilantarve on noin 0.0022 m^2/yksilö. (empiirinen tieto)

Näiden tietojen perusteella voidaan tehdä malli, joka kuvaa tuholaisten **leviämisetäisyyttä r**, kun x vuotta on kulunut:

- Tuholaisten määrää kuvaa funktio $f: R^+ \to R^+$, $\mathbf{f(x) = 100 \cdot 2.5^x}$,

missä x = aika (v) ja y = f(x) = hyönteisten määrä x vuoden kuluttua.

- Jos populaatiossa on y yksilöä, niin ne tarvitsevat tilaa 0.0022y m^2.

Ilmeisesti on järkevää tehdä **yksinkertaistava oletus:**

Hyönteiset levittäytyvät ympyrän muotoiselle alueelle. Silloin

$$0.0022 \cdot y = \pi \cdot r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{0.022}{\pi} y} \sim 0.0265 y^{0.5}$$

Siis **leviämisetäisyyttä** kuvaa funktio

g:$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, **g(y) =** $\mathbf{0.0265y^{0.5}}$,

missä y = hyönteisten määrä ja r = g(y) = leviämisetäisyys (m).

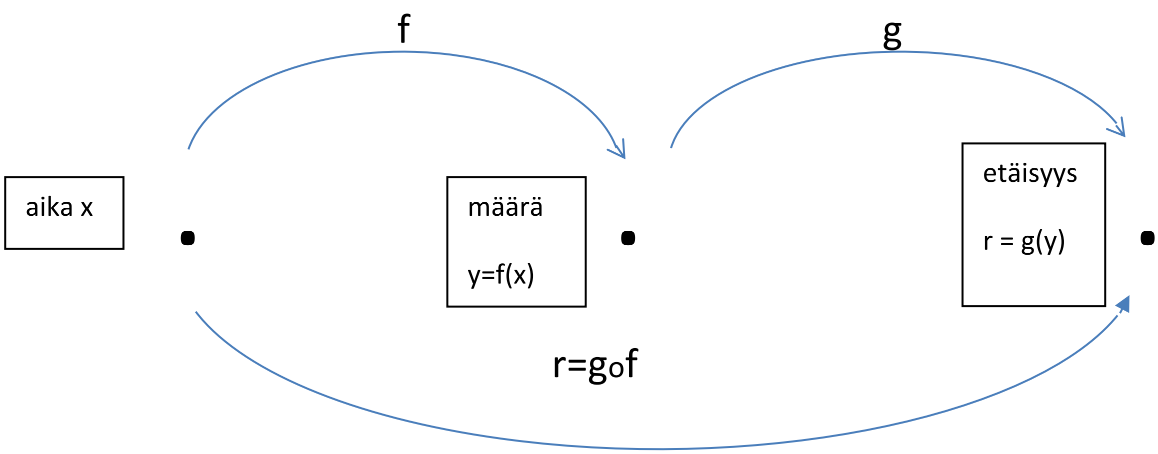
Yhdistämällä nämä funktiot saadaan:

$r = g \circ f$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$,

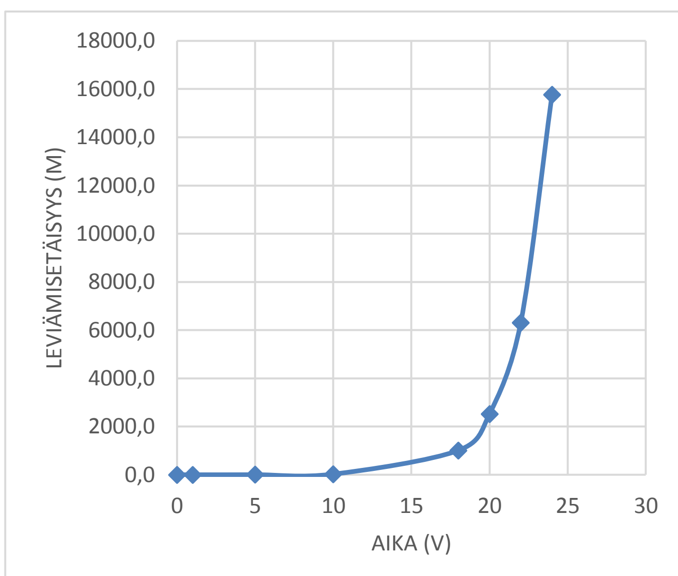
$$r(x) = g \circ f(x) = g(y) = 0.0265y^{0.5} = 0.0265(100 \cdot 2.5^x)^{0.5}$$

