© Pekka Alestalo 2019

1 Taso- ja avaruuskäyrät

Tässä luvussa tutustutaan taso- ja avaruuskäyriin, niiden kaarenpituuteen ja kaarevuuteen. Lopuksi käsitellään skalaari- ja vektorikenttien viivaintegraaleja. Tähdellä merkityt kohdat kuuluvat (kurssista riippuen) oheislukemistoon.

Huom: Luennolla lasketaan lisää esimerkkejä ja piirrellään kuvioita.

1.1 Käyrän parametrisointi

Käyriä esiintyy monissa matematiikan sovelluksissa: Tasossa tai avaruudessa liikkuvan kappaleen paikka ajan funktiona muodostaa kappaleen ratakäyrän; termodynaamista kiertoprosessia voidaan kuvata umpinaisella käyrällä TS-koordinaatistossa, tai ideaalikaasun tapauksessa Vp-koordinaatistossa. Termodynamiikan I pääsäännön $dE = T\,dS - p\,dV$ avulla voidaan laskea esimerkiksi näiden prosessien hyötysuhteita viivaintegraalien avulla.

Käyrällä tarkoitetaan joukkoa $C \subset \mathbf{R}^n$, joka voidaan esittää muodossa

$$C = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in I\},$$

missä $I \subset \mathbf{R}$ on väli ja funktio $\mathbf{r}\colon I \to \mathbf{R}^n$ on jatkuva. Tässä $\mathbf{r}$ on käyrän C parametrisointi ja I on vastaava parametriväli. Käytännössä voidaan ajatella, että $n = 2$ tai $n = 3$, mutta ei ole välttämätöntä rajoittua näihin tapauksiin. Parametrisoinnin jatkuvuudella tarkoitetaan sen koordinaattifunktioiden jatkuvuutta, kuten seuraavasta esimerkistä käy ilmi.

Esimerkki 1.1 Jos $n = 3$, niin kyseessä on avaruuskäyrä, jolle

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3.$$

Tässä x, y, z ovat parametrisoinnin koordinaattifunktioita, ja jatkuvuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että nämä ovat jatkuvia funktioita jollakin parametrivälillä I. Parametrisointi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ kirjoitetaan usein koordinaattimuodossa

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$$

ja joskus myös vektorimuodossa $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Tässä monisteessa itse parametrisoinnit kirjoitetaan pääsääntöisesti koordinaattimuodossa, kun taas niihin liittyvien tangenttivektorien kohdalla on luontevaa käyttää vektorimuotoa.

Tapauksessa $n = 2$ kyseessä on tasokäyrä, jolloin yllä z-koordinaatti jää pois.

Usein parametriväli on suljettu väli $[a, b]$. Jos tällöin $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, niin kyseessä on umpinainen käyrä. Parametrisointi määrää käyrälle positiivisen suunnan, jolloin $\mathbf{r}(a)$ on käyrän alkupiste ja $\mathbf{r}(b)$ sen päätepiste. Annetusta parametrisoinnista voidaan muodostaa myös vastakkainen parametrisointi, jossa vastaava käyrä pysyy samana, mutta sen kulkusuunta vaihtuu. Tällöin myös parametrisointiin liittyvät alku- ja päätepiste vaihtavat paikkaa. Tapauksessa $\mathbf{r}\colon [0,1] \to C$ vastakkainen parametrisointi $\mathbf{r}_-$ saadaan helposti kaavalla $\mathbf{r}_-(t) = \mathbf{r}(1-t)$, $t \in [0,1]$.

