Luku 10&11 Pyörimisliike

Kulmanopeus ja -kiihtyvyys
Momentti
Pyörimisen hitaus
Pyörimisenergia
Vieriminen
Pyörimismäärä

Tavoitteet:

- Määritellä kulmanopeus ja –kiihtyvyys vektoreina
- Määritellä momentti
- Käyttää vektorituloa fysiikan laskuissa
- Määrittää pyörimiseen liittyvä energia ja selvittää sen riippuvuus momentista ja työstä
- Ratkaista tehtäviä, jossa on sekä etenevää että pyörivää liikettä
- Ratkaista tehtäviä, jossa on vierimisliikettä
- Määritellä pyörimismäärä

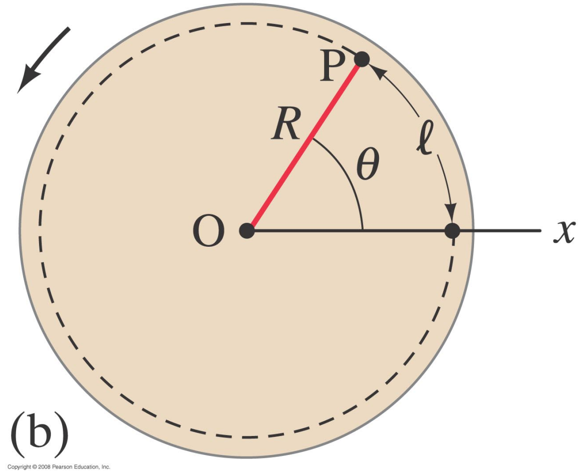
Esitiedot

- Newtonin II laki
- Työ ja liike-energia

10.1–3 Kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys

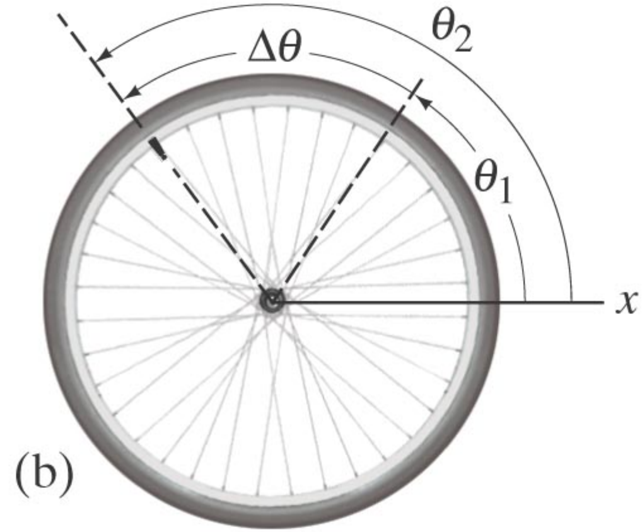
Kulma

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$



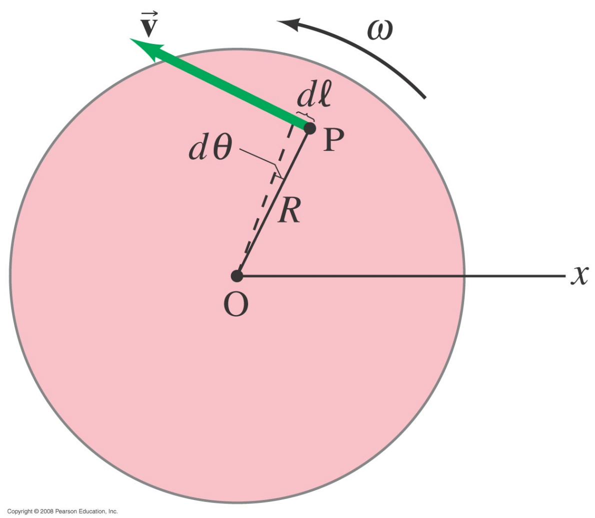
Keskimääräinen kulmanopeus

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



Kulmanopeus

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



Ratanopeus

$$v = R\omega$$

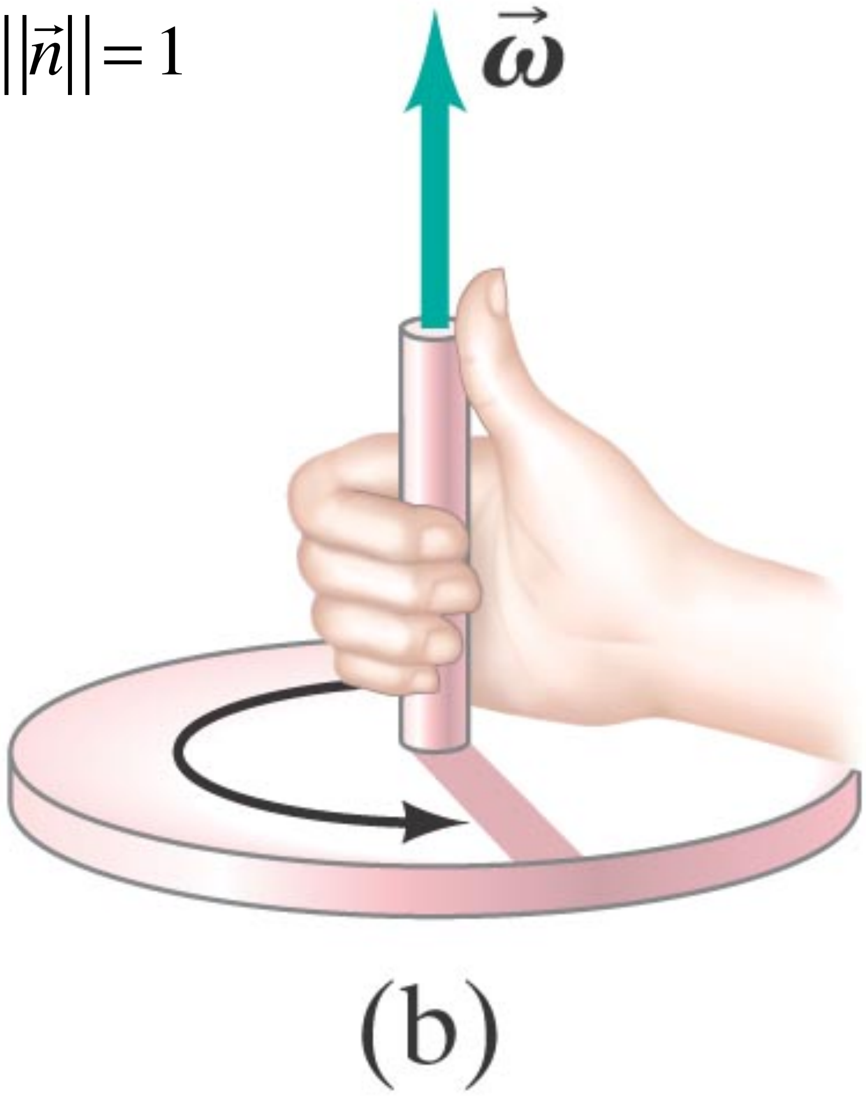
Kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys

Kulmanopeus on vektori

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}$$

$$\|\vec{n}\| = 1$$

$\vec{n}$ on yksikkövektori



Ratanopeus

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

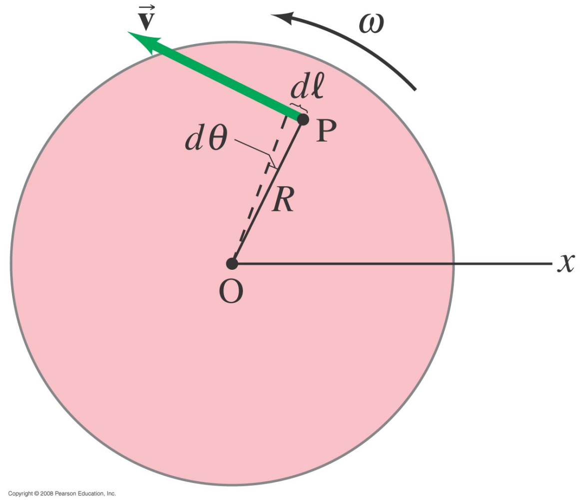
Kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys

Keskimääräinen kulmakiihtyvyys $\bar{\alpha} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Kulmakiihtyvyys $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

Kulmakiihtyvyys on vektori $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

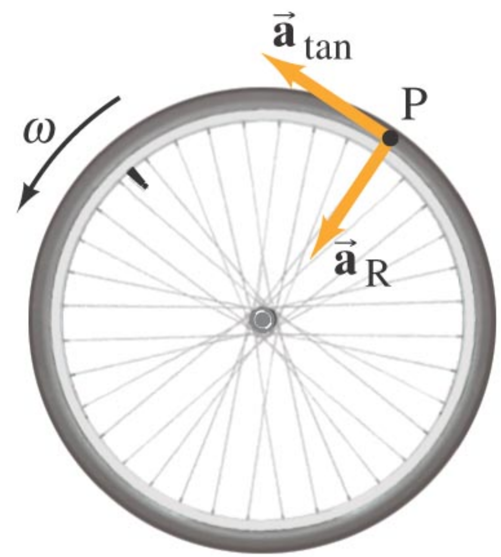
tangentiaalinen kiihtyvyys $a_{\tan} = R\alpha$



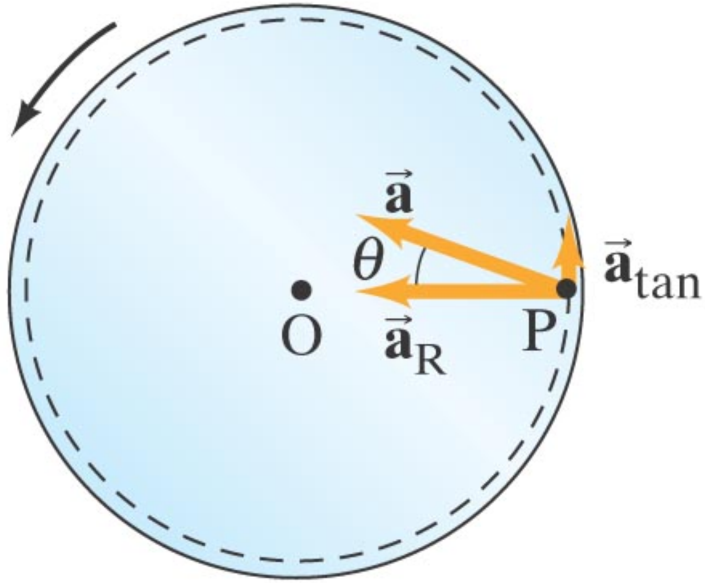
Kiihtyvässä pyörimisliikkeessä kiihtyvyys voidaan jakaa kahteen komponenttiin

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{a}_{\tan}$$

$$a_R = \omega^2 R$$



Esimerkki 10.3



Karuselli, jonka säde $R = 5$ m, on aluksi paikallaan. Aikavälillä (0 s, 8 s) sille aiheutetaan vakiona pysyvä kulmakiihtyvyys 0,06 rad/s^2. Määritä ajan hetkellä $t = 8$ s seuraavat suureet:

a) kulmanopeus
b) karusellin kehällä istuvan lapsen ratanopeus
c) lapsen tangenttikiihtyvyys
d) lapsen normaalikiihtyvyys
e) lapsen kokonaiskiihtyvyys

Esimerkkien ratkaisut löytyvät kurssin oppikirjasta

Analogiaa

Suoraviivainen liike

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int dx = \int v\,dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\int dv = \int a\,dt$$

Pyörimisliike

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}$$

$$\int d\theta = \int \omega\,dt$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\int d\omega = \int \alpha\,dt$$

Jos kiihtyvyys tai kulmakiihtyvyys on vakio

$$v = v_o + at$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$x = x_o + v_o t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

10.4 Momentti

Momentin itseisarvo akselin O suhteen voidaan määrittää kahdella tavalla

$$\tau = F_{\perp} r$$

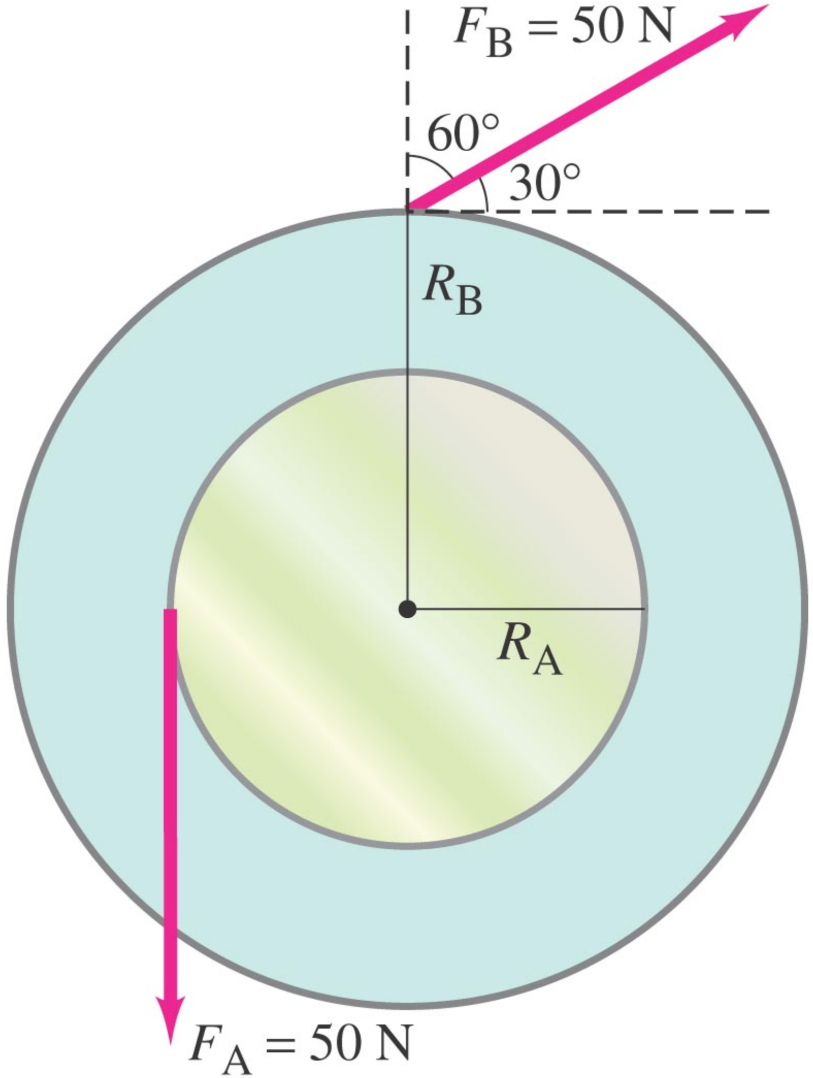
$$\tau = F r_{\perp}$$

Momenttia varten täytyy ilmoittaa akseli ja pyörimissuunta.

(b)

Esimerkki 10.7

Kaksi kiekkoa on kiinnitetty toisiinsa ja yhteiseen akseliin.
Määritä kuvassa esitettyjen voimien aiheuttama momentti akselilla, kun
$R_A = 30$ cm, $R_B = 50$ cm



Esimerkkien ratkaisut löytyvät kurssin oppikirjasta

10.4 Momentti

Momentin itseisarvo akselin O suhteen voidaan määrittää kahdella tavalla

$$\tau = F_{\perp} r$$

$$\tau = F r_{\perp}$$

Momenttia varten täytyy ilmoittaa akseli ja pyörimissuunta.

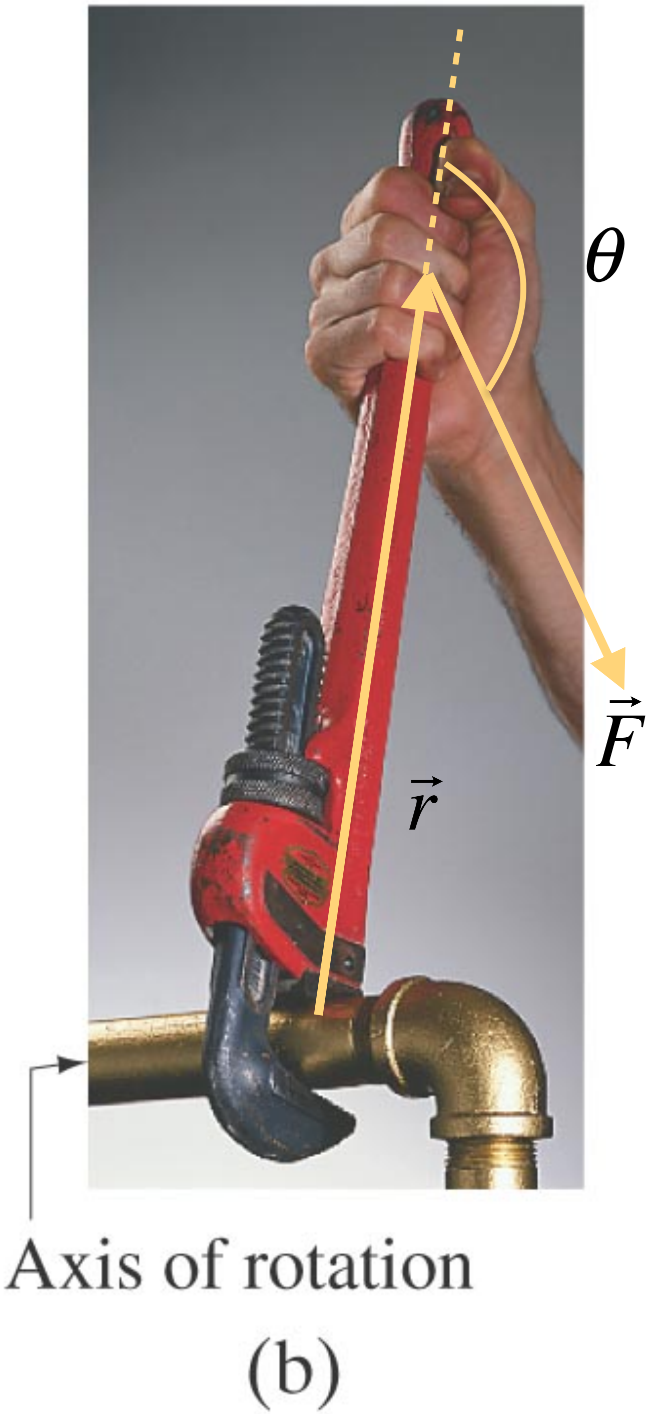
$$\tau = rF\sin\theta$$

Momenttivektorin määrittää paikkavektori ja voimavektori.

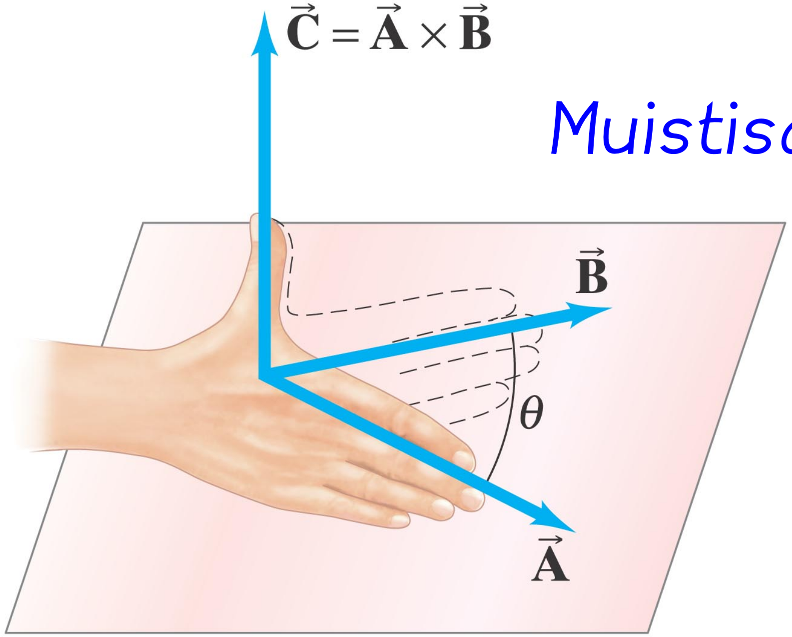
Paikkavektori määrittää voiman vaikutuspisteen suhteessa akseliin.

Voima ja paikkavektori määrittävät tason, ja momentti kohtisuorassa tätä tasoa vastaan.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Vektoritulo

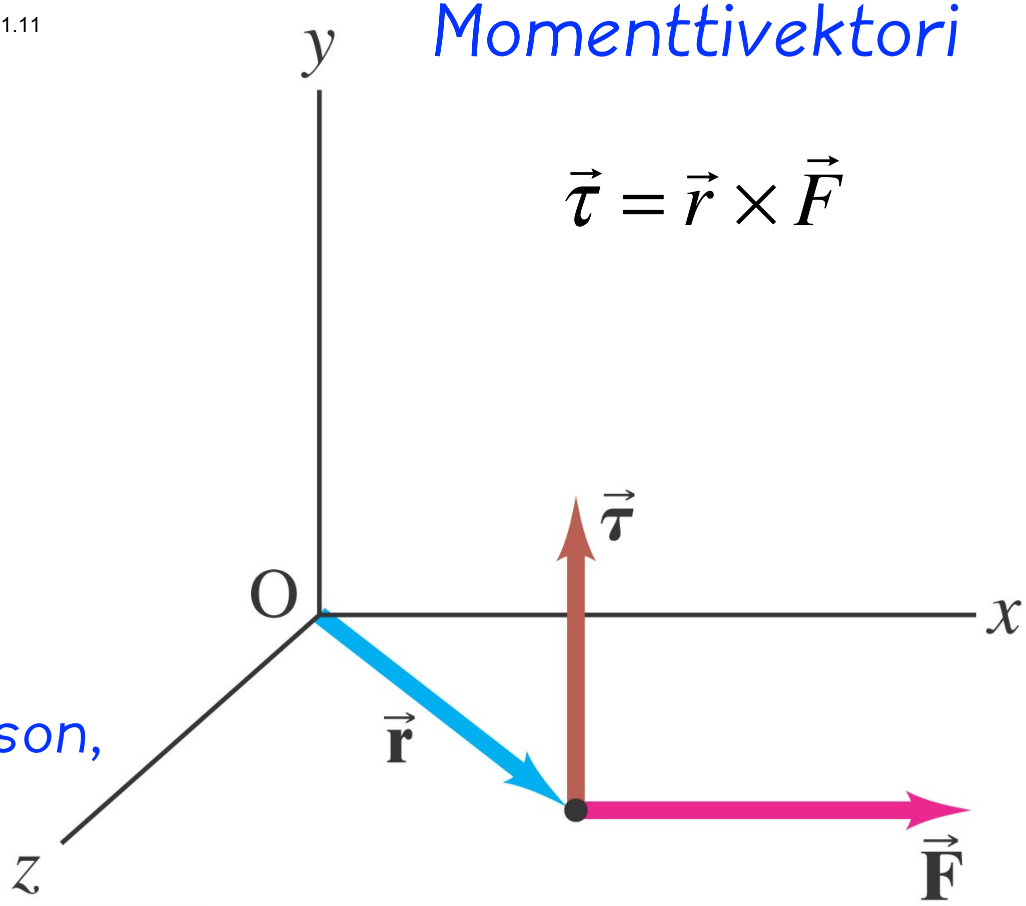


Muistisääntö

Figure 11.11

Momenttivektori

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



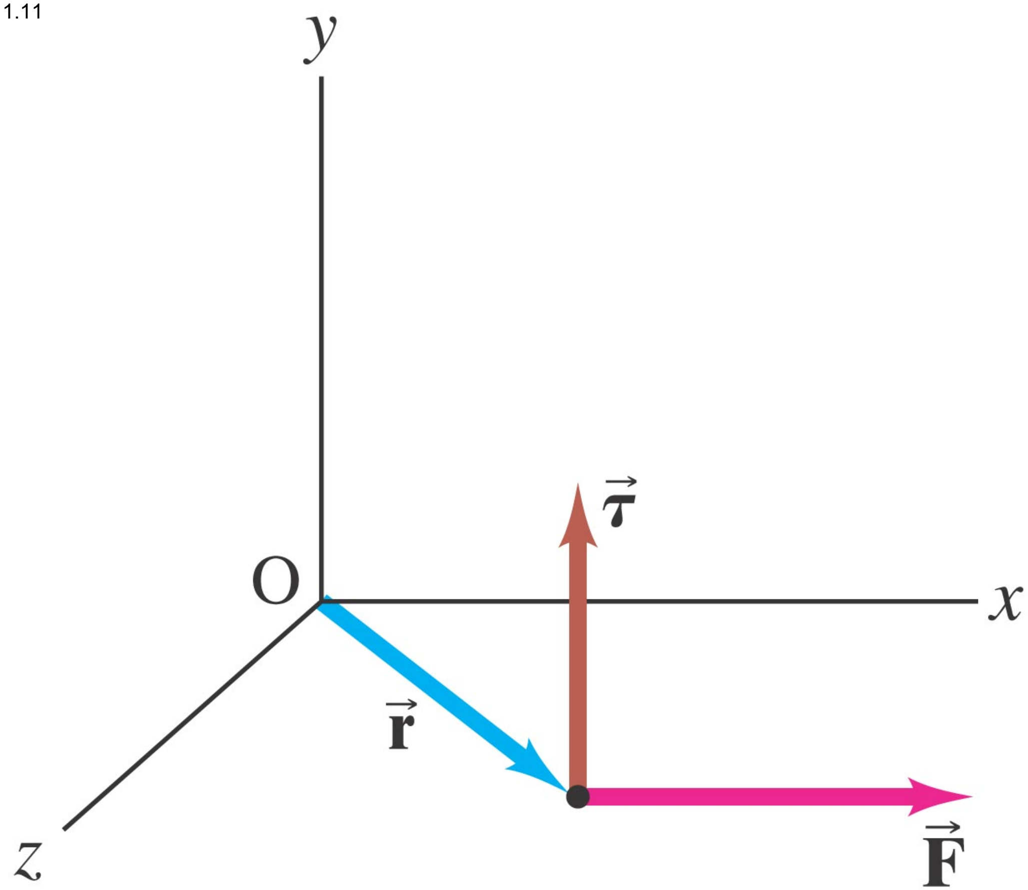
Momenttivektorin määrittää paikkavektori ja voimavektori.

Paikkavektori määrittää voiman vaikutuspisteen suhteessa akseliin. Voima ja paikkavektori määrittävät tason, ja momentti kohtisuorassa tätä tasoa vastaan.

Esimerkki 11.6

Vektori $\vec{r} = 1{,}2\ \mathrm{m}\hat{i} + 1{,}2\ \mathrm{m}\hat{k}$
on xz -tasossa. Määritä voiman $\vec{F} = 150\ \mathrm{N}\hat{i}$
aiheuttama momentti.

Figure 11.11



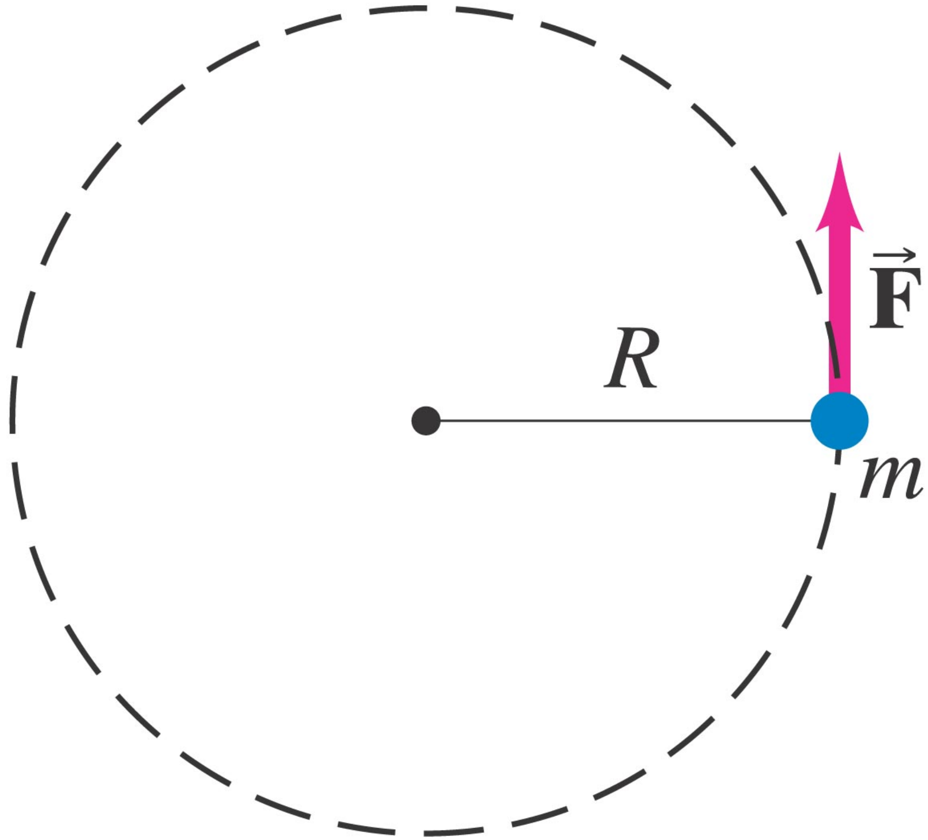
10.5 Pyörimisen hitaus

Pyörimisen liikeyhtälö $$\sum \tau = I\alpha$$

missä τ on voiman F momentti ja I systeemin hitausmomentti pyörimisen akselin suhteen

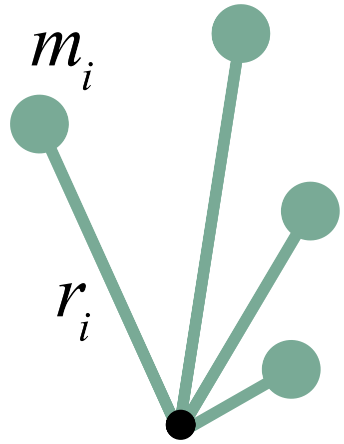
Vektoreilla

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$



Hitausmomentti

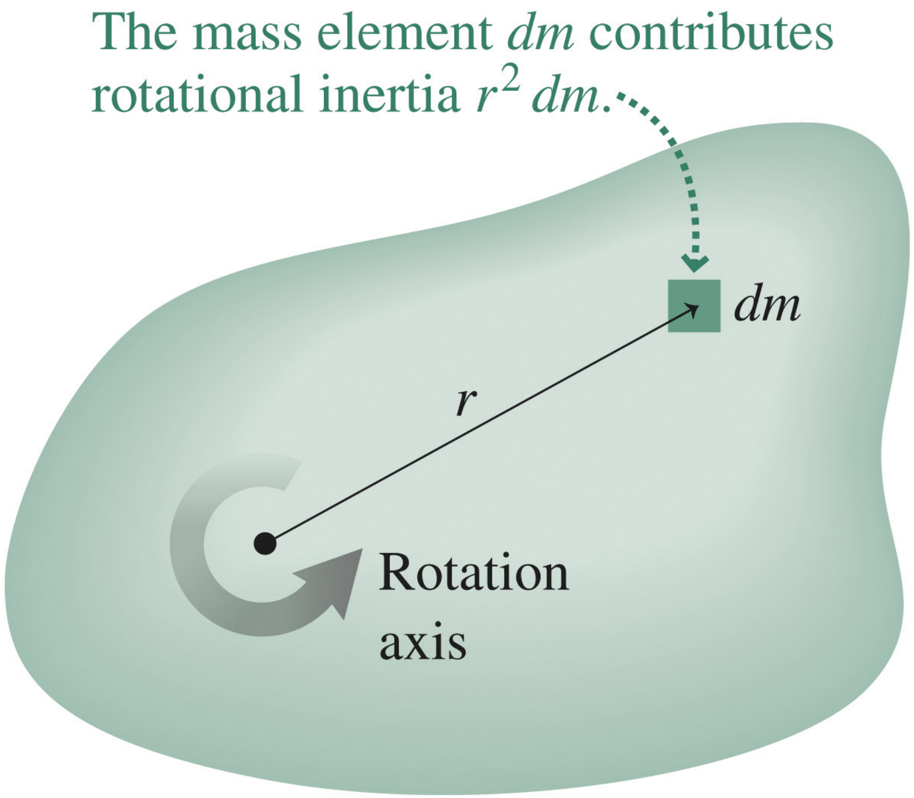
Systeemin hitausmomentti $I = \sum m_i R_i^2$



Laskettava aina saman akselin suhteen!

Jatkuvalle kappaleelle

$$I = \int R^2 \, dm$$



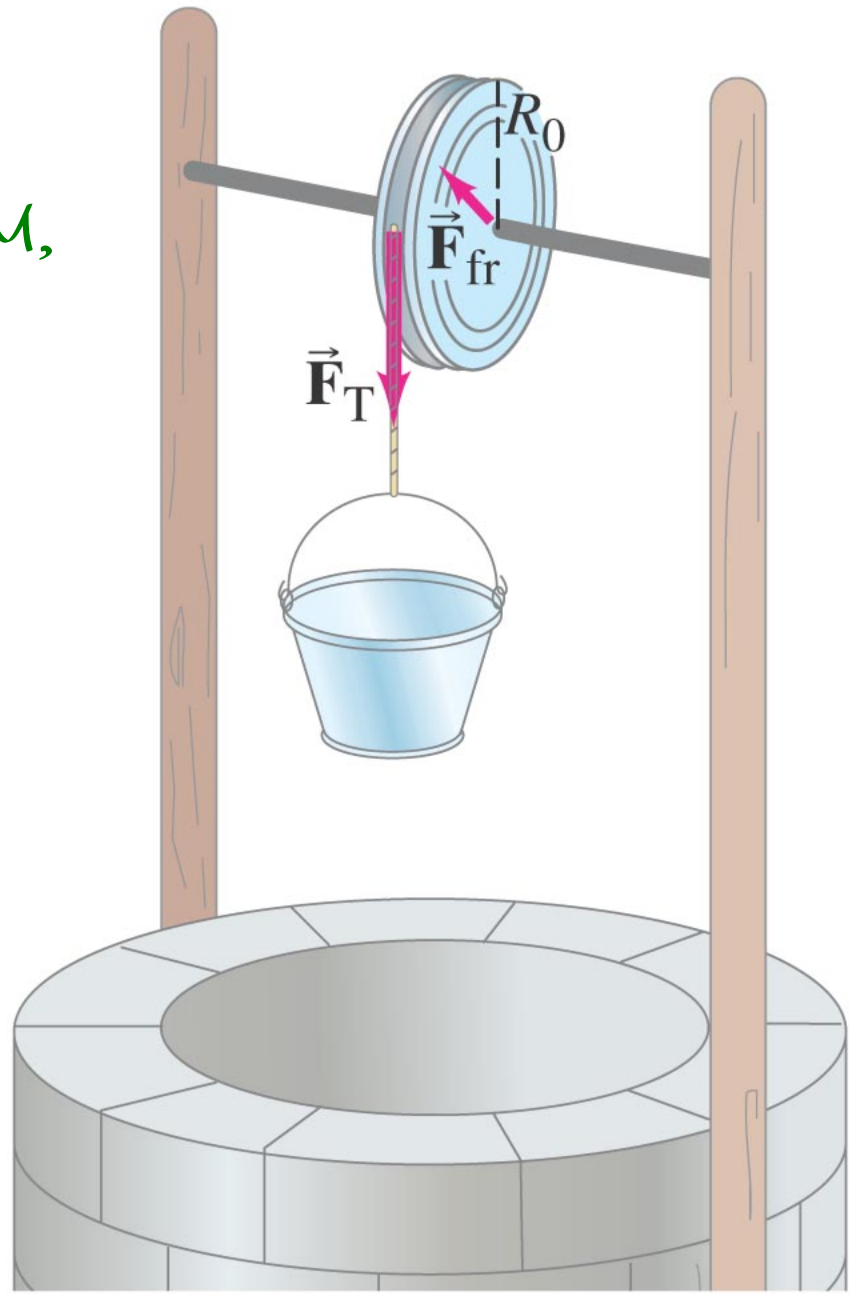
Esimerkki 10.9

Pihakaivon ämpäristä (massa m) lähtevä massaton ja venymätön köysi on kierretty painavan kiekon (massa M, säde R) ympärille. Kiekko pääsee pyörimään akselinsa ympäri, mutta pyöärimistä rajoittaa akselin ja kiekon välinen kitka, joka aiheuttaa kitkamomentin τ_{fr}. Määritä ämpärin

a) kiihtyvyys, kun se päästetään putoamaan tyhjänä kaivoon.

b) nopeus hetkellä t.

Lukuarvoja $m = 1{,}53$ kg, $M = 4{,}0$ kg, $R = 33$ cm, $t = 3{,}0$ s, $\tau_{fr} = 1{,}1$ Nm.



(a)

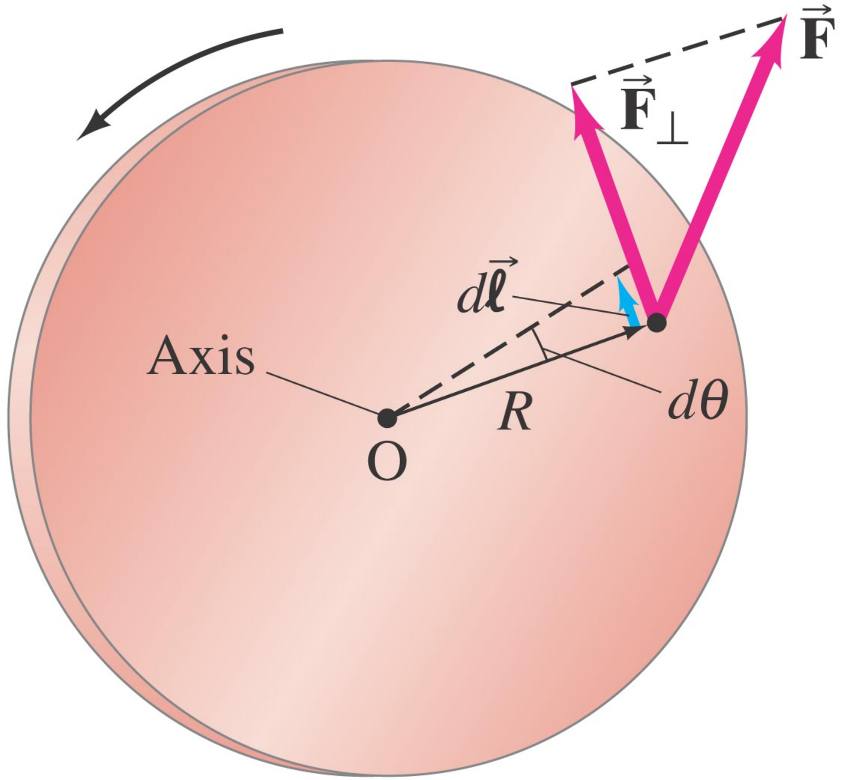
10.8 Pyörimisenergia

Pyörimisliikkeessä liike-energia on

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

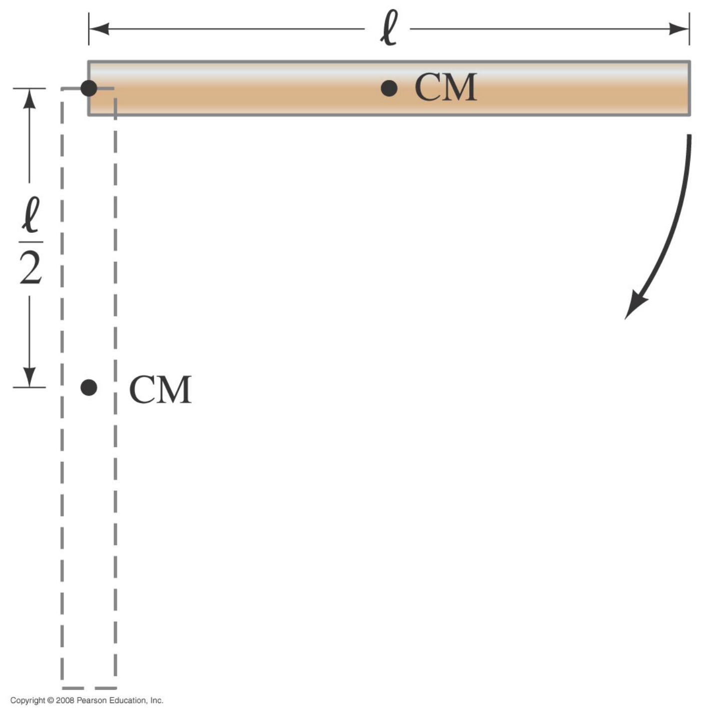
Pyörimisliikkeen työperiaate: Pyörimisenergian muutos on yhtä suuri kuin momentin kappaleeseen tekemä työ

$$W = \Delta K$$



Esimerkki 10.15

Tanko on saranoitu toisesta päästään ja pääsee heilahtamaan kitkatta. Tanko on aluksi vaakasuorassa ja päästetään siitä heilahtamaan. Määritä tangon vapaan pään nopeus tangon ollessa pystysuorassa.



10.9 Vieriminen

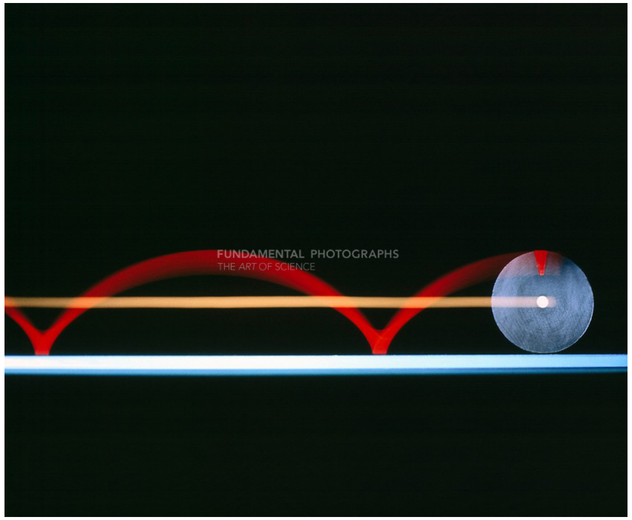
Vierimisen ehto

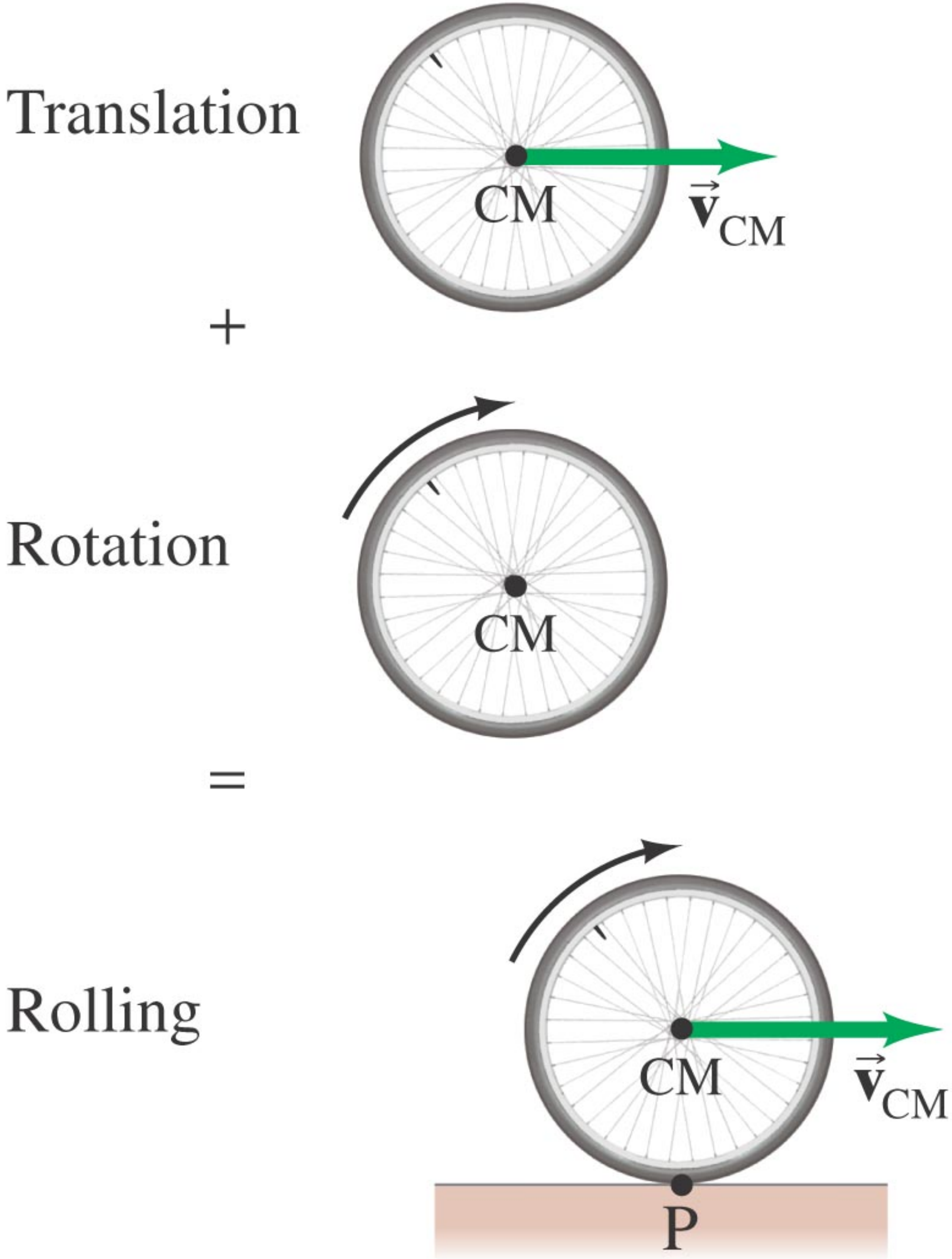
$$v = R\omega$$

Liike-energia

$$K = K_{CM} + K_{rot}$$

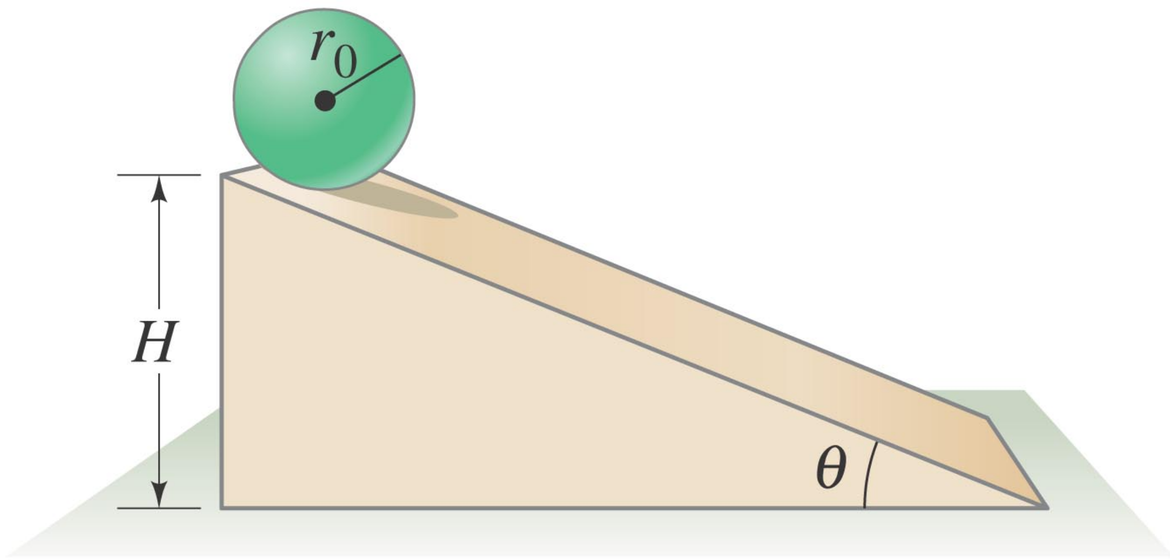
$$K = \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$





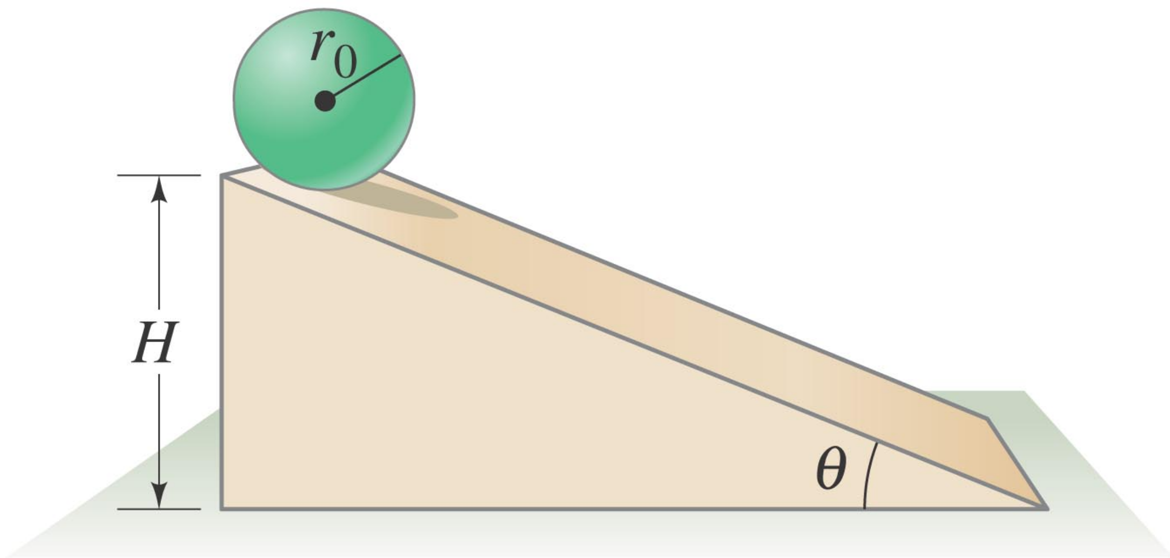
Esimerkki 10.16

Umpinainen pallo päästetään vierimään liukumatta pitkin kaltevaa tasoa. Määritä pallon nopeus, kun se saapuu tasaiselle.



Esimerkki 10.18

Umpinainen pallo päästetään vierimään liukumatta pitkin kaltevaa tasoa. Määritä pallon kiihtyvyys sen vieriessä tasoa alas. Mitä voit sanoa kitkasta pallon ja tason välillä?



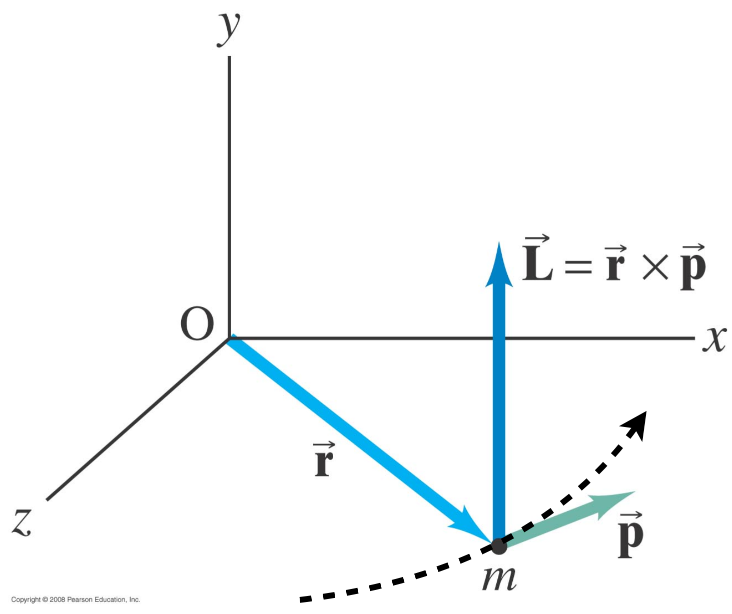
11.1–3 Pyörimismäärä

Pyörimismäärä (liikemäärämomentti, kulmaliikemäärä) määritellään paikkavektorin ja liikemäärän avulla

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

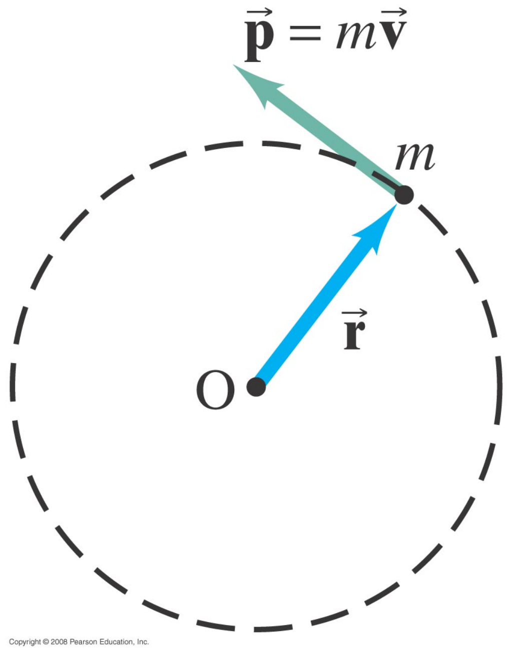
Newtonin II laista seuraa

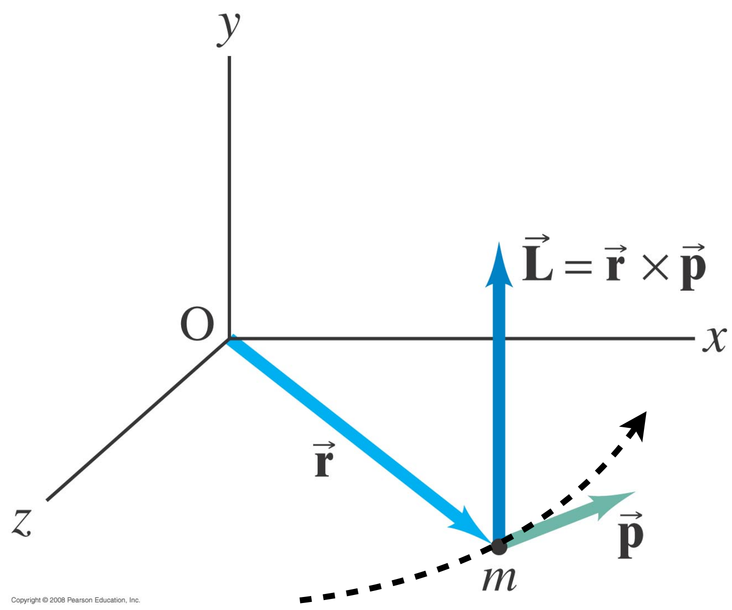
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Esimerkki 11.7

Määritä pistemäisen hiukkasen pyörimismäärä, kun se kiertää vastapäivään kiinteää pistettä.





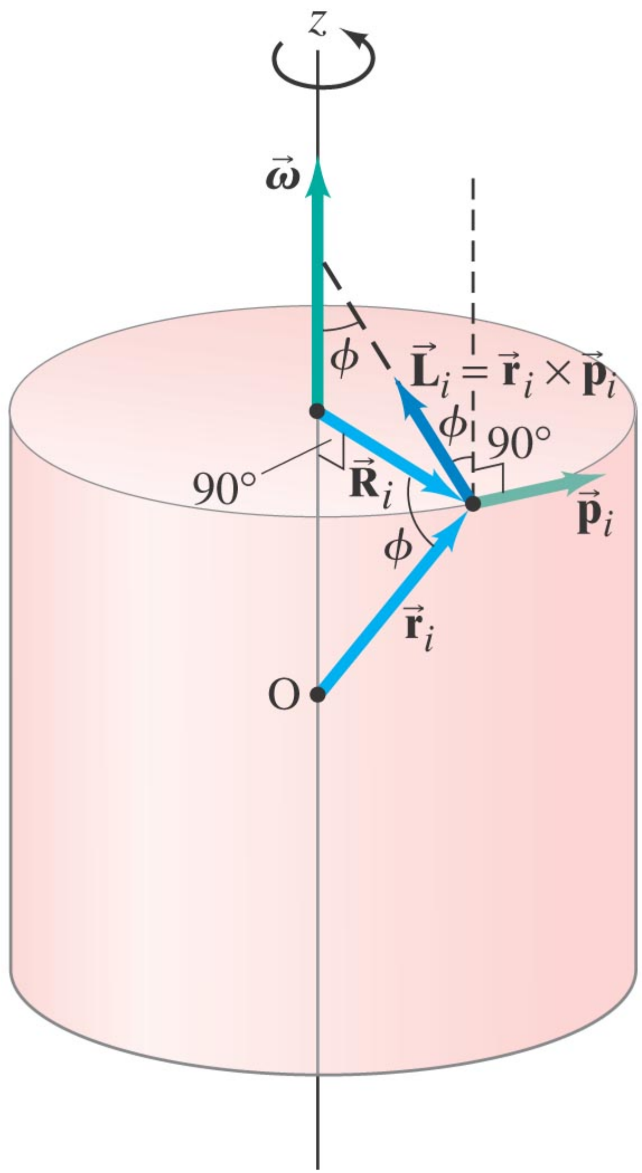
11.1-5 Pyörimismäärä kiinteälle kappaleelle

Pyörimismäärä kappaleelle

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

ja edelleen pätee

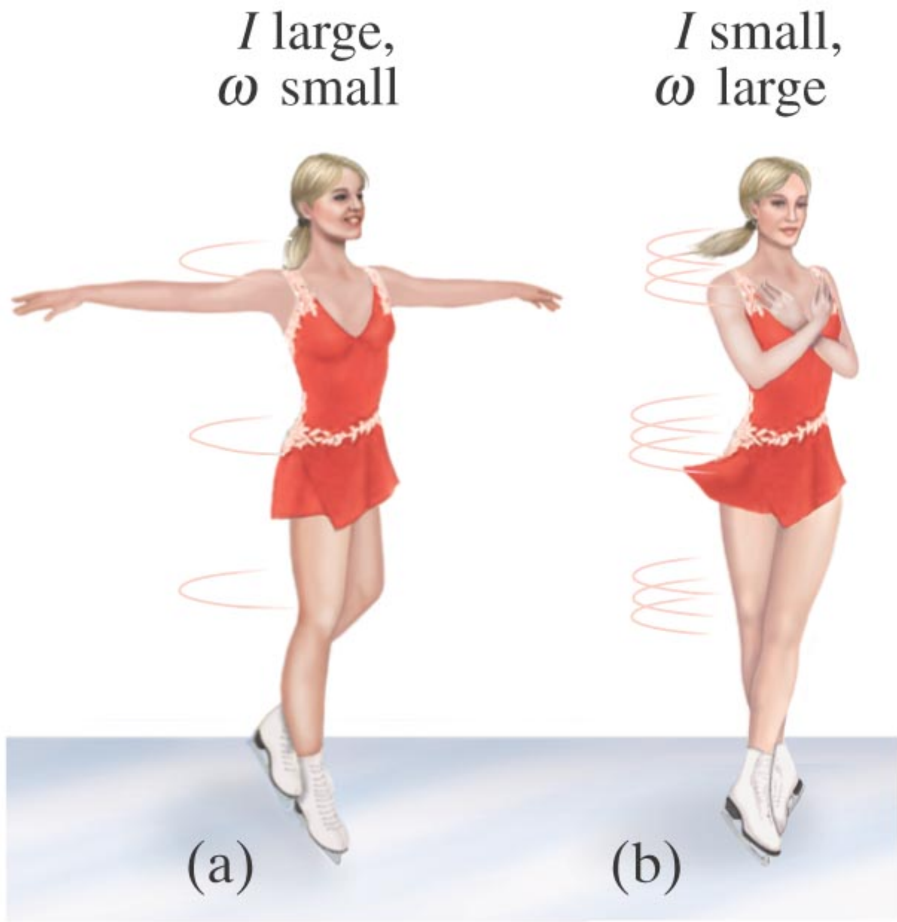
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



11.1-6 Pyörimismäärän säilyminen

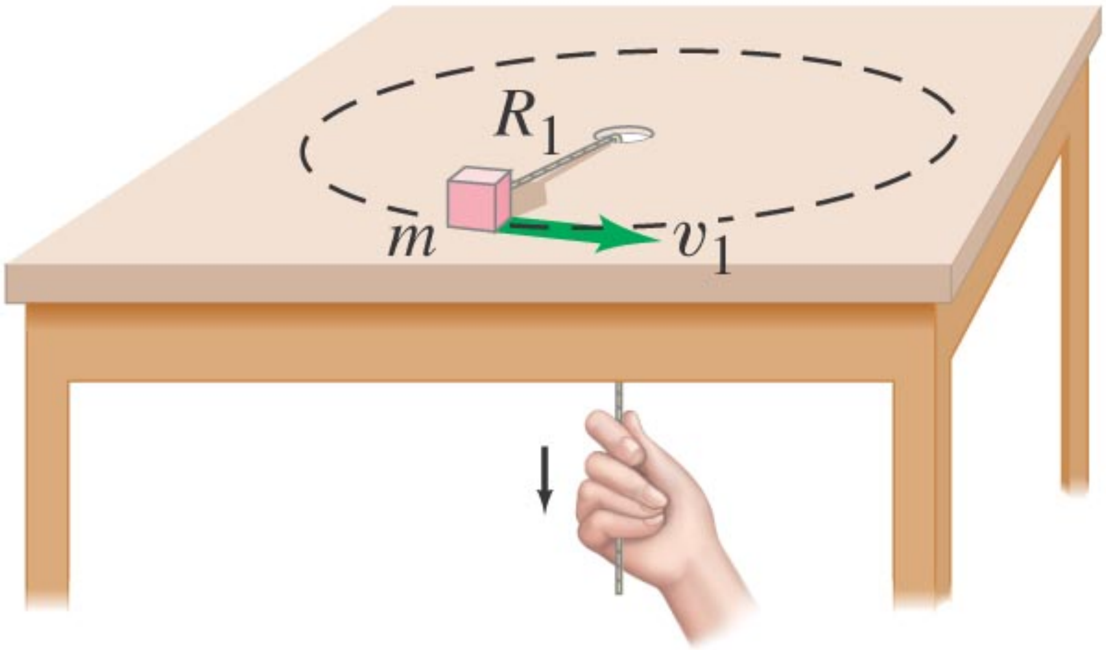
Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia momentteja, sen pyörimismäärä säilyy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



Esimerkki 11.1

Pieni kappale on kiinnitetty narun, joka kulkee pöydässä olevan reiän läpi. Kappale kiertää aluksi rataa, jonka säde on $R_1 = 0{,}8$ m. Narua vedetään hitaasti ja kappaleen kulkeman radan säde pienenee arvoon $R_2 = 0{,}48$ m. Määritä kappaleen vauhti. Pöydän ja kappaleen välillä ei ole kitkaa.



Esimerkki 11.3

Neutronitähtien oletetaan syntyneen supernovassa suuren tähden ytimen romahtaessa kasaan oman painovoimansa vaikutuksesta. Tarkastellaan tähteä, jonka ytimen säde ennen romahtamista on yhtä suuri kuin Auringolla ($r = 7 \cdot 10^5$ km), jonka massa kahden Auringon suuruinen ja joka pyörii kerran sadassa vuorokaudessa akselinsa ympäri. Tähti romahtaa neutronitähdeksi, jonka säde on 10 km. Määritä neutronitähden pyörimisnopeus.