$$= 0.0265 \cdot (100)^{0.5} \cdot (2.5^x)^{0.5} = 0.0265 \cdot 10 \cdot 2.5^{x \cdot 0.5} = 0.265 \cdot (2.5^{0.5})^x$$

$= \mathbf{0.265 \cdot 1.581^x}$.



aika(v) x	etäisyys(m) r(x)
0	0,3
1	0,4
5	2,6
10	25,9
18	**1009,3**
20	2522,8
22	6305,9
24	15762,0
26	39398,0
28	98477,8
30	246151,2



Alussa leviäminen on hidasta, mutta leviämisetäisyys 1.581-kertaistuu vuodessa ja vauhtiin päästyään kasvu on räjähdysmäistä.

Esim. Yritys tuottaa vuorokaudessa 1000 härveliä, joiden keskihinta on 50 €/kpl. Tuotannon määrän arvellaan kasvavan keskimäärin 5 % vuodessa, mutta hinnan taas laskevan 10 % vuosittain.

Jos nämä arviot toteutuisivat,

- määrää kuvaa funktio $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^+$, $f(x) = 1000\cdot1.05^x$,

- yksikköhintaa funktio $g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^+$, $g(x) = 50\cdot0.9^x$ ja

- tuotannon arvoa funktio $t:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^+$,

$$t(x) = f(x)\cdot g(x) = 1000\cdot1.05^x \cdot 50\cdot0.9^x = 50000 \cdot 1.05^x\cdot0.9^x$$

$$= 50000 \cdot (1.05\cdot0.9)^x \qquad \text{(sääntö 4.)}$$

$$= 50000\cdot0.945^x,$$

missä x = aika (v).

Esim. 1.5 vuoden kuluttua on tuotannon arvo olisi

$f(1.5) = 50000 \cdot 0.945^{1.5} \sim 45932$ €/vrk.

Sääntö 5. auttaa vastaavalla tavalla eksponentiaalisten muutosten yhdistämisessä.

Eksponenttifunktion hyvien ominaisuuksien (1. – 5.) avulla voidaan (mm. tilastollisen analyysin avulla laaditun) eksponentiaalisen mallin rakennetta yksinkertaistaa ja saada se ”luettavammaksi”:

Esim. Kapakalan kysyntää kuvaa funktio

$f: \mathbf{R}^{+} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$, $\mathbf{f(x) = 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72}}$,

missä x= hinta (€/kg) ja f(x) = kysyntä (t).

Kaikki tarpeellinen voidaan laskea

edellisestä f:n lausekkeestakin,
mutta muokkaamalla sitä edellisten
sääntöjen avulla saadaan

$f(x) = 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72} = 1400 \cdot 0.87^{1.21x} \cdot 0.87^{1.72}$ (1.)

$= 1400 \cdot (0.87^{1.21})^{x} \cdot 0.7870$ (3.)

$= 1102.8 \cdot 0.8449^{x}$

josta näkyy

Kysyntä olisi ~ 1100 t, ↑
jos hinta olisi 0 €

↖ Kysyntä pienenee ~ 15.5 %
kaikilla hintatasoilla (!),
kun hinta nousee 1 €/kg

Logaritmifunktio

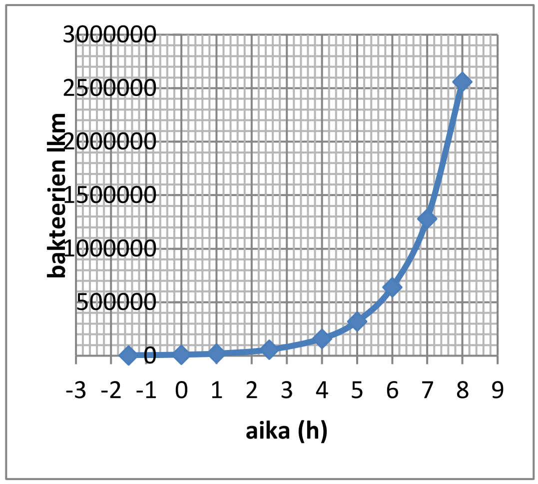
<u>Esim.</u> (jatkoa) Lääkkeen L valmistuksessa käytettävän bakteerikannan suuruutta kuvaava funktio

$f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+} \setminus \{0\}$, $f(x) = 10000 \cdot 2^{x}$, missä x = aika (h) ja f(x) = bakteerien määrä

antaa 1-käsitteisen arvion bakteerikannan koolle x tunnin kuluttua.

Toisin päin voidaan myös kysyä, kauanko kestää, että bakteereja on esimerkiksi 80000 (y) kpl?

aika	lkm
-1,5	3536
0	10000
1	20000
2,5	56569
4	160000
5	320000
6	640000
7	1280000
8	2560000



Siis mikä on x, kun

y = f(x) = 80000 $\Leftrightarrow$ $10000 \cdot 2^x = 80000$ $\Leftrightarrow$ $2^x = 8$?

Funktio g:**R**→**R**$^+$\{0}, g(x) = 2^x (=y)

on kasvava ja V_g = **R**$^+$\{0} (?), joten g on bijektio

ja sillä on **käänteisfunktio** g^{-1}: **R**$^+$\{0}→**R**,

josta saadaan vastaus esitettyyn kysymykseen.

Tätä funktiota sanotaan g^{-1} sanotaan **2-kantaiseksi logaritmifunktioksi**.

ja merkintänä käytetään

$g^{-1}(y) =$ **$\log_2 y$** (Luetaan: ”2-kantainen logaritmi y:stä”)

Erikoistapauksissa 2-kantaisen logaritmifunktion arvot voidaan lukea 2-kantaisen eksponenttifunktion arvojen taulukosta ”toisin päin”:

eksponenttifunktio →

x $(=\log_2 y)$ $g(x)=2^x = y$ Siis

← logaritmifunktio

-4	1/16	$\log_2 1/16 = -4$
-3	1/8	$\log_2 1/8 = -3$
-2	1/4	…
-1	1/2	
0	1	
1	2	
2	4	
3	8	$\log_2 8 = 3$

Alussa asetettiin kysymys, kuinka kauan kestää, että bakteereita on 80000 kpl? Vastaus tähän erikoistapaukseen on siis

$f(x) = 10000 \cdot 2^x = 80000 \Leftrightarrow g(x) = 2^x = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$ (h).

”Hankalammat” arvot saadaan (esim.) Excelistä tai laskimista.

Logaritmifunktion **yleinen määrittely** on vastaava kuin esimerkissä:

a-kantainen eksponenttifunktio $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$, $y = f(x) = a^x$ on **bijektio j**a sillä on **käänteisfunktio** $f^{-1}: \mathbf{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$.

$$\begin{tikzcd} x = f^{-1}(y) = \log_a y \arrow[r, bend left, "f"] & y = f(x) = a^x \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Tätä funktiota sanotaan **a-kantaiseksi logaritmifunktioksi** ja merkintänä käytetään

$f^{-1}(y) = \log_a y$, joka luetaan ”a-kantainen logaritmi y:stä”.

Käytännössä laskimista saadaan

- **10-kantaisen** (Briggsin)

- ja **luonnollisen** eli e-kantaisen (Neperin luku) logaritmifunktion arvot.

Kaikki a-kantaiseen log-funktioon liittyvät laskut voidaan ”palauttaa” näihin helposti.

10-kantainen logaritmifunktio

on eksponenttifunktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$, $y = \mathbf{f(x)=10^x}$

käänteisfunktio $f^{-1}: \mathbf{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $x = \mathbf{f^{-1}(y)=\log_{10} y}$.

Yleensä merkintä lyhennetään $\log_{10} y$ = **lg y** tai log y.

Siis esimerkiksi

lg 0.001 (= $\lg 10^{-3}$) = -3 (, koska $10^{-3} = 0.001$)

lg 0.5 $\sim$ -0.301 (, koska $10^{-0.301} \sim 0.5$)

lg 1 = 0 (, koska $10^{0} = 1$) jne.

Luonnollinen logaritmifunktio

on eksponenttifunktion $f{:}\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+}\backslash\{0\}$, $y=\mathbf{f(x)= e^{x}}$

käänteisfunktio f^{-1}: $\mathbf{R}^{+}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $x=\mathbf{f^{-1}(y)=\log_{e} y}$.

Yleensä merkintä lyhennetään $\log_{e} y$ = **ln y**

Esimerkiksi

ln 0.5 $\sim$ - 0.693 (, koska $e^{-0.693} \sim 0.5$)

ln 1 = 0 (, koska $e^{0} = 1$) jne.

Logaritmifunktion ominaisuudet

seuraavat sen ”parin”, saman kantaisen eksponenttifunktion, ominaisuuksista:

Edellisissä esimerkeissä jo nähtiin joitain a-kantaisen logaritmifunktion

f:$\mathbf{R}^+\setminus\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x)=\log_a x$ yleisiä ominaisuuksia:

1) $f(1) = \mathbf{\log_a 1 = 0}$, koska …

2) $f(a) = \mathbf{\log_a a = 1}$, koska …

3) $f(a^x) = \mathbf{\log_a a^x = x}$, koska …

Logaritmifunktion käsitteen kehittämisen (jo 1600-luvulla) tärkeä syy oli pyrkimys hankalien kerto- ja jakolaskujen helpottamiseen.

Laskinten ansiosta tämä syy on väistynyt, mutta tätä varten selvitetyt logaritmifunktion ominaisuudet ovat edelleen tärkeitä funktioiden käsittelyssä:

kertolasku ↓ | yhteenlasku ↓

4) $\boldsymbol{\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y}$ (x ja y >0)

Voidaan myös osoittaa, että ”jakolasku muuttuu vähennyslaskuksi” ja ”potenssiin korottaminen eksponentilla kertomiseksi”:

5) $\boldsymbol{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

6) $\boldsymbol{\log_a x^d = d \log_a x}$.

Logaritmimuunnoksen avulla voidaan usein **linearisoida** havaintoaineisto.

Tämä helpottaa paljon tilastollista käsittelyä, jolla malli kytketään havaintoaineistoon.

Myös **eksponenttiyhtälöiden** ratkaiseminen perustuu logaritmifunktion linearisointiominaisuuksiin:

Esim. (jatkoa) Lääkkeen L valmistuksessa käytettävän bakteerikannan suuruutta kuvaava funktio

f:**R**→**R**⁺\{0}, $f(x) = 10000 \cdot 2^x$,

missä x = aika (h) ja f(x) = bakteerien määrä.

Kuinka kauan kestää, että määrä on 50000?

$$f(x) = 50000 \quad \Leftrightarrow \quad 10000 \cdot 2^x = 50000 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln 2^x = \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln 2 = \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \sim \frac{1.60944}{0.69315} \sim 2.3 \text{ h.}$$

Tästä nähdään myös sääntö, jonka avulla voidaan ”siirtyä” logaritmifunktiosta toiseen:

- Edellä saatiin yhtälö $2^x = 5$, josta saatiin säännön 6) avulla $x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

- Toisaalta x on 2-kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktion arvona

$x = \log_2 5$.

Siis $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \sim \frac{1.60944}{0.69315} \sim 2.3$ h.

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että a-kantaisen logaritmifunktion arvot voidaan laskea b-kantaisen logaritmifunktion avulla säännöllä

7) $\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$

Edellisessä sama tulos saadaan myös 10-kantaisella logaritmifunktiolla:

$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \sim \frac{0.69897}{0.30103} \sim 2.3$ h.

Kun muuttujien x ja y välistä yhteys mallinnetaan eksponenttifunktion avulla, käänteisfunktio saadaan logaritmifunktion avulla:

Esim. Kapakalan kysyntää kuvaa funktio

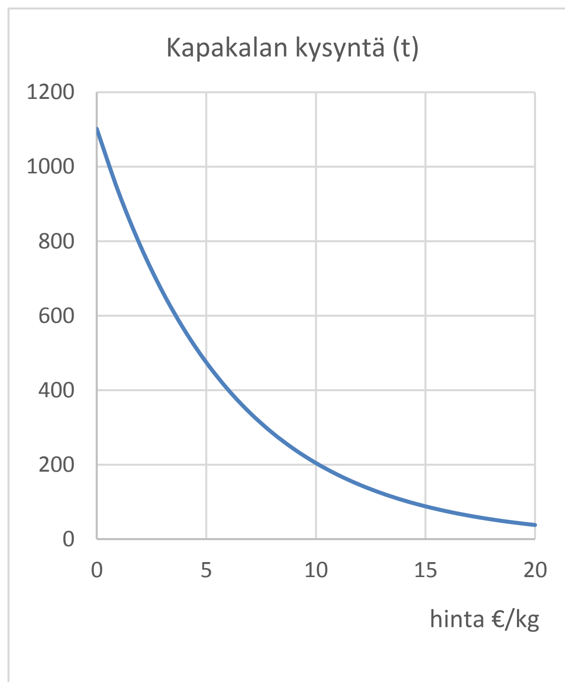
$f:\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72}$,

missä x= hinta (€/kg) ja y =f(x) = kysyntä (t).

Tuottajat ovat tehneet kartellin.

Heillä on yhteensä 300 t kapakalaa ja he haluavat myydä **koko määrän parhaalla** mahdollisella **hinnalla**. Kuinka suuri tämä hinta on?

On ratkaistava:



Mikä on hinta x, kun f(x) = y = 300?

Siis ratkaisu saadaan

käänteisfunktion avulla:

Kun $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \; y = 1400 \cdot 0.87^{1.21x + 1.72}$

$\Leftrightarrow$ $\ln y = \ln(1400 \cdot 0.87^{1.21x + 1.72})$

$= \ln 1400 + (1.21x + 1.72) \cdot \ln 0.87$

$= \ln 1400 + 1.21 \ln 0.87 \cdot \mathbf{x} + 1.72 \ln 0.87$

$= 7.24423 - 0.16851x - 0.23953$

$= -0.16851x + 7.0047$, niin

$$x = \frac{\ln y - 7.00470}{-0.16851} \sim -5.934 \ln y + 41.568$$

ja käänteisfunktio on

$f^{-1}: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f^{-1}(y) = -5.934 \ln y + 41.568$,

missä y = kysyntä (t) ja $x = f^{-1}(y)$ = hinta (€/kg).

Paras hinta, jolla varastosta päästään eroon, on silloin

$x = f^{-1}(300) = -5.934 \ln 300 + 41.568 = 7.72$ €.

Lasku lyhenee vähän, jos f:n lauseketta muokataan kuten aikaisemmin.