Esimerkki 1.2 a) Ellipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ voidaan parametrisoida muodossa

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

missä $t \in [0, 2\pi]$. Tapauksessa $a = b = R$ saadaan R-säteisen origokeskisen ympyrän parametrisointi.
b) Jos $f\colon I \to \mathbf{R}$ on jatkuva yhden muuttujan funktio, niin sen kuvaaja $\{(x,y) \mid x \in I, y = f(x)\}$ on tasokäyrä, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in I$.
c) Pisteiden $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ välisen yhdysjanan parametrisointi voidaan kirjoittaa vektorimuodossa

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0),$$

kun $t \in [0,1]$. Tästä saadaan myös koordinaattimuoto

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) = (1-t)y_0 + ty_1 \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) = (1-t)z_0 + tz_1. \end{cases}$$

d) Sykloidi on tasokäyrä, joka kuvaa esim. vierivään renkaaseen tarttuneen kiven rataa. Jos renkaan säde on a ja parametriksi valitaan aika, niin akselin liikettä kuvaa parametrisointi $x = vt,\ y = a$. Kiven pyöriminen akselin suhteen tapahtuu vierimisehdon perusteella kulmanopeudella $\omega = v/a$ ja pyörimissuunta on negatiivinen. Jos vielä ajan nollakohta valitaan sellaiseen hetkeen, kun kivi koskettaa maata, niin pyörimisliikettä kuvaa parametrisointi

$$\begin{cases} x = a\cos(-(vt/a - \pi/2)) = -a\sin(vt/a) \\ y = a\sin(-(vt/a - \pi/2)) = -a\cos(vt/a). \end{cases}$$

Kiven rata saadaan yhdistämällä akselin liike ja pyöriminen toisiinsa, joten sykloidin parametrisointi on muotoa

$$\begin{cases} x = vt - a\sin(vt/a) \\ y = a(1 - \cos(vt/a)). \end{cases}$$

Matemaattisesti loogisempaa on valita parametriksi t renkaan kiertokulma, jolloin vierimisehdon perusteella $v = a$, ja lausekkeet yksinkertaistuvat hiukan.

Tasokäyrän yhtälö voidaan usein ilmaista myös implisiittisessä muodossa $F(x, y) = 0$, missä F on jokin kahden muuttujan lauseke. Konkreettisia esimerkkejä ovat funktion kuvaaja $y = f(x)$, joka voidaan määritellä muodossa $F(x, y) = y - f(x) = 0$, ja R-säteinen ympyrä $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Implisiittisen yhtälön $F(x, y) = 0$ määräämä tasojoukko voi kuitenkin yleisessä tapauksessa olla hyvin erikoinen. Jos nimittäin $A \subset \mathbf{R}^2$ on mikä tahansa tasojoukko (reunapisteetkin mukana), niin funktio

$$F(x, y) = \text{ pisteen } (x, y) \text{ pienin etäisyys joukosta } A$$

on jatkuva (myöhemmin tarkasteltavassa mielessä), mutta yhtälö $F(x, y) = 0$ esittää koko alkuperäistä joukkoa A.

Toinen yllättävä seikka on, ettei edes parametrisoitu käyrä välttämättä "näytä käyrältä". On esimerkiksi olemassa jatkuva funktio $\mathbf{r}\colon [0, 1] \to N = [0, 1] \times [0, 1]$, jonka kuvajoukko on koko neliö N sisäpisteineen. Neliö N on siis määritelmän mielessä tasokäyrä (ns. Peanon käyrä).

Tällaisista ongelmista päästään eroon, jos parametrisoinnilta vaaditaan jatkuvuuden lisäksi derivoituvuus, jota käsitellään seuraavassa kappaleessa.

1.2 Käyrän tangentti

Tarkastellaan 3-ulotteista parametrisointia $\mathbf{r}$, joka on jatkuvasti derivoituva. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen koordinaattifunktion täytyy olla derivoituva ja derivaatan vielä lisäksi jatkuva. Parametriväliä $[t, t + \Delta t]$ vastaava käyrän sekantti on vektori

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Kun $\Delta t \to 0$, niin $\Delta \mathbf{r}$ kääntyy yhä enemmän käyrän tangentin suuntaiseksi, mutta samalla sen pituus pienenee kohti nollaa. Skaalaamalla kertoimella Δt saadaan kuitenkin erotusosamäärää vastaava lauseke, josta nähdään, että rajaarvo

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

on olemassa ja se voidaan käytännössä laskea kaavalla

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Perustelu: Vektorin $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ ensimmäinen koordinaatti

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to x'(t),$$

kun $\Delta t \to 0$, ja samoin käy muissa koordinaateissa.

Tangenttivektorin määritelmästä saadaan myös jatkossa hyödyllinen approksimaatio: Koska $\mathbf{r}'(t) \approx \Delta \mathbf{r}/\Delta t$, niin $\Delta \mathbf{r} \approx \mathbf{r}'(t)\Delta t$.

Määritelmä 1.3 Jos käyrällä $C \subset \mathbf{R}^n$ on jatkuvasti derivoituva parametrisointi $\mathbf{r}$, niin pisteessä $\mathbf{r}(t)$ käyrän tangenttivektori on

$$\mathbf{r}'(t) = x_1'(t)\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n'(t)\mathbf{e}_n,$$

missä funktiot x_i ovat parametrisoinnin koordinaattifunktiot ja vektorit $\mathbf{e}_i$ ovat avaruuden $\mathbf{R}^n$ luonnolliset kantavektorit, ts. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ jne.

Jos parametri t on aika ja $\mathbf{r}(t)$ kuvaa jonkin kappaleen rataa, niin lauseke $\Delta\mathbf{r}$ on sen siirtymä aikavälillä Δt. Kappaleen keskinopeus on siis $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, joten tangenttivektorin fysikaalinen tulkinta on hetkellinen nopeus $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$. Vastaavaa tarkastelua voidaan soveltaa uudelleen parametrisointiin $t \mapsto \mathbf{v}(t)$, jolloin saadaan kappaleen hetkellinen kiihtyvyys

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t).$$

Termejä nopeus ja kiihtyvyys voidaan käyttää kaikille parametrisoinneille, vaikkei parametrilla t olisikaan konkreettista tulkintaa aikana.

Yllä mainittu approksimaatio $\Delta\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'(t)\Delta t$ voidaan nyt kirjoittaa muodossa $\Delta\mathbf{r} \approx \mathbf{v}(t)\Delta t$, ts. siirtymä on likimäärin sama kuin hetkellinen nopeus kerrottuna aikavälin pituudella.

Esimerkki 1.4 Sykloidin parametrisointi (kulman avulla) on muotoa

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

josta voidaan laskea tangenttivektori

$$\mathbf{r}'(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j},$$

ja kiihtyvyys $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a \sin t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j}$. On syytä huomata, että $\|\mathbf{a}(t)\| =$ vakio $=$ tasaisen pyörimisliikkeen kiihtyvyys.

Sykloidissa esiintyy teräviä kulmia (niissä kohdissa, joissa kivi koskettaa maata). Miten se on mahdollista, kun kerran tangentti $\mathbf{r}'(t)$ on määritelty kaikilla t? Selitys on siinä, että $\mathbf{r}'(2\pi n) = \overline{0}$. Hetkellinen nopeus on siis näissä pisteissä nolla, jolloin käyrän suunta voi muuttua jyrkästi. Pisteet, joissa $\mathbf{r}'(t) = \overline{0}$ ovat ongelmallisia myös sen vuoksi, ettei nollavektoria voida pitää oikeana tangenttivektorina.

Tämän vuoksi asetetaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.5 Käyrän C parametrisointi $\mathbf{r}$ on säännöllinen, jos se on jatkuvasti derivoituva (mahdollisia parametrivälin päätepisteitä lukuunottamatta) ja $\mathbf{r}'(t) \neq \overline{0}$ kaikilla t.

Fysikaalisesti parametrisoinnin säännöllisyys tarkoittaa sitä, ettei kappaleen liikkeessä ole pysähdyksiä.

Esimerkki 1.6 Paraabelilla $y = x^2$ on parametrisointi $x = t$, $y = t^2$, joka on säännöllinen, sillä

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \neq \overline{0}$$

kaikilla t.

Parametrisointi ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen: myös kaavat $x = t^3$, $y = t^6$, määrittelevät saman paraabelin, mutta nyt

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 6t^5\mathbf{j} = \overline{0}$$

arvolla $t = 0$. Tämä parametrisointi ei siis ole säännöllinen. Havaitsemme, ettei epäsäännöllinen parametrisointi välttämättä tarkoita käyrässä olevan teräviä kulmia tms.

Säännöllisen parametrisoinnin yhtenä etuna on se, että käyrälle voidaan määrittää jokaiseen pisteeseen yksikkötangenttivektori

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t),$$

jolle siis $|\mathbf{u}(t)| = 1$ kaikilla t. Tätä voidaan käyttää apuna esimerkiksi kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponenttien määrittämiseen seuraavalla tavalla.

Tarkoituksena on siis kirjoittaa kiihtyvyys muodossa

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N,$$

missä $\mathbf{a}_T \parallel \mathbf{u}$ ja $\mathbf{a}_N \perp \mathbf{u}$. Käytännössä $\mathbf{a}_T$ on kiihtyvyyden vektoriprojektio $\mathbf{a}_\mathbf{u}$ vektorin $\mathbf{u}$ määräämään suuntaan, joten

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_\mathbf{u} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}\mathbf{r}'(t)$$

lasketaan ensin, ja sen avulla saadaan

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T.$$

Esimerkki 1.7 Hiukkanen liikkuu pitkin Helix-käyrää ("kierrejousi"), jolla on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \ t \in \mathbf{R}.$$

Määritetään sen kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit.

Nyt $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$, joten

$$\mathbf{a}_T = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\sin t \cos t - \sin t \cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\mathbf{v} = \overline{0}.$$

Kiihtyvyys on siis pelkkää normaalikiihtyvyyttä, eli $\mathbf{a}_N = \mathbf{a}$.

Tutkitaan vielä lopuksi tarkemmin yksikkötangenttivektoria $\mathbf{u}(t)$. Koska $|\mathbf{u}(t)| = 1$, niin $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = 1$ kaikilla t. Derivoimalla tämä yhtälö puolittain parametrin t suhteen saadaan

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t)) = \frac{d}{dt}1 = 0.$$

Tässä

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t)) &= \frac{d}{dt}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2) \\ &= 2u_1(t)u_1'(t) + 2u_2(t)u_2'(t) + 2u_3(t)u_3'(t) = 2\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t),\end{aligned}$$

joten $\mathbf{u}'(t) \perp \mathbf{u}(t)$ kaikilla t. Jos $\mathbf{u}'(t) \neq \overline{0}$, niin voidaan määritellä

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{u}'(t)\|}\mathbf{u}'(t),$$

joka on nimeltään käyrän päänormaali. Lyhyellä laskulla voidaan osoittaa, että

$$\begin{cases} \mathbf{a}_T = \|\mathbf{r}'(t)\|'\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{a}_N = \|\mathbf{r}'(t)\|\|\mathbf{u}'(t)\|\mathbf{n}(t), \end{cases}$$

joten normaalikiihtyvyys on aina päänormaalin suuntainen. Kolmiulotteisessa tapauksessa yksikkövektorit $\mathbf{u}(t)$ ja $\mathbf{n}(t)$ määräävät sellaisen tason, jota käyrä hetkellisesti sivuaa parhaiten. Käyrän kierevyys eli erkaneminen ulos tästä tasosta tapahtuu suuntaan $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{n}(t)$, joka on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{u}(t)$ ja $\mathbf{n}(t)$ vastaan. Se on myös yksikkövektori ja nimeltään käyrän sivunormaali. Näiden kolmen yksikkövektorin avulla voidaan jokaiseen käyrän pisteeseen liittää sen kulun kanssa yhteensopiva suorakulmainen koordinaatisto. Tällöin esimerkiksi vektoreiden $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ ja $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{n}(t)$ derivaatat voidaan esittää lineaarikombinaatioina näistä kolmesta alkuperäisestä vektorista. Tulokset tunnetaan Frenet'n kaavojen nimellä, mutta emme käsittele niitä tällä kurssilla sen tarkemmin.

1.3 Kaarenpituus

Olkoon $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ käyrän C jatkuvasti derivoituva parametrisointi. Jos käyrää approksimoidaan sen sekanteista muodostetulla murtoviivalla ja annetaan approksimaation tihentyä, voidaan olettaa, että murtoviivojen pituudet suppenevat kohti lukua ℓ, joka olisi tutkittavan käyrän kaarenpituus. Osoittautuu, että näin todella käy ja että kaarenpituus saadaan integraalina

$$\ell(C) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

Tämän perustelemiseksi tarkastellaan välin $[a,b]$ tasavälistä jakoa pisteillä $t_k = a + k \cdot \Delta t$, missä $\Delta t = (b-a)/n$ ja n on jakovälien lukumäärä. Tällöin siis $t_0 = a$ ja $t_n = b$. Jos merkitään $\Delta\mathbf{r}_k = \mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}(t_k)$, niin vastaavan murtoviivan pituus on $\sum_k \|\Delta\mathbf{r}_k\|$. Jokaisella k on voimassa

$$\Delta\mathbf{r}_k = \mathbf{r}(t_k + \Delta t) - \mathbf{r}(t_k) \approx \mathbf{r}'(t_k)\Delta t,$$

joten murtoviivan pituus on likimäärin

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{r}'(t_k)\|\Delta t \approx \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

Voidaan osoittaa, että rajalla $n \to \infty$, ts. kun $\Delta t \to 0$, murtoviivojen pituuksilla on raja-arvona tämä integraali, joka siis esittää kyseisen käyrän kaarenpituutta.

Jos käyrän parametrisointi on ainoastaan paloittain jatkuvasti derivoituva, saadaan koko käyrän kaarenpituus laskemalla osien kaarenpituudet yhteen.

Koska samalla käyrällä voi olla useita erilaisia parametrisointeja, herää kysymys siitä, onko kaarenpituus itse käyrään vai pelkästään tiettyyn parametrisointiin liittyvä luku. Voidaan osoittaa, ettei kaarenpituus riipu parametrisoinnin valinnasta eikä sen suunnasta. Hieman täsmällisemmin muotoiltuna pätee: jos uusi parametrisointi saadaan muuttujanvaihdolla entisestä, niin niitä vastaavien kaarenpituusintegraalien arvot ovat samat.

Esimerkki 1.8 Lasketaan Helix-käyrän $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kaarenpituus parametrivälillä $t \in [0, 2\pi]$. Koska $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, niin

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

joten kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Esimerkissä parametrisointi venyttää parametrivälin pituutta kertoimella $2\sqrt{2}\pi/2\pi = \sqrt{2}$. Valitsemalla uusi parametri $s = \sqrt{2}t$, eli $t = s/\sqrt{2}$, saadaan toinen parametrisointi

$$\mathbf{r}(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2}),$$

jolle $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$ kaikilla s. Tämä tarkoittaa sitä, että kaarenpituus itse käyrällä on täsmälleen sama kuin vastaavan parametrivälin pituus. Tällaista kutsutaan parametrisoinniksi kaarenpituuden suhteen ja se voidaan periaatteessa muodostaa kaikille käyrille. Tuloksella on kuitenkin vain teoreettista mielenkiintoa, koska kaarenpituusintegraaleja ei yleensä voida esittää alkeisfunktioiden avulla, vaan ne täytyy laskea numeerisesti.

Esimerkki 1.9 Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituudelle on olemassa jo ennestään tuttu kaava. Tutkitaan, millainen tulos saadaan käyttämällä tämän luvun yleisempää tulosta. Kuvaaja voidaan parametrisoida muodossa $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$. Tällöin $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ ja $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, joten kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

aivan kuten ennenkin.

Kaarenpituutta voidaan yleisemmin tutkia myös sellaisille käyrille, joiden parametrisointi on muodostettu rajoittamattomalla välillä, ja kaarenpituusintegraalista tulee tällöin epäoleellinen. Jos tämä integraali on suppeneva, niin käyrää sanotaan suoristuvaksi.

Esimerkki 1.10 Onko spiraalin $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t$, $t \geq 0$, kaarenpituus äärellinen?

Lasketaan siis $\mathbf{r}'(t) = e^{-t}(-\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^{-t}(\cos t - \sin t)\mathbf{j}$ ja edelleen

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = e^{-t}\sqrt{(-\cos t - \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{2}e^{-t}.$$

Näin ollen kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_0^\infty \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \sqrt{2},$$

joten spiraali on suoristuva.

On syytä mainita, ettei pelkkä jatkuvuus takaa edes sitä, että suljetulla välillä parametrisoitu tasokäyrä olisi suoristuva. Tunnetuin esimerkki tällaisesta on ns. lumihiutalekäyrä, jonka keksi ruotsalainen Helge von Koch v. 1904; katso esim.

`https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake`

Tässä yleisemmässä tilanteessa suoristuvuutta ei voida enää tutkia integraalina, vaan päättelyn täytyy perustua suoraan approksimoivien murtoviivojen pituuksiin.

Tutkitaan lopuksi kaarenpituuden laskemista napakoordinaattien avulla. Tason piste (x, y) voidaan esittää napakoordinaattien r, θ avulla muodossa $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, missä $r \geq 0$ ja $\theta \in \mathbf{R}$ (tai $\theta \in [0, 2\pi]$). Monia tasojoukkoja on helpompi käsitellä napakoordinaattien kuin tavallisten xy-koordinaattien avulla. Esimerkiksi R-säteisen ympyrän yhtälö napakoordinaateissa on muotoa $r = R$.

Tutkimme seuraavassa tasokäyrän $r = f(\theta)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, kaarenpituuden laskemista. Tällainen käyrä voidaan parametrisoida kulman $\theta = t$ avulla, jolloin

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta = f(t)\cos t \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta = f(t)\sin t. \end{cases}$$

Tällöin $\mathbf{r}'(t) = (f'(t)\cos t - f(t)\sin t)\mathbf{i} + (f'(t)\sin t + f(t)\cos t)\mathbf{j}$ ja $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2}$ sievennnysten jälkeen. Kaarenpituus saadaan siis integraalista

$$\ell = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2}\,dt.$$

Esimerkki 1.11 Laske neliapilan $r = |\cos 2\theta|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, kaarenpituus.

Symmetrian vuoksi riittää laskea kaarenpituus välillä $\theta \in [0, \pi/4]$ ja kertoa tulos luvulla 8. Tällöin myös $\cos 2\theta \geq 0$, mikä helpottaa laskuja. Nyt siis $f(t) = \cos 2t$ ja $f'(t) = -2\sin 2t$, joten kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2(2t) + 4\sin^2(2t)}\,dt = 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + 3\sin^2(2t)}\,dt \approx 9.69.$$

Kyseessä on ns. elliptinen integraali, joka täytyy laskea numeerisesti; sillä ei ole alkeisfunktioiden avulla esitettävää arvoa. Tämä ilmiö toistuu useissa kaarenpituuteen liittyvissä laskuissa.

1.4 Kaarevuus

Kaarevuus liittyy käyrän suunnan muutosnopeuteen. Geometrisesti tarkasteltuna on luontevinta selvittää ensin tutkittavassa pisteessä käyrän kaarevuussäde R ja määritellä sen avulla kaarevuus $K = \kappa = 1/R$.

Jotta pääsemme mahdollisimman nopeasti myös kolmiulotteiseen tapaukseen, tarkastellaan lähtökohtana seuraavaa esimerkkiä.

Esimerkki 1.12 Hiukkanen kiertää R-säteistä ympyrärataa kulmanopeudella ω. Määritä sen normaalikiihtyvyys.

Radan parametrisointi ajan suhteen on muotoa $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$. Tällöin

$$\mathbf{r}'(t) = -R\omega\sin(\omega t)\mathbf{i} + R\omega\cos(\omega t)\mathbf{j}$$

ja $\|\mathbf{r}'(t)\| = R\omega$. Jälkimmäinen yhtälö kertoo myös kulmanopeuden yhteyden hiukkasen vauhtiin. Kiihtyvyydeksi saadaan

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)\mathbf{i} - R\omega^2\sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2 R \cdot \frac{1}{R}\mathbf{r}(t),$$

joten $\mathbf{a}_N = \mathbf{a}$ ja $a_N = \omega^2 R = \|\mathbf{r}'(t)\|^2/R$.

Jälkimmäinen muoto saattaa olla ennestään tuttu keskeiskiihtyvyyden lauseke lukiofysiikasta. Se antaa myös viitteen siitä, että yleisen käyrän kaarevuussäde voitaisiin laskea kaavalla $R = \|\mathbf{r}'(t)\|^2/a_N$ vertaamalla käyrän kulkua hetkellisesti pyörimisliikkeeseen. Osoittautuu, että tämä johtaa käytännölliseen määritelmään, mutta sitä ennen tarvitaan normaalikiihtyvyydelle a_N konkreettinen lauseke, joka saadaan seuraavalla tavalla.

Koska $\mathbf{r}'' = \mathbf{a} = a_T\mathbf{u} + a_N\mathbf{n}$, niin muodostamalla vektorin $\mathbf{u}$ ristitulo yhtälön molempien puolten kanssa saadaan

$$\mathbf{u} \times \mathbf{r}'' = a_T\mathbf{u} \times \mathbf{u} + a_N\mathbf{u} \times \mathbf{n} = a_N\mathbf{u} \times \mathbf{n}.$$

Tässä $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$ on yksikkövektori (itse asiassa sivunormaali), joten

$$a_N = \|\mathbf{u} \times \mathbf{r}''\| = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|}.$$

Yhdistämällä saadut kaavat päädytään seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 1.13 Jos $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ on kolmiulotteisen käyrän säännöllinen kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva parametrisointi, niin käyrän kaarevuus pisteessä $\mathbf{r}(t)$ on

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

ja vastaava kaarevuussäde $R = 1/\kappa$.

Ennen esimerkkejä tutkitaan, mitä kaarevuus tarkoittaa tasokäyrille, jotka saadaan avaruuskäyrien erikoistapauksena asettamalla $z(t) \equiv 0$.

Tällöin

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))\mathbf{k}$$

ja $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$, joten kaksiulotteinen kaarevuus voidaan määritellä seuraavalla tavalla.

Määritelmä 1.14 Tarkastellaan tasokäyrää, jolla on säännöllinen kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Tällöin pisteessä $\mathbf{r}(t)$ käyrän kaarevuus on

$$\kappa = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

ja vastaava kaarevuussäde on $R = 1/\kappa$.

Molempia tuloksia voidaan soveltaa myös erikoistapauksiin $1/0 = \infty$ ja $1/\infty = 0$. Huomattakoon, että tasokäyrän kaarevuuden osoittajasta on jätetty itseisarvot pois. Kokeilemalla havaitaan, että $\kappa > 0$, jos tasokäyrä kaartuu positiiviseen suuntaan kuljettaessa vasemmalle, ja $\kappa < 0$ oikealle suuntautuvassa kaarteessa. Kolmiulotteisessa tapauksessa vastaavaa geometrista tulkintaa on vaikeampi muotoilla.

Tasokäyrän kaarevuussäteen lauseke voidaan perustella myös seuraavalla tavalla. Koska ympyrän kaksi normaalia leikkaavat aina ympyrän keskipisteessä, niin ehkäpä yleisen tasokäyrän kaksi lähekkäisiin pisteisiin piirrettyä normaalisuoraa leikkaisivat toisensa lähellä kaarevuuskeskipistettä? Määritetään siis tutkittavan pisteen $\mathbf{r}(t_0)$ kautta kulkeva normaali ja muodostetaan vastaava normaali lähellä olevaan pisteeseen $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$. Lasketaan normaalien leikkauspisteen koordinaatit ja niistä raja-arvo, kun $\Delta t \to 0$. Tämän pisteen etäisyys tutkittavasta käyrän pisteestä on etsitty kaarevuussäde. Välivaiheet ovat periaatteessa suoraviivaisia, mutta teknisesti hieman hankalia, ja johtavat samaan tulokseen kuin yllä!

Esimerkki 1.15 Lasketaan ellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ kaarevuus pisteessä $(a, 0)$. Ellipsillä on parametrisointi $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ ja tarkasteltava piste vastaa parametrin arvoa $t = 0$. Nyt siis

$$\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (-a\cos t)b\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}},$$

joten arvolla $t = 0$ saadaan

$$\kappa = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}.$$

Huomattakoon, että tapauksessa $a = b = R$ tuloksesta saadaan R-säteisen ympyrän kaarevuudeksi $1/R$, kuten pitääkin.