MS-A0201
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
Luento 9: Tasointegraali
Epäoleelliset integraalit

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

Kevät 2019

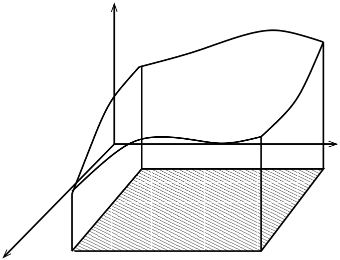
[1] Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Tasointegraali

- Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ joukko tasossa ja $f\colon D \to \mathbb{R}$ skalaarikenttä. Halutaan määritellä *tasointegraali*

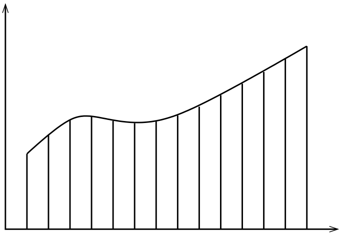
$$\iint_D f(x,y)\, dA.$$

- Integraalin arvo on pinnan $z = f(x,y)$ ja xy-tason väliin jäävän alueen tilavuus.
- Tutkitaan aluksi erikoistapausta $D = [a,b] \times [c,d]$:



Yhden muuttujan tapaus

- Yhden muuttujan tapauksessa integraali saadaan *Riemannin summien* raja-arvona



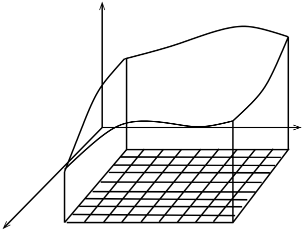
- Formaalisti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

missä $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ on välin $[a, b]$ tasavälinen jako ja Δx on jakovälin pituus.

Usean muuttujan tapaus (tasointegraali, $\mathbb{R}^2$)

- Jaetaan tason osajoukko $D = [a, b] \times [c, d]$ tasavälisesti ruudukoksi niin, että kummallakin akselilla on n jakopistettä:



- Nyt voidaan määritellä

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta x \Delta y,$$

missä Δx ja Δy vastaavat jakovälien pituutta x ja y-suunnassa:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$

Usean muuttujan tapaus (avaruusintegraali $\mathbb{R}^3$)

- Tason tapauksessa edellä määriteltyä integraalia kutsutaan *tasointegraaliksi*.
- Samaan tapaan voidaan määritellä *avaruusintegraali*:

$$\iiint_D f(x,y,y)\,dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i,y_j,z_k)\,\Delta x \Delta y \Delta z,$$

kun $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3] \subset \mathbb{R}^2$ ja $f\colon D \to \mathbb{R}$. Tässä

$$\Delta x = \frac{b_1 - a_1}{n}, \quad \Delta y = \frac{b_2 - a_2}{n} \text{ ja } \Delta z = \frac{b_3 - a_3}{n}.$$

- Vieläkin useamman muuttujan funktioita $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, missä $n \geq 2$, voi integroida samaan tapaan.

Huomautuksia

- Yhden muuttajan tapauksessa integraaleille pätee *Analyysin peruslause*:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)\, dt, \text{ kun } c, x \in [a, b]$$

  ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio.
- Analyysin peruslauseesta seuraa, että integrointi ja derivointi ovat toistensa vastaoperaatiota, mikä johtaa moniin integroinnissa hyödyllisiin kaavoihin.
- Valitettavasti Analyysin peruslauseelle ei ole yksikäsitteistä, selkeää vastinetta usean muuttujan tapauksessa.

Moninkertainen integraali

- Monen muuttujan integraaleja voidaan usein kuitenkin laskea moninkertaisina integraaleina.
- Kaksiulotteinen tapaus (integrointialue suorakaide)

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy, \text{ kun } D = [a,b] \times [c,d].$$

- Kolmiulotteinen tapaus (integrointialue suorakulmainen särmiö)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

kun $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

- Mikäli funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ on jatkuva, niin integroimisjärjestyksellä ei ole väliä integraalin arvon kannalta. Laskujen helppouden kannalta väliä kuitenkin on.

Esimerkki 4

Olkoon $f(x,y) = xy^2$. Lasketaan

$$\iint_D f(x,y)\,dA, \text{ missä } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}.$$

Aluksi kirjoitetaan tasointegraali kaksinkertaisena integraalina, ja lasketaan

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^1 \int_0^1 xy^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=0}^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\,dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^1 = \frac{1}{6}.$$

Esimerkki 5

Olkoon $f(x, y, z) = xye^z$. Lasketaan

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV, \text{ missä } D = [0, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1].$$

Kirjoitetaan avaruusintegraali kolminkertaisena integraalina. Lasketaan

$$\iiint_D xye^z\, dV = \int_{-1}^{1} \int_0^1 \int_0^2 xye^z\, dx\, dy\, dz$$

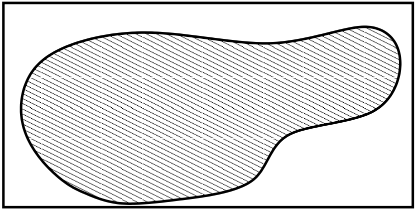
$$= \int_{-1}^{1} \int_0^1 \frac{x^2 ye^z}{2} \Big|_{x=0}^{2} dy\, dz = \int_{-1}^{1} \int_0^1 2ye^z\, dy\, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2 e^z \Big|_{y=0}^{1} dz = \int_{-1}^{1} e^z\, dz$$

$$= e^z \Big|_{z=-1}^{1} = e - e^{-1}.$$

Integrointi yleisemmissä alueissa 1/2

- Tutkitaan funktiota $f : D \to \mathbb{R}$, joka on määritelty tason (tai avaruuden) osajoukossa D.
- Tähän asti on oletettu, että D on suorakaide (vast. suorakulmainen särmiö). Yleisemmässä tapauksessa voidaan tarkastella suorakulmiota $\hat{D}$, jolle $D \subset \hat{D}$.
- Jotta integraali olisi määritelty, täytyy joukon D olla "siisti" (esim. riittää, että reuna on paloittain sileä).



Integrointi yleisemmissä alueissa 2/2

- Määritellään funktio $\hat{f}\colon \hat{D} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kun} \quad (x,y) \in D, \\ 0, & \text{kun} \quad (x,y) \in \hat{D} \setminus D. \end{cases}$$

- Nyt voidaan määritellä

$$\iint_D f(x,y)\,dA := \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x,y)\,dA.$$

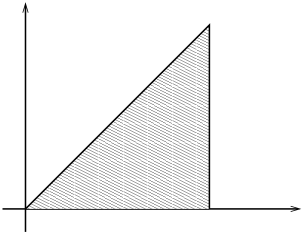
- Samaan tapaan voidaan määritellä myös avaruusintegraali ei-suorakulmaisen integroimisalueen tapauksessa:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV := \iiint_{\hat{D}} \hat{f}(x,y,z)\,dV,$$

kun $\hat{D}$ on suorakulmainen särmiö ja $D \subset \hat{D}$.

Esimerkki 6 1/2

Olkoon $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$. Lasketaan funktion $f(x,y) = xy$ integraali yli alueen D.



$$\iint_D xy\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \bigg|_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{x^4}{8} \bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{8}.$$

Esimerkki 6 2/2

Integrointi on mahdollista suorittaa myös toisessa järjestyksessä:

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 y}{2} \bigg|_{x=y}^{1} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2}\,dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Esimerkki 7

Lasketaan funktion $f(x, y) = e^{x^2}$ integraali Esimerkin 6 alueessa.

$$\iint_D e^{x^2}\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx$$

Sijoituksella $t = x^2$, $dt = 2x\, dx$ saadaan

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_{t=0}^{1} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}.$$

Huom. Integroimisjärjestyksellä on väliä. Integraali

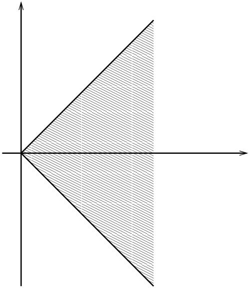
$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx \right) dy$$

on “hyvin vaikea” laskea.

Epäoleelliset integraalit 1/2

Tähän asti integrointi tapahtuu rajoitetussa alueessa rajoitetulle funktiolle (integrandille). Joskus voidaan kuitenkin integroida rajoittamattomia funktioita ja/tai rajoittamattomassa alueessa.

- Tarkastellaan ainoastaan tapausta, jossa funktio f on ei-negatiivinen eli $f(\mathbf{u}) \geq 0$ kaikilla $\mathbf{u} \in D$.
- Lasketaan funktion $f(x, y) = e^{-x^2}$ integraali alueessa suorien $y = \pm x$ rajoittamassa rajoittamattomassa alueessa D, jossa $x > 0$.



Epäoleelliset integraalit 2/2

Mikäli integraali on suppenee, sen arvo saadaan laskemalla

$$\iint_D e^{-x^2}\,dA = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\,dx$$

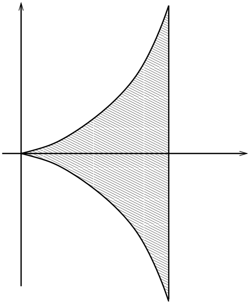
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2xe^{-x^2}\,dx.$$

Integraalin laskemiseksi huomataan, että $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$. Siten

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} -e^{-x^2}\Big|_{x=0}^{R} = \lim_{R\to\infty} 1 - e^{-R^2} = 1.$$

Esimerkki 1 1/2

Olkoon $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ |y| \le x^2\}$ ja rajoittamaton funktio $f(x, y) = 1/x^2$.



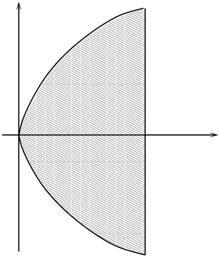
Lasketaan integraali

$$\iint_{D_1} \frac{1}{x^2}\, dA = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \frac{1}{x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 2\, dx = 2.$$

Esimerkki 1 2/2

Lasketaan saman funktion integraali alueessa
$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| \le \sqrt{x}\}$.



$$\iint_{D_2} \frac{1}{x^2}\, dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{x}\frac{1}{x^2}\, dx = \int_0^1 2x^{-3/2}\, dx = \lim_{R\to 0+} \frac{2x^{-1/2}}{-1/2}\Big|_{x=R}^{1} = \infty.$$

Suppeneminen riippuu integroitavasta funktiosta ja myös alueesta.