Lause Olkoon $z = f(x, y)$ $x = u(s,t)$ , $y = v(s,t)$ .

Olet.
(i) $u(a,b) = p$ $v(a,b) = q$
(ii) $u$:lla & $v$:llä on osittais derivaatat pisteessä $(a,b)$
(iii) $f$ on differentioituva

Tällöin $z = w(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$ :llä on osittaisderivaatat $s$:n ja $t$:n suhteen pisteessä $(a,b)$

ja $w_1(a,b) = f_1(p,q)\, u_1(a,b) + f_2(p,q)\, v_1(a,b)$

eli $$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

(Vastaavasti: $w_2(a,b)$ ja $\frac{\partial z}{\partial t}$ )

Todistus

Määritellään $E$ s.e. $E(0,0) = 0$ ja jos $(h,k) \neq (0,0)$

niin $$E(h,k) = \frac{f(p+h, q+k) - f(p,q) - h f_1(p,q) - k f_2(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

(Differentioituvuuden nojalla $E$ on jatkuva origossa.)

Ratkaistaan muutos:

$$f(p+h, q+k) - f(p,q) = h f_1(p,q) + k f_2(p,q) + \sqrt{h^2+k^2}\, E(h,k)$$

Sij. $h = u(a+\sigma, b) - u(a,b)$ , $k = v(a+\sigma, b) - v(a,b)$

ja jaa $\sigma$:lla:

$$\frac{w(a+\sigma, b) - w(a,b)}{\sigma} = \frac{f(u(a+\sigma,b), v(a+\sigma,b)) - f(u(a,b), v(a,b))}{\sigma}$$

$$= \frac{f(p+h, q+k) - f(p,q)}{\sigma} = f_1(p,q)\frac{h}{\sigma} + f_2(p,q)\frac{k}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}\, E(h,k)$$

$$\lim_{\sigma \to 0} (\cdot) = ?$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{h}{\sigma} = \lim_{\sigma \to 0} \frac{u(a+\sigma, b) - u(a,b)}{\sigma} = u_1(a,b)$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{k}{\sigma} = \qquad = v_1(a,b)$$

Jos $\sigma \to 0$, niin $(h,k) \to (0,0)$ eli lopulta

$$w_1(a,b) = f_1(p,q)\, u_1(a,b) + f_2(a,b)\, v_1(a,b)$$

$\